

**Mechanik der Baukunst**  
(Ingenieur-Mechanik)  
oder  
Anwendung der Mechanik  
auf das  
**Gleichgewicht von Bau-Constructionen.**

Von

**Navier,**

Mitglied des Instituts, Professor an der polytechnischen Schule in Paris u.

Aus dem Französischen übersetzt und mit einem Anhange versehen

von

**G. Westphal,**

ehemaligem Bögling der polytechnischen Schule in Hannover.

Mit einer Vorrede

von

**Dr. M. Rühlmann,**

Professor an der polytechnischen Schule in Hannover.

Mit vielen Holzschnitten.

---

Hannover.

Schelling'sche Hof-Buchhandlung.

1851.

67593

Handbuch der Philosophie

(Einleitung und Grundriss)

von

Handbuch der Philosophie

von

Handbuch der Philosophie

von

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie



Handbuch der Philosophie

von

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie

Handbuch der Philosophie

Schrift und Druck von Dr. Gulemann.

von

## V o r w o r t.

Seit 1845 benutzte ich bei meinen Vorträgen über Mechanik der Baukunst, an der polytechnischen Schule in Hannover, die französische Ausgabe gegenwärtigen Werkes, über dessen Brauchbarkeit und Vortrefflichkeit unter den Fachmännern, die sich bemühten es genau kennen zu lernen, nur eine Stimme ist. Von gedachter Zeit an war meine Absicht, es in deutscher Sprache für den Druck zu bearbeiten und mit Noten zu versehen, welche sich insbesondere auf die Fortschritte beziehen sollten, welche sowohl der wissenschaftliche wie praktische Theil der Ingenieurmechanik seit Navier's Tode gemacht hatte. Leider wurde ich von der Ausführung dieses Vorsatzes durch überhäufte, wiederkehrende anderweitige Arbeiten fortwährend abgehalten, so daß der beste Wille nicht zur That werden konnte.

Recht erfreulich war es mir daher, als einer der tüchtigsten meiner ehemaligen Schüler, Herr Westphal aus Lüneburg, sich erbot, die Uebersetzung zu besorgen.

Um nun hierbei auch den deutschen Freunden und Verehrern Navier's das Original treu zu bewahren, ist Herr Westphal meinem Rathe gefolgt und hat alle wünschenswerthen Zusätze in einem besondern Anhange beigefügt, ohne die Arbeit Navier's im Mindesten zu verändern.

Wenn dabei der gedachte Anhang nicht überall die vielleicht von manchem Leser gewünschte Vollständigkeit erhalten hat — was insbesondere in Betreff der auch im Original gänzlich fehlenden Theorie der Kettenbrücken, sowie der neueren Arbeiten über Theorie der Gewölbe, der Fall sein dürfte — so liegt der Grund hiervon theils in der Herrn Westphal zugemessenen Zeit, theils darin, daß der Preis des Buches möglichst niedrig gehalten werden sollte.

Diesem Uebelstande einigermaßen abzuhelpen, hat Herr Westphal in seiner Vorrede eine ziemlich vollständige Literatur (mit theilweiser Kritik) der bemerkten Gegenstände aufgeführt, die ich der besonderen Beachtung empfehlen möchte.

Die Gelegenheit benutzend, erlaube ich mir schließlich über Navier selbst, so wie über seine zahlreichen Werke Nachfolgendes beizufügen, was ich besonders deshalb nicht unterlassen wollte, als ich selbst dem Studium der Schriften dieses ausgezeichneten Mannes — der, als seltenes Beispiel, den Ingenieur, den Lehrer und den Gelehrten in gleich hohem Grade in sich vereinigte — unendlich viel verdanke und in Deutschland weder über sein spezielles Leben, noch über die Mannigfaltigkeit seiner wissenschaftlichen und technischen Arbeiten, überall die verdiente Kenntniß verbreitet sein dürfte.

Louis-Marie-Henri Navier, Offizier der Ehrenlegion, Mitglied der Academie der Wissenschaften in Paris und Abtheilungsinspector des Weg- und Brückenbaues, wurde am 15. Februar 1785 zu Dijon geboren, wo sein Vater als angesehenener Advocat lebte, den er jedoch schon im 14. Jahre seines Alters verlor.

Zum größten Theile ersetzt wurde ihm dieser Verlust durch seinen würdigen Onkel, den berühmten Gauthey, Generalinspector des Straßen- und Brückenbaues, dessen Sorgfalt und Eifer er es mit verdankte, daß er bereits 1802 das schwere Examen zur Aufnahme in die Pariser école polytechnique glänzend bestand, 1804 in die école des ponts et chaussées eintreten konnte, und sich schon 1808 den Grad eines ordentlichen Ingenieurs für Straßen- und Brückenbau erwarb.

In dieser Stellung machte er sich der technisch-mathematischen Welt (1813) zuerst durch die Herausgabe von Gauthey's, \*) *Traité des ponts*, so wie durch Belidor's *Science des ingénieurs* (1813) und des ersten Bandes der *Architecture hydraulique* (1819) desselben Autors bekannt, denen bald jene schöne Reihe von eben so originellen als werthvollen Arbeiten folgte, womit Navier Technik und Wissenschaft bereicherte. In ersterer Hinsicht muß Navier jedenfalls zu den Männern (Prony, Poncelet und Coriolis) gezählt werden, die in einer vorher nicht gekannten Weise die Anwendung der Mechanik auf Baukunst und Maschinen zeig-

\*) Gestorben den 14. Juli 1807.



ten und die Schöpfer der heutigen Industriellen- und Ingenieur-Mechanik genannt werden müssen.

Im Jahre 1819 wurde Navier Professor suppléant der Mechanik an der école des ponts et chaussées und bald nach dem Erscheinen (1823) seines jetzt noch unübertroffenen Werkes: *Mémoire sur les ponts suspendus*, nämlich den 26. Januar 1824, Mitglied der Académie der Wissenschaften in Paris.

Bereits früher mit mehrfachen praktischen Arbeiten betraut (die Brücken von Choisy, Astières, Argenteuil über die Seine und mehrere andere Bauten sind sein Werk), übertrug man ihm den Bau einer Kettenbrücke (155 Meter Spannweite) über die Seine in Paris, welche zur Verbindung der Esplanade des Invalidenhauses und der Champs-Élysées dienen sollte, wobei er (bekanntlich) das Unglück erleben mußte, daß noch vor der Vollendung der Brücke einer der Landpfeiler etwas zu weichen begann und, durch andere ungünstige Umstände veranlaßt, die ganze Brücke wieder abgetragen wurde, ein Ereigniß, welches nach manchen Seiten hin über Navier mindestens so lange ein falsches Urtheil erzeugte, bis Prony die ganze Sache in klarer Weise auseinandersetzte<sup>\*)</sup>.

1830 wurde Navier Professor der Analysis und Mechanik an der école royale polytechnique, in welcher Stellung er sich durch die Methode und Klarheit seines Vortrags die innigste Liebe und höchste Verehrung seiner Schüler und Zuhörer erwarb.

Leider ereilte ihn schon am 23. August 1836 der Tod, viel zu früh eben so wohl für seine Gattin und beiden Töchter, wie für die Wissenschaft, in deren Kreise sein Name niemals in Vergessenheit gerathen wird.

Navier's vorzüglichste schriftstellerische Arbeiten sind folgende:

### I. Selbständige im Buchhandel erschienene Werke.

1. *Projet pour l'établissement d'une gare à Choisy, contenant l'exposé des travaux proposés ou entrepris jusqu'à présent à Paris pour mettre les bateaux à l'abri des débâcles, suivi d'une Notice descriptive du pont de Choisy, etc.* Paris, 1811, in-4.
2. *Examen de la tontine perpétuelle d'amortissement fondée par M. Janson de Sailly etc.; autorisée par ordonnance du roi.* Paris, 1819, in-8.

<sup>\*)</sup> Prony äußert sich im *Résumé* seines Urtheils über das ganze Ereigniß wörtlich folgendermaßen: 1. Que l'événement du pont des Invalides devait être considéré seulement comme un de ces accidents plus ou moins graves que les ingénieurs rencontrent souvent dans les grands travaux; 2. Que le remède était aussi facile que peu dispendieux, puisqu'il s'agissait seulement d'augmenter la résistance des contre-forts, etc.

(*Annales des ponts et chaussées* 1837. 1. Semestre p. 13.)

3. **Mémoire sur les ponts suspendus et Rapport à M. Becquey**, directeur général des ponts-et-chaussées et des mines, Paris, 1824, in-4 et atlas in fol.

(Eine zweite Ausgabe folgte 1830).

4. **De l'entreprise du pont des Invalides.** Paris, 1827, in-8.

5. **De l'établissement d'un chemin de fer, entre Paris et le Havre.** Havre, 1826, in-8.

6. **Résumé des leçons données à l'école des ponts-et-chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines.**

**Première Partie**, contenant les leçons sur la résistance des matériaux, et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpente. Paris, 1826, in-8., avec 5 planches.

(Die zweite Ausgabe, nach welcher gegenwärtige deutsche Bearbeitung erfolgte, erschien 1833.)

**Deuxième et Troisième Partie**, contenant les leçons sur le mouvement des eaux, et les leçons sur l'établissement des machines. Paris, 1838, in-8, avec 9 planches.

7. **Résumé des leçons d'analyse données à l'école polytechnique.** Paris 1840 et 1841, 2 vol. in-8.

(Die Herausgabe wurde von Liouville und Catalan, nach den lithographirten Heften von Navier, besorgt).

8. **Résumé des leçons de mécanique données à l'école polytechnique.** Paris, 1841, 2 vol. in-8.

(Gleichfalls Abdruck der hinterlassenen lithographirten Hefte.)

II. **Abhandlungen, welche in den Sitzungen der Pariser Academie der Wissenschaften verlesen und resp. in deren Schriften aufgenommen wurden.**

1. **Mémoire sur les roues à élever l'eau lu à l'Académie des sciences, le 2 novembre 1818, approuvé pour être imprimé dans les Savants étrangers, le 11 janvier 1819, sur le rapport de M. M. de Prony, Fourier et Dupin, rapporteurs.**

2. **Mémoire sur la flexion des lames élastiques, lu ect. le 29 novembre 1819, approuvé pour être imprimé dans les Savants étrangers, le 4 septembre 1820, sur le rapport de M. M. Poinso, Dupin et de Prony, rapporteurs.**

3. **Mémoire sur la flexion des plans élastiques, lu le 14 août 1820.**

(Noch nicht abgedruckt. Ein Auszug findet sich in dem Bulletin de la société philomatique, juin et juillet 1823, so wie §. 638 b. Werkes).

4. **Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, lu le 14 mai 1821.**

- Abgedruckt in den Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Tome VII. pag. 375. Année 1827.
5. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides, lu le 18 mars 1822. Abgedruckt ebenfalls Tome VI. p. 389. Année 1823. (Ein Auszug in den Annales de chim. et de phys. mars 1822, Tome 19, p. 244).
6. Continuation des recherches sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules, lu le 16 décembre 1822. (Noch ungedruckt.)
7. Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques dans les vases et les tuyaux de conduite, lu le 1 juin 1829. Abgedruckt in den Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Tome IX. p. 311. 1830.  
(Ein Paragraph (4) dieser Abhandlung ist in den Annales de chimie et de physique vom April 1827 Tome 34. p. 400 abgedruckt.)
8. Rapport sur un mémoire de M. Chabrier, concernant les moyens de voyager dans l'air et de s'y diriger, contenant une nouvelle théorie des mouvements progressifs. Ibid. Tome XI. p. Xj, 1832.  
Außer diesen selbstständigen Arbeiten hat Navier der Académie eine große Menge der interessantesten Rapports abgestattet, deren Aufzählung wegen Mangels an Raum hier nicht Platz finden kann.

### III. Abhandlungen in wissenschaftlichen Journalen.

1. Détails historiques sur l'emploi du principe des forces vives dans la théorie des machines, et sur diverses roues hydrauliques. Annales de Chimie et de Physique, Tome 9, p. 146. octobre 1818.
2. Note sur l'action mécanique des combustibles. Ibid. Tome 17, p. 357.
3. Sur la variation de température qui accompagne les changemens de volume des gaz. Ibid. Tome 17, p. 372. 1821.
4. Note sur les effets des secousses imprimées aux poids suspendus à des fils ou à des verges élastiques. Bulletin de la société philomatique, mai 1823.

Die größte Menge von wissenschaftlich-technischen interessanten Aufsatzen, Abhandlungen und Notizen Naviers enthalten die Annales des ponts-et-chaussées, wovon wir nur einige anführen, in Betreff der übrigen aber auf gedachte Quelle verweisen müssen.

Analyse du 1 volume des mémoires de Mr. Girard sur le canal de l'Oureq. 1831. 1 Semest. p. 67.

Calcul de l'épaisseur à donner aux murs de revêtement. Ibid. p. 349.

Rapport sur un mémoire de Mr. Raucourt, relatif à la mesure des vitesses de la Néva. 1832. 2 Semest. p. 1.

Note sur le mouvement uniforme des waggon dans les parties de chemin de fer tracées en ligne courbe. 1834. 2 Sem. p. 357.

Nouvelles considérations sur l'emploi des machines locomotives dans les chemins de fer. 1836. 1 Sem. p. 1. etc. etc. etc.

IV. Werke, deren neue Ausgabe Navier besorgte und mit werthvollen Anmerkungen und Zusätzen begleitete.

1. *Traité de la construction des ponts*, par Gauthey. Paris, 1809 bis 1816. 3 vol. in-4.

2. *La Science des Ingénieurs* par Bélidor. Paris, 1813 und 1830. in-4.

(Ein Werk, welches allein der Navier'schen Kritiken und Zusätze wegen gelesen zu werden verdient).

3. *Mémoires sur les canaux de navigation*, par Gauthey. Paris, 1816, in-4.

4. *Architecture hydraulique*, par Bélidor. Tome I. Paris, 1819 in-4.

Hier betragen die Navier'schen Anmerkungen und Anhänge ziemlich eben so viel wie der ursprüngliche Text Belidor's. Die elementare und doch an sich strenge und klare Behandlungsweise Navier's machen dies Werk, wie auch jenes unter 2, höchst empfehlenswerth für Anfänger im Studium der Mechanik, Hydraulik und des Maschinenwesens.

Hannover, im October 1850.

**Rühlmann.**

## Vorrede des Übersetzers.

Bei der allgemeinen Anerkennung, welche unter den vielen ausgezeichneten Schriften des seligen Navier besonders seiner *Application de la Mécanique* <sup>1)</sup> in so großem Maße zu Theil geworden ist, glaubte ich wohl die Erwartung hegen zu dürfen, daß eine deutsche Uebertragung von dem ersten Theile dieses Werkes, welcher die Anwendung der Mechanik auf das Gleichgewicht von Bauconstructions enthält, nicht ganz ungünstig aufgenommen werden würde, und ich habe mich daher mit Vergnügen der erforderlichen Arbeit unterzogen, um diesen Theil in einem deutschen Gewande dem technischen Publicum vorlegen zu können. Die Erweiterungen, welche das Feld der Ingenieurmechanik in jüngster Zeit sowohl in theoretischer Hinsicht, als in dem Gebiete der Erfahrungen und Experimente erlitten hat, schienen mir es nöthig zu machen, mindestens Einiges hiervon mit aufzunehmen, was denn auch in einem Anhange geschehen ist, während die Arbeit Navier's keine andern Zusätze erhalten hat, als solche, welche nur dazu dienen sollen, dem im höhern Calcul weniger Geübten, die mathematischen Entwicklungen verständlicher zu machen. Was nun den Anhang betrifft, so gestehe ich gern, daß es demselben bei Weitem an jener Vollständigkeit mangelt, welche ich selbst davon fordern möchte, allein theils der Mangel an Zeit, theils der Wunsch, den Preis des vorliegenden Werkes möglichst niedrig zu halten, sind Ursache gewesen, daß diesem Anhange keine größere Ausdehnung gegeben werden konnte.

1) Der vollständige Titel dieses Werkes ist: *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, par M. Navier.*

Ueber die einzelnen Abschnitte des vorliegenden Werkes dürfte noch Einiges zu bemerken sein. Die Lehre vom Widerstande der Materialien, welche der erste Abschnitt enthält und der eigentlich zunächst die im vierten Abschnitte enthaltene Theorie der Holz- und Eisenconstructions sich anschließt, beruhet auf jenen Grundsätzen von der Elasticität der Körper, welche jetzt wohl allgemein angenommen worden sind und so lange beizubehalten sein dürften, bis die vollständige Auflösung über die Wirkung der Molecularkräfte gegeben sein wird <sup>1)</sup>. Im Anhange sind diesen beiden Abschnitten besonders die Resultate der Versuche über die Tragkraft des Guß- und Schmiedeeisens hinzugefügt, welche von den englischen Ingenieuren in so ausgedehntem Maße angestellt worden sind und durch die es möglich geworden ist, ein solch erstaunliches Werk, wie die Britannia-Brücke zur Ausführung zu bringen. In theoretischer Hinsicht hat die Frage von dem Widerstande der Materialien gegen Stoß nur eben berührt werden können, und muß daher auf die Arbeiten Navier's und Poncelet's <sup>2)</sup> über diesen Gegenstand, so wie auf den Aufsatz des Herrn Professor Rühlmann in dem Freiburger Journale: der Ingenieur, die zweite Auflage von dessen Geodynamik und den ersten Band der Ingenieurmechanik von Weissbach verwiesen werden. Ein höchst wichtiger Gegenstand, der sich für den jetzigen Standpunkt der Sache unmöglich auf einem beschränkten Raume abhandeln ließ und daher unerörtert bleiben mußte, ist die Theorie der Kettenbrücken. Ich muß mich daher darauf beschränken, die vorzüglichsten Schriften hierüber anzuführen.

Navier, Mémoire sur les ponts suspendus. 4. Paris 1823, avec un atlas in-folio de 17 planches.

Schirch (Oberingenieur der k. k. Staatsseisenbahnen) Beitrag für den Kettenbrückenbau, enthaltend die Theorie der Schwan-  
kungen, Prag 1832.

Derselbe, Die Kaiser-Franzens-Kettenbrücke in Prag, deren Ent-

1) Man sehe: Navier, Mémoire sur l'équilibre des corps élastiques, in der vorhergehenden Angabe seiner Werke, und Poisson, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, in den Mémoires de l'Institut, Tome VIII, 1829, p. 357.

2) Man sehe die vorhergehende Angabe der Navier'schen Werke, III, 4; und Poncelet, Introduction à la mécanique industrielle. Paris 1830. pag. 385.

- wurf und Ausführung mit 16 lithographirten Detailsplänen. Prag 1842.
- Hoffmann (k. k. Bauinspector), der Bau der Kettenbrücken, begründet auf die Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte; für das praktische Bedürfniß ohne Hülfe der Differential- und Integralrechnung bearbeitet. Wien 1850.
- Mitis. Die Carlsbrücke in Wien (erste Stahl-Kettenbrücke in Wien), Wien 1829.
- Derselbe. Die Sophienbrücke. Wien 1833.
- Gersner. Handbuch der Mechanik, Bd. 1. (Namentlich über die Menai- und Hammersmith-Brücke). Prag 1836.
- Kulik, Die Kettenbrückenlinie. Prag 1849.
- Hann, Moseley and Hosking, The Bridges, London 1843. Supplement to Vol. I. On Mr. Dredge's system.
- Annales des ponts et chaussées. Die Jahrgänge 1832 bis 1835, 1839, 1841, 1842, 1844 und 1848 enthalten spezielle Monographien von ausgeführten Werken.

Im zweiten Abschnitt findet sich die Theorie des Erddruckes und der Futtermauern nach den Coulomb'schen Prinzipien entwickelt. Man wird vielleicht wünschen, diesen Gegenstand in größerer Allgemeinheit behandelt zu sehen, und es ist deshalb im Anhang ein Auszug aus den Poncelet'schen Untersuchungen<sup>1)</sup> beigegeben worden, wodurch der Fall erledigt wird, in welchem die Erde beliebig über die Mauerkrone ihrer Bekleidung hinaussteht, während die Säge über die Hebekraft der Erde (*butée des terres*) wegen der noch immer mangelnden Versuche weggelassen worden sind. Außerdem enthält der Anhang eine von François berechnete Tabelle über die Tiefe und die Böschungsanlagen von Erdaushebungen. Bei der Bestimmung des Druckmomentes der Erde gegen ihre Bekleidung (§. 231) weicht Navier von den übrigen neuern Schriftstellern über diesen Gegenstand, wie Prony, François, Audoy, Persy, Poncelet, Ardant u. darin ab, daß er die Integration zwischen den Grenzen 0 und  $h$ , statt zwischen

1) Poncelet, Mémoire sur la stabilité des revêtements de terre in No. 13 des *Mémorial de l'officier du génie*. Ins Deutsche übertragen von Herrn Lahmeyer.

$h'$  und  $h^1$ ) vornimmt. Ich habe mich indeß durch die von Navier hierfür angegebenen Gründe nicht überzeugen lassen können, und benutze daher diese Gelegenheit, um die von Prony und Français gefundenen Resultate, die jedoch nur in drei Fällen von den Navier'schen abweichen, mitzutheilen.

	Nach Navier:	Nach Prony u. Français:
§. 231 und ähnlich in	$\frac{h}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{h - \frac{3}{2} h'}{h - h'}$	$\frac{(2h + h')(h - h')}{6h \cos \varepsilon}$
§. 238.	$\frac{h}{3} \cdot \frac{h - \frac{3}{2} h'}{h - h'}$	$\frac{(2h + h')(h - h')}{6h}$

$$\text{§. 243. } \frac{1}{2} \omega t^2 \left\{ \frac{1}{3} h^2 (h - \frac{3}{2} h') \mp ah(h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}, \text{ Navier,}$$

$$\frac{1}{2} \omega t^2 \left\{ \frac{1}{6} (h - h')^2 (2h + h) \mp ah(h - h') \sin \varepsilon \cos \varepsilon \right\}, \text{ Prony u.}$$

wodurch sich denn auch die Formeln in den §§. 244 und 245 modificiren. Die Navier'schen Formeln stimmen mit den Français'schen natürlich überein, wenn die Cohäsion der Erde und damit  $h'$  gleich Null gesetzt wird, wie dies in den §§. 232, 236, 241, 246, 247 und 248 geschehen ist und auch in der Praxis in der Regel wird geschehen müssen. — Was die Reibung der Erde an der innern Seitenfläche ihrer Bekleidung anlangt, so ist dieselbe von allen Schriftstellern, die bis jetzt über den Erddruck geschrieben haben (mit Ausnahme Mosely's), im Allgemeinen wenig beachtet worden; dagegen hat Ardant vor Kurzem, in einem Aufsatze in dem *Mémorial de l'officier du génie*, Nr. 15, nachgewiesen, daß diese Reibung bei einem entsprechenden Mauerprofile von außerordentlichem Einflusse sein kann. Durch Anwendung des nach seiner Ansicht vortheilhaftesten Profiles (welches dem in Fig. 29 dargestellten ähnlich ist), hofft Ardant Futtermauern mit 30 pCt. weniger Material auführen zu können, als nach dem Baubau'schen Profile nöthig sein würde, und dieses Resultat ist um so merkwürdiger, da sich bei Vernachlässigung der erwähnten Reibung das ganz entgegengesetzte Profil (Fig. 30) als das vortheilhafteste herausstellt. Um sich über diesen Gegenstand bestimmt aussprechen zu können, wird man aber doch wohl erst die Ergeb-

1) Wo  $h$  die Höhe der Erdmasse und  $h'$  die Höhe, bis auf welche sich die Erde vertical absteigen läßt, bezeichnet.



nisse der Versuche abwarten müssen, welche Ardant anzustellen versprochen hat.

Der dritte Abschnitt enthält die Theorie der Gewölbe, welche ebenfalls auf die Principien Coulomb's basiert ist und der, im Anhange, die von Garidel berechneten Tabellen der Bruchwinkel und Horizontalschübe für Kreisgewölbe hinzugefügt worden sind, um die Anwendung der Theorie zu erleichtern. Die von Petit berechneten Tabellen, welche man in einigen neuern technischen Werken findet, sind nur deshalb nicht aufgenommen worden, weil einerseits sich dieselben nur auf Kreisgewölbe ohne Belastung im Scheitel und solche mit tangentialer Hintermauerung beziehen, welche Fälle sich dem Civil-Ingenieur selten in der Praxis darbieten dürften; und andererseits sie zum Theil auch in den Garidel'schen Tabellen enthalten sind. Eine noch weitere Entwicklung der Coulomb'schen Gewölbe-Theorie, besonders was die Ausführung der Rechnungen anlangt, haben Audoy im *Mémorial de l'officier du génie* Nr. 4, Persy in seinem *Cours de Construction*, und eine graphische Auflösung hat Poncelet in Nr. 12 des *Mémorial* gegeben. Unter den Gelehrten, welche einen andern Weg als den Coulomb'schen versucht haben, gehen die älteren meist von der Theorie des Keiles aus, deren Unanwendbarkeit auf das Gleichgewicht der Gewölbe jetzt durch die Erfahrung hinlänglich erwiesen ist; die neuern hingegen suchen die Beantwortung der Gleichgewichtsfragen durch die Betrachtung einer sogenannten Mittellinie des Druckes (Stüglinie u.) zu gewinnen. Zu den letzten gehören in Deutschland (außer Gerstner) besonders Hagen<sup>1)</sup>, Pauli, dessen Methode an Gutton's *Principles of Bridges* erinnert<sup>2)</sup> und Schubert<sup>3)</sup>. Am besten und vollständigsten ist dieser Gegenstand von Moseley<sup>4)</sup> bearbeitet. Bei der im Anhange mitgetheilten Darstellung, die übrigens nur dazu bestimmt ist, eine Idee von der Sache zu geben, bin ich Méry gefolgt, und zwar einmal

1) Ueber die Form und Stärke der gewölbten Bogen. Berlin 1844.

2) Die Pauli'sche Methode wurde zuerst von Bauernfeind in der Eisenbahnzeitung, Jahrgang 1846, bekannt gemacht.

3) Theorie der Construction steirnerer Wagenbrücken, 1846.

4) The Theory, Practice and Architecture of Bridges, by Hans. Moseley and Hosking, 1843. Die Abtheilung: Professor Moseley's Theory of the Arch. Frühere hierher gehörende Aufsätze von Moseley findet man in den Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Weniger ausführlich ist die Theorie in dessen Principles of Engineering and Architecture entwickelt.

aus dem Grunde, weil die Arbeit von Méry <sup>1)</sup> unter den neuern eine der frühesten ist und doch in Deutschland ganz unbeachtet geblieben zu sein scheint, und zweitens, weil darin besonders hervorgehoben wird, daß die Resultante aus den auf einen Gewölbtheil wirkenden Kräften im Allgemeinen keinesweges eine Tangente der Mittellinie des Druckes ist, was mir einige Schriftsteller ohne Grund anzunehmen schienen. Auf eine eigenthümliche Weise hat in jüngster Zeit Yvon Villarceau die Frage vom Gleichgewichte der Gewölbe behandelt, und seine Methode hat sich des schmeichelhaftesten Beifalles der Pariser Academie (und ins Besondere des der Herrn Poncelet, Piobert und Lamé, welche von der Academie mit der Prüfung dieser neuen Theorie beauftragt waren) zu erfreuen gehabt. Die Villarceau'sche Arbeit, von der leider wegen Mangel an Raum kein Auszug mitgetheilt werden konnte, ist von der Academie in die Sammlung der Mémoires des savants étrangers, 1846 aufgenommen worden. Als eine wichtige Erweiterung der Lehre vom Gleichgewichte der Bauconstructionen muß endlich noch die Theorie der schiefen Gewölbe angesehen werden, die ebenfalls ganz der jüngsten Zeit angehört, und auf welchen Gegenstand ein näheres Eingehen aus den gleichen Gründen, wie den obigen, unterbleiben mußte. Die betreffende Literatur mag hier indeß angeführt werden.

W. Whewell, *The Mechanics of Engineering*, Cambridge 1841.  
Sect. III. *The equilibrium of oblique arches.*

Hart, *The oblique arches*, London 1839. Auch Deutsch in  
Hombert's Bauzeitung, 7. Band.

Buck, *Essay on oblique arches*, London 1839.

G. Heider (Inspektor der k. k. Staats-Eisenbahnen) *Theorie der schiefen Gewölbe und deren praktischer Ausführung*, Wien 1846.

Schubert, *Theorie der Construction steinerner Bogenbrücken*,  
Dresden 1846, Theil I., Seite 106. —

Schließlich benutze ich diese Gelegenheit, um sowohl der Verlags-handlung, wie dem Herrn Senator Culemann (aus dessen Druckerei das vorliegende Werk hervorgegangen ist) meinen Dank dafür auszusprechen, daß diesem Werke auch eine äußere Ausstattung geworden ist, die dem Verdienste seines ausgezeichneten Verfassers so sehr entspricht, und wohl kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte.

Hannover, im October 1850.

G. Westphal.

1) *Annales des ponts et chaussées*, 1840.

## Vorrede des Verfassers.

Galilei verdanken wir die ersten Versuche, um den Widerstand der Körper gegen die Einwirkung äußerer Kräfte dem Calcul zu unterwerfen, und Jacob Bernoulli, Leibniz, Euler, Lagrange haben verschiedene darauf bezügliche Fragen behandelt. Versuche über die Stärke der Materialien sind in großer Zahl angestellt worden, unter denen besonders die von Buffon hervorgehoben zu werden verdienen. Coulomb endlich hat zuerst die richtigen Grundbedingungen des Gleichgewichts für Gewölbe und Futtermauern aufgestellt.

Aus jenen Untersuchungen hat indeß bis jetzt die Mathematik mehr Nutzen gezogen, als die Architectur und das Ingenieurwesen. Die meisten Constructeure bestimmen die Dimensionen der Theile von Bauwerken oder Maschinen nach dem herrschenden Gebrauche und nach dem Muster ausgeführter Werke; sie legen sich selten Rechenschaft ab über den Druck, welchen jene Theile aushalten müssen und über den Widerstand, welchen sie demselben entgegensetzen. Dies mag wenig Nachtheile haben, so lange die auszuführenden Werke denen analog sind, welche man zu jeder Zeit errichtet hat, und sie, was die Dimensionen und die Belastungen anbetrifft, innerhalb der gewöhnlichen Grenzen bleiben. Aber man kann nicht mehr auf dieselbe Weise verfahren, wenn die Umstände dazu nöthigen, jene Grenzen zu überschreiten, oder, wenn es sich um Bauwerke ganz neuer Art handelt, über welche die Erfahrung noch keine Resultate gesammelt hat.

Das vorliegende Werk soll die Bedingungen angeben für die Errichtung solcher Anlagen, welche unter Leitung von Ingenieuren geschehen; auch soll es in den Stand setzen, den Grad des Wider-

standes für die einzelnen Theile zu bestimmen. Besonders ist auf die Holzconstruktionen Rücksicht genommen worden, da man über diese so wenig Details in den darauf bezüglichen Werken findet. Wir glauben hier kurz die Grundsätze angeben zu müssen, welche wir bei der Behandlung der wichtigsten Fragen zum Grunde gelegt haben.

Wir betrachten in den Materialien zwei Haupteigenschaften, die Elasticität und die Cohäsion. Unter Elasticität versteht man den Widerstand, welchen ein Körper leistet, wenn man ihn um eine sehr kleine Größe verlängern oder verkürzen will. Setzt man einen prismatischen Körper voraus, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, so nennt man das Verhältniß zwischen dem Gewichte, welches in der Längeneinheit dieses Körpers durch Zug oder Druck wirkt, und dem (auf die Längeneinheit reducirten) Bruche, welcher die dadurch herbeigeführte Verminderung der ursprünglichen Länge ausdrückt, das Maß der Elasticität oder den Elasticitätsmodul; diese Größe ist in §. 77 durch *E* bezeichnet. Unter Cohäsion versteht man die Kraft, deren es bedarf, um die Theile eines Körpers zu trennen, sei es durch Ausdehnen oder Zusammendrücken. Das Gewicht, welches auf die eine oder die andere Weise die Trennung hervorbringt bei einem Körper, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, heißt das Maß der Cohäsion; diese Größe ist in §. 113 durch *R* bezeichnet.

Die Elasticität und die Cohäsion müssen für die verschiedenen Materialien durch Versuche bestimmt werden; wir haben uns bemüht, alle Resultate dieser Art zu sammeln, welche von einiger Anwendbarkeit zu sein schienen.

Ist die Elasticität bekannt, so ist man im Stande, die Größe zu bestimmen, um welche ein Stück der Construktion sich verkürzen, verlängern oder biegen wird bei einer gegebenen Belastung. Ist die Cohäsion bekannt, so kann man die Grenze des Gewichtes bestimmen, welches ein Körper noch tragen kann. Aber dies genügt nicht dem Constructeur, da es sich nicht darum handelt, das Gewicht zu kennen, welches einen Körper zertrümmern würde, sondern darum, die Belastung zu erfahren, welche ein Körper noch zu tragen vermag, ohne daß die Veränderung, welche er erleidet, mit der Zeit zunehme. Die Auffuchung dieser letztern

Grenze kann selten der Gegenstand directer Versuche werden, aber man kann sich mit Vortheil der Beispiele bedienen, welche die ausgeführten Constructionen liefern.

Wir sehen, daß die Theile des Materials, welche den einwirkenden Kräften nachgeben, sich verkürzen oder sich verlängern, und nehmen dann das Verhältniß dieser Längenveränderung (zur Längeneinheit) als Maß an für den Grad, bis zu welchem jene Theile der nachtheiligen Einwirkung erlegen sind. Die größten Längenveränderungen, welche uns die verkürzten oder verlängerten Fasern bei ausgeführten Constructionen zeigen, deren Solidität die Erfahrung dargethan hat, betrachten wir als Grenzen, welche man wohl erreichen, aber nicht ohne Gefahr überschreiten darf. Diesen letztern Längenveränderungen entsprechen Kräfte, welche sie durch einen directen Zug oder Druck würden hervorbringen können. Man betrachtet diese Kräfte als die größten, denen die Fasern oder kleinsten Theile des Stückes noch widerstehen können, und hält bei der Errichtung neuer Constructionen ein Stück für dem Bruche nahe, wenn es die Einwirkung dieser Kräfte erleidet. Auch kann man die Formeln, welche sich auf den Bruch beziehen, zur Berechnung der Dimensionen anwenden, wenn man für  $R$  einen weit kleinern Werth  $R'$  setzt (siehe S. 181).

Wir wollen ein Beispiel solcher Berechnungen geben. Der Elasticitätsmodul für Schmiedeeisen ist  $E = 20000000000$  Kil., d. h. wirkte dieses Gewicht in der Längsaxe eines Prisma's, dessen Querschnittsfläche gleich einem Quadratmeter ist, so würde es das Prisma bis auf seine doppelte Länge ausdehnen, oder bis auf seine halbe Länge zusammendrücken, indem man die Längenveränderungen stets den Gewichten proportional setzt, welche sie hervorbringen. Die Cohäsion desselben Materials ist  $R = 40000000$  Kil., denn ein solches Gewicht würde ein ähnliches Prisma durch einen Zug in der Längsaxe zerreißen. Man nimmt endlich an, daß bei Schmiedeeisen die Elasticitätsgrenze überschritten sei, sobald die Fibern um mehr als 0,0005 verlängert oder verkürzt sind, und da diese Längenveränderung durch ein Gewicht von 10000000 Kil. per Quadratmeter hervorgebracht wird, so legt man diesen Werth der Constanten  $R'$  bei. Eine schmiedeeiserne Barre wird daher als zu sehr belastet angesehen, wenn die am

meisten gedehnten oder zusammengebrückten Fasern eine Belastung von mehr als 10 000 000 Kil. per Quadratmeter tragen (siehe §§. 182 und 183).

Ist dies festgestellt, so beschränkt sich Alles darauf, in jedem einzelnen Falle den Einfluß aufzusuchen, welchen die einwirkenden Kräfte auf eine Verlängerung oder Verkürzung der Constructionstheile ausüben, mögen sie nun durch einen directen Zug oder Druck in der Längsaxe des Körpers oder in einer schiefen oder normalen Richtung gegen dieselbe wirken; im letztern Falle wird der Körper gezwungen, sich zu biegen und daher verlängern sich die Fibern an der convexen Seite, während sie sich an der concaven verkürzen. Die Regeln, welche man früher für das Gleichgewicht elastischer Körper gegeben hat, konnten nur in sehr wenigen Fällen Anwendung finden; jetzt indeß hat man durch die Auflösung der neuen oben angegebenen Fragen das Mittel, um sich über die Stärke der Haupttheile einer Holzconstruction mit derselben Leichtigkeit und Genauigkeit Rechenschaft abzulegen, wie über die Stärke der Ketten einer Hängebrücke.

Das Hauptelement in den Berechnungen ist die Angabe der Grenzen, bis zu welchen man bei der Belastung der verschiedenen Materialien gehen darf. Diese Angabe liefert uns nur die Erfahrung über die bestehenden Bauwerke, sie wird daher keine strenge Genauigkeit darbieten können. Es wird also einige Differenzen geben können zwischen den Zahlen, welche von den verschiedenen Personen angenommen werden. Die Zeit und die Vereinigung einer großen Zahl von Beobachtungen können allein die Ansichten über diesen Punkt fixiren.

Die Regeln für das Gleichgewicht der Gewölbe und der Futtermauern findet man schon in andern Werken niedergelegt; es ist in denselben jedoch nicht wie in diesem Werke auf die Möglichkeit Rücksicht genommen, daß Rostrennungen und Risse in den Mauern und Widerlagern entstehen, welche man gewöhnlich wie aus einem Stücke bestehend ansah.

Die Ingenieure verfolgen, wenn sie die Entwürfe zu den von ihnen geleiteten Arbeiten machen, gewöhnlich einen Weg, wie den, welchen man in der Mathematik die Methode der Regula falsi nennt; d. h. nachdem das Project eines Werkes entworfen und

ausgezeichnet ist, untersuchen sie, ob sie allen Bedingungen genügt haben, und verbessern ihren Entwurf so lange, bis dies geschehen ist. Unter diesen Bedingungen ist die Dekonomie eine der wesentlichsten; die Solidität und die Dauerhaftigkeit sind nicht weniger wichtig. Mit Hülfe der Regeln, die in diesem Werke entwickelt sind, wird man in allen Fällen die Grenzen bestimmen können, die man nicht überschreiten darf, ohne das Bauwerk einem Mangel an Solidität auszusetzen. Man darf indeß nicht folgern, daß man aus Rücksichten der Dekonomie stets diesen Grenzen nahe kommen müßte. Die Verschiedenheit, welche unter den Materialien herrscht, und auch andere Gründe treten dem entgegen; die Kunst besteht darin, daß man beurtheilt, bis zu welchem Punkte man sich der Grenze nähern darf.

1875. Ausgabe nach dem in 1874 erschienenen, von dem  
Verfasser selbst als „Lehrbuch der Festigkeitslehre“ bezeichneten, und  
unter dem Titel „Lehrbuch der Festigkeitslehre“ herausgegebenen, zweiten  
Theile des „Lehrbuchs der Festigkeitslehre“, welches in der  
Verlagsanstalt von J. Neumann, Neudamm, erschienen ist.  
Dieses „Lehrbuch der Festigkeitslehre“ ist ein Werk, welches  
sich nicht nur dem Ingenieur, sondern auch dem Architekten  
empfehlen lässt, und welches in jeder Hinsicht als ein  
unverzichtbares Hilfsmittel für den Praktiker zu betrachten  
ist. Es enthält eine große Anzahl von Formeln, die für die  
Berechnung der Festigkeit der verschiedenen Materialien  
benutzt werden können, und eine große Anzahl von  
Beispielen, die die Anwendung dieser Formeln zeigen.  
Das Werk ist in drei Theile gegliedert: der erste Theil  
enthält die allgemeinen Grundsätze der Festigkeitslehre,  
der zweite Theil die Festigkeit der verschiedenen  
Materialien, und der dritte Theil die Festigkeit der  
verschiedenen Bauwerke.

# Inhalt.

<b>Erster Abschnitt. Widerstand der Materialien</b> .....	<b>Seite</b> <b>1</b>
<b>Erstes Kapitel. Widerstand der Materialien gegen eine Kraft, welche sie zu zerdrücken strebt</b> .....	<b>2</b>
Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Zerdrücken.....	—
Widerstand des Gypses.....	7
Widerstand des Mörtels.....	—
Widerstand der Hölzer.....	—
Widerstand des Schmiedeeisens.....	8
Widerstand des Gußeisens.....	—
Widerstand verschiedener Metalle.....	9
<b>Zweites Kapitel. Widerstand der Materialien gegen eine in ihrer Längsrichtung wirkende Kraft, welche strebt, dieselben zu verlängern und zu zerreißen</b> .....	<b>10</b>
Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Ausdehnung (Zerreißen).....	—
Widerstand des Gypses.....	11
Widerstand des Mörtels.....	—
Widerstand der Hölzer.....	12
Widerstand des Schmiedeeisens.....	14
Widerstand des Eisenblechs.....	23
Widerstand des Eisendrahtes.....	24
Widerstand des Gußeisens.....	26
Widerstand des Kupferdrahtes.....	28
Widerstand verschiedener Metalle.....	—
Widerstand des Glases.....	30
Widerstand der Hanfseile.....	—
<b>Drittes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen Biegung, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längsaxe dieses Körpers ist</b> .....	<b>33</b>
Widerstand der Steine gegen Biegung.....	43
Widerstand der Hölzer.....	—
Widerstand des Schmiedeeisens.....	48
Widerstand des Stahls.....	51
Widerstand des Gußeisens.....	53



<b>Viertes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längensare dieses Körpers ist</b> . . . . .	55
Widerstand der Steine und Ziegel gegen den Bruch . . . . .	63
Widerstand des Mörtels . . . . .	64
Widerstand der Hölzer . . . . .	—
Widerstand des Gußeisens . . . . .	71
Theorie des Widerstandes gegen den Bruch nach Galilei und nach Mariotte und Leibniz . . . . .	76
Bemerkung über die Theorie des Widerstandes gegen den Bruch	77
Bruch eines prismatischen Körpers von sehr geringer Länge . . . . .	—
<b>Fünftes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen die Torsion</b> . . . . .	81
Widerstand des Schmiedeeisens gegen die Torsion . . . . .	84
Widerstand verschiedener Materialien . . . . .	86
<b>Sechstes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch durch die Torsion</b> . . . . .	87
Widerstand des Gußeisens gegen den Bruch durch die Torsion	90
<b>Siebentes Kapitel. Maximum des Widerstandes, welchen man in der Praxis von den Materialien mit Sicherheit erwarten darf</b> . . . . .	92
Widerstand der Steine gegen Zerdrücken . . . . .	—
Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung	94
Widerstand der Hölzer gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längensare gerichtete Kraft . . . . .	—
Widerstand des Schmiedeeisens gegen Ausdehnung . . . . .	95
Widerstand des Schmiedeeisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längensare gerichtete Kraft . . . . .	96
Widerstand des Gußeisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung . . . . .	—
Widerstand des Gußeisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längensare gerichtete Kraft . . . . .	97
<b>Zweiter Abschnitt. Gleichgewicht und Widerstand der Körper, welche aus adhärirenden Materialien bestehen. Construction der Futtermauern</b> . . . . .	98
<b>Erstes Kapitel. Gleichgewicht eines Erdkörpers, der nach einer Seite hin ohne Stützfläche ist und von einer Ebene begrenzt wird</b> . . . . .	—
<b>Zweites Kapitel. Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, der von zwei Seitenebenen begrenzt wird und auf dessen horizontaler Oberfläche eine Last gleichförmig vertheilt ist</b> . . . . .	101
<b>Drittes Kapitel. Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, gegen dessen eine Seitenfläche eine Kraft wirkt</b> . . . . .	103
Erster Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Gleiten erfolgt . . . . .	104
Zweiter Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Umsturz erfolgt . . . . .	109
Ueber den Druck, den die Theile des Körpers erleiden, und den Wider-	

	Seite
Stand, welchen diese leisten müssen, um nicht zerdrückt zu werden .....	111
Körper von gleichem Widerstande gegen den Bruch durch Umsturz .....	112
Versuche über den Widerstand des Mauerwerkes gegen den Bruch durch Umsturz .....	113
<b>Viertes Kapitel. Berechnung der Futtermauern, welche dem Erd- und Wasserdrucke widerstehen .....</b>	<b>114</b>
Druck der Erde gegen eine ebene Wand .....	—
Druck der Erde gegen eine ebene Wand, wenn dieselbe eine auf ihrer Oberfläche gleichförmig vertheilte Last trägt .....	118
Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke widersteht ..	119
Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, daß eine Drehung der ganzen Mauer um die äußere Kante ihrer Basis erfolgen könne .....	122
Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, daß ein Fortgleiten der Mauer auf ihrem Fundamente erfolgen könne .....	124
<b>Fünftes Kapitel. Berechnung der Fundamente, wenn die Mauern auf einem zusammendrückbaren Grunde stehen ..</b>	<b>126</b>
<b>Sechstes Kapitel. Verschiedene Eigenschaften der Erdarten. Bestimmung des spezifischen Gewichtes, der Reibung und der Cohäsion .....</b>	<b>127</b>
Aufgelockerte Erde, deren kleine Theilchen keinen Zusammenhang mehr besitzen .....	128
Im natürlichen Zustande befindliche Erde .....	133
Einfluß des Wassers, welches die Erde durchdringt .....	—
Erde, welche aus Schichten besteht, deren Eigenschaften sich mit der Höhe der Bekleidung ändern .....	134
Reibung und Cohäsion des Mauerwerkes .....	—
<b>Dritter Abschnitt. Theorie der Gewölbe .....</b>	<b>137</b>
<b>Erstes Kapitel. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbsteinen .....</b>	<b>138</b>
Anwendung auf ein scheidrechtcs Gewölbe .....	142
Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbsteinen, deren Fugen sämmtlich normal auf der innern Wölblinie stehen .....	144
Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur innern Wölblinie gerichtet sind .....	146
Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sich auf das eigene Gewicht der Gewölbsteine beschränken .....	147
<b>Zweites Kapitel. Die wichtigsten Versuche und Beobachtungen über das Gleichgewicht der Gewölbe .....</b>	<b>148</b>
<b>Drittes Kapitel. Spezielle Berechnung der Gewölbe .....</b>	<b>154</b>
Gleichgewicht der Tonnengewölbe .....	—
Normaldruck der Tonnengewölbe zwischen den Fugen .....	161

Ueber den Gebrauch eiserner Durchzüge zur Verstärkung der Donnengewölbe .....	165
Gleichgewicht der Kuppelgewölbe .....	169
Ueber den Gebrauch eiserner Ringe zur Verstärkung der Kuppel- gewölbe .....	171
Gleichgewicht der Kloster- und Kreuzgewölbe .....	172
<b>Viertes Kapitel. Bemerkungen über einige bei den Gewöl- ben vorkommenden Rechnungen .....</b>	<b>173</b>
<b>Vierter Abschnitt. Theorie der Holz- und Eisenconstructions</b>	<b>176</b>
<b>Erstes Kapitel. Gleichgewicht eines horizontalen, prismati- schen Stabes bei verschiedener Unterstüßung und Belastung</b>	<b>177</b>
Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der in einem beliebigen, zwischen den Stützen liegenden Punkte belastet ist .....	178
Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der auf einem Theile seiner Länge belastet ist .....	180
Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, des- sen eines Ende festgehalten wird, während das andere Ende auf einer Stütze frei aufliegt .....	182
Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, der an beiden Enden festgehalten wird .....	185
Gleichgewicht eines von drei oder mehr Stützen getragenen Stabes .....	187
Bemerkungen über die Benützung der vorhergehenden Resultate in der Praxis .....	190
<b>Zweites Kapitel. Widerstand eines verticalen, prismatischen Stabes, dessen obere Endfläche belastet wird .....</b>	<b>—</b>
Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben frei ist	193
Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben gezwungen wird, mit dem untern in derselben Verticalen zu bleiben .....	194
Versuche über den Widerstand vertical belasteter Holzstäbe .....	195
Versuche über den Widerstand vertical belasteter Stäbe aus Schmiedeeisen .....	198
Versuche über den Widerstand gußeiserner Stäbe, die in der Richtung ihrer Länge zusammengebrückt wurden .....	199
Bemerkungen über die Benützung der vorhergehenden Resultate in der Praxis .....	200
<b>Drittes Kapitel. Widerstand eines vertical belasteten Stabes, wenn die Kraft parallel mit der Axe desselben wirkt ....</b>	<b>202</b>
<b>Viertes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Stabes, wenn mit der Axe desselben die Richtung der Kraft einen     schiefen Winkel einschließt .....</b>	<b>206</b>
Gleichgewicht eines geneigten Stabes, wenn derselbe zwischen seinen Enden belastet ist .....	212
<b>Fünftes Kapitel. Widerstand eines gebogenen, prismatischen</b>	

	Seite
<b>Stabes, der horizontal zwischen zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird</b> .....	214
<b>Sechstes Kapitel. Widerstand eines prismatischen Stabes mit bogenförmiger Ase</b> .....	217
Untersuchung der Stäbe, die nach der Gleichgewichtscurve geformt sind .....	—
Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur Ase gerichtet sind .....	218
Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich vertical gerichtet sind .....	219
Biegung der Stäbe mit bogenförmiger Ase .....	224
Anwendung auf den Fall, in welchem die Ase des Stabes ein Parabelbogen ist .....	227
Anwendung auf den Fall, in welchem die Ase des Stabes ein Kreisbogen ist .....	229
Biegung eines bogenförmigen Stabes, der auf seiner ganzen Länge belastet ist .....	232
Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Ase des Stabes ein Parabelbogen ist .....	233
Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Ase des Stabes ein Kreisbogen ist .....	235
Bemerkungen über die Benutzung der vorübergehenden Resultate in der Praxis .....	237
Einfluß des Druckes oder der Spannung in der Ase der bogenförmigen Stäbe auf eine Veränderung ihrer Länge und ihrer Form .....	241
Versuche und Beobachtungen über den Widerstand einfacher Stäbe mit bogenförmiger Ase .....	245
<b>Siebentes Kapitel. Ueber die verschiedenen Formen, in denen einfache Stäbe bei Constructionen vorkommen. Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind</b> .....	246
Ueber die zweckmäßigste Gestalt des Querschnittes .....	247
Ueber die zweckmäßigste Gestalt des Längenschnittes .....	250
Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind .....	255
Versuche über den Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind .....	258
Ueber die Eisenconstructionen, welche zur Verlängerung der Stäbe oder zur Verbindung solcher Stäbe dienen, die in derselben Längsrichtung liegen .....	260
<b>Achstes Kapitel. Die einfachsten Holzconstructionen, welche zum Tragen und Aufziehen von Lasten dienen</b> .....	262
Gleichgewicht der Krähne .....	283
<b>Neuntes Kapitel. Widerstand der Schleusenthore</b> .....	287
Wirkung der Schwere auf die Schleusenthore .....	—
Untersuchung des Falles, in welchem die Schleusenthore zum Theil von einer Rolle getragen werden .....	290
Wirkung des Wasserdruckes auf die Schleusenthore .....	292
Gleichzeitige Wirkung der Schwere und des Wasserdruckes auf die Schleusenthore .....	295

	Seite
Gekrümmte Schleusenthore .....	296
<b>3. heutes Kapitel. Widerstand der hölzernen und eisernen Brücken</b> .....	298
Von den Brücken, welche von Balken und Streben getragen werden .....	—
Wirkung der von Balken und Streben getragenen Brücken auf die Pfeiler oder Widerlager .....	308
Von den Brücken, welche von Bögen getragen werden .....	309
Sicherung der Rippen vor dem Ausweichen .....	316
<b>4. lftes Kapitel. Widerstand der Lehrgerüste, welche zur Construction der Gewölbe dienen</b> .....	317
Druck der Gewölbesteine auf die Lehrgerüste .....	—
Anordnung der Lehrgerüste .....	320
<b>5. wölftes Kapitel. Widerstand der Fußböden</b> .....	323
Biegung und Bruch elastischer Ebenen .....	327
Praktische Regeln für die Anordnung der Fußböden .....	330
<b>6. reizehntes Kapitel. Widerstand der Wände eines Gefäßes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit</b> .....	331
Gleichgewicht einer Linie, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Linie stehen .....	332
Gleichgewicht einer Fläche, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Fläche stehen .....	335
Gleichgewicht einer Fläche, die von Normalkräften sollicitirt und nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt wird .....	338
Anwendungen auf Gefäße von verschiedener Gestalt .....	341
Versuche über den Widerstand der Wände eines Gefäßes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit .....	347

## A n h a n g.

<b>1. Widerstand der Materialien und Zusätze zur Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen</b> .....	349
Versuche über den Widerstand der Materialien gegen Zerbrücken. Tragkraft von Säulen und Ständern .....	—
Versuche über die beste Form des Querschnittes für horizontale Balken aus Guß- und Schmiedeeisen .....	351
Versuche über den Einfluß der Zeit und der Temperatur auf den Widerstand der Materialien (besonders des Eisens) ..	357
Versuche über den Widerstand der Eisendräthe gegen Ausdehnung	363
Versuche über die Tragkraft von Drath- und Hanfseilen und Kettentauern .....	365
Versuche über die Haltkraft von Schrauben und Nägeln in Hölzern .....	368
Widerstand der Materialien gegen den Stoß .....	370
Bestimmung des Elasticitätsmoduls aus den Längenschwingungen eines Stabes .....	373
Gleichgewicht eines von drei und mehr Stützen getragenen Stabes. Druck des Stabes auf seine Stützpunkte .....	377
Die wichtigsten Resultate aus den Untersuchungen von Urbant über die Sprengwerke von großer Spannweite .....	379

	Seite
<b>II. Zusätze zu der Theorie des Erddruckes</b> .....	381
Druck einer Erdmasse, welche die Mauerkrone ihrer Bekleidung beliebig überragt, nach Poncelet .....	—
Tabellen für die Stärke von Futtermauern .....	385
Transformation der Profile .....	387
Berechnung von Erdaushebungen (Tabelle von Français) ..	388
<b>III. Zusätze zu der Theorie der Gewölbe</b> .....	390
Tabellen von Garidel für die Bruchwinkel und die Horizon- talschübe von Kreisgewölben .....	—
Von der Mittellinie des Druckes bei einem Gewölbe .....	401
<b>IV. Vergleichung der Maße und Gewichte verschiedener Länder</b>	406
Vergleichung von Längenmaßen .....	—
Vergleichung von Gewichten .....	408

### Verbesserungen.

- Seite 6 Seite 4 v. o. statt *beiden*, lese man: *beith*.  
Seite 26 am Kopfe der Tabelle; statt Nummer d. Gewichte, lese man: Nummer der Drähte.  
Seite 61 Seite 9 v. o. statt durch *p* die Belastung *zc.*, lese man: durch *p* die Belastung  
der Längeneinheit bezeichnet wird, so hat man *pa* und *pa tang α* als die verticale und  
horizontale Componente des Druckes, welchen die Stützen erleiden.  
Seite 103 Seite 4 des §. 198, statt *findet*, lese man: *besteht*.  
Seite 111 Seite 9 v. u. statt Kante *AG*, lese man: Kante *A*.  
Seite 112 Seite 1 des §. 220, statt Curve *DE*, lese man: Curve *BE*.  
Seite 116 in der Note, statt *Marion*, lese man: *François*.  
Seite 117 letzte Seite der Note, statt den Anhang, lese man: der Anhang u. die Vorrede  
des Uebersetzers.  
Seite 245 erste Seite der Note 2), statt *Nro. 42*, lese man: *Nro 12*.  
Die Zusätze, wegen welcher in den Noten auf Seite 111 und 133 auf den Anhang  
verwiesen ist, haben wegen Mangel an Raum später nicht aufgenommen werden können.

# Ingenieurmechanik.

## Erster Abschnitt.

### Widerstand der Materialien.

§. 1. Ein fester Körper widersteht einer Kraft, die ihn zu biegen oder seine Theile zu trennen sucht. Bei der Auffindung der Gesetze, denen diese Eigenschaft unterworfen ist, kann man sich zwei Hauptaufgaben stellen: 1) zu ermitteln, ob ein Körper, dessen Figur und Belastung gegeben sind, sich biegen oder brechen wird, und um welche Größe dies im erstern Falle geschehen wird; 2) die Figur eines Körpers so zu bestimmen, daß er bei dem geringsten Volumen einer gegebenen Belastung den größten Widerstand leistet, welcher möglich ist.

Die Körper scheinen aus Theilen oder Moleculen zusammengesetzt zu sein, die in gewissen Entfernungen von einander durch entgegengesetzte Kräfte gehalten werden, die sich gegenseitig aufheben. Die eine dieser Kräfte ist eine Attractivkraft, die den Moleculen der Körper eigenthümlich ist; die andere ist eine Repulsivkraft, die durch die Wärme hervorgerufen wird. Die Wechselwirkung dieser Kräfte liefert über die vorzüglichsten Erscheinungen Aufschluß, die bei dem Versuche, die Gestalt eines Körpers zu ändern, stattfinden, und es leuchtet ein, daß man durch die Betrachtung der genannten Kräfte die directe Auflösung der Probleme zu suchen hat, welche sich auf die Festigkeit der Körper beziehen.

Die allgemeinen Untersuchungen, welche sich auf diese Begriffe stützen, sind zu verwickelt, als daß man sie in einem elementaren

Cursus lehren könnte; wir beschränken uns darauf, einfache und brauchbare Resultate aus Hypothesen abzuleiten, deren Richtigkeit durch zahlreiche Vergleichen mit Beobachtungen bestätigt ist.

§. 2. Um den Ideen eine bestimmtere Richtung zu geben, wollen wir ein Prisma betrachten. Auf diesen Körper können verschiedene Kräfte wirken, unter denen wir besonders unterscheiden:

1. Eine in der Längenrichtung des Körpers wirkende Kraft, welche denselben zusammendrückt. Der Körper kann nachgeben, entweder, indem er zerdrückt (zerquetscht) wird, oder auch, indem er sich biegt und bricht, wenn seine Länge groß genug ist in Bezug auf die Dimensionen des Querschnitts.

2. Eine in der Längenrichtung des Körpers wirkende Kraft, welche denselben ausdehnt. Der Körper kann nachgeben, indem er sich verlängert, oder indem er zerreißt durch eine Trennung der Molecüle in einem der Querschnitte.

3. Eine rechtwinklig gegen die Länge des Körpers gerichtete Kraft. Der Körper giebt nach, indem er sich biegt, so daß die der concaven Oberfläche näher liegenden Theile ausgedehnt, und die der concaven Oberfläche näher liegenden Theile zusammengebrückt werden. Der Bruch tritt ein, wenn die Ausdehnung oder Zusammenbrückung groß genug ist, um eine Trennung der Theile durch Zerreißen oder durch Zerquetschen zu bedingen.

4. Eine Kraft, welche den Körper zu drehen strebt.

## Erstes Kapitel.

### Widerstand der Materialien gegen eine Kraft, welche sie zu zerdrücken strebt.

§. 3. Was sich über diesen Gegenstand sagen läßt, beschränkt sich hauptsächlich auf die Anführung der Ergebnisse der Versuche, die man mit den verschiedenen Materialien angestellt hat. Die folgenden Angaben beziehen sich nur auf Körper, deren Länge im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnitts zu gering ist, als daß sie sich biegen könnten.

### Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Zerdrücken.

§. 4. Aus den Versuchen über den Widerstand der Steine gegen Zerdrücken hat man die folgenden allgemeinen Anzeichen gefunden. Die physischen Eigenschaften der Steine, wie die Härte, das spezifische Gewicht, die Farbe, können uns kein genaues Urtheil über die Festigkeit verschaffen; man erhält dies nur durch specielle Versuche. Gleichwohl sind bei den Steinen von gleicher Art die di-



resten Theile auch die festesten. Man unterscheidet unter den Steinen in Bezug auf die Weise, wie sie dem Drucke nachgeben, zwei Hauptarten. Die harten Steine mit feinem Korn und gleichartigem und festem Gefüge zerfallen unter Geräusch in kleine, verticale Splitter, bevor sie gänzlich zermalmt werden. Die weichen Steine zertheilen sich zuerst in Pyramiden, deren Grundfläche die Seiten des Körpers bilden, und deren Spitzen sich im Mittelpunkte desselben befinden; die beiden verticalen Pyramiden wirken wie Keile und trennen dadurch die übrigen; sie zerpalten sich sammtlich in kleine verticale Prismen und diese werden endlich auch gänzlich zermalmt. Einige Steine, die bei den Versuchen einen größeren Widerstand leisten, als andere, können bei einer Construction leichter zerspringen, wenn sie nicht in der ganzen Ausdehnung der Fuge einen sehr gleichmäßigen Druck erfahren.

Die Kraft, welche es erfordert, um ein Steinprisma zu zerdrücken, ist für ähnliche Figuren dem Flächeninhalt des Querschnitts proportional; sie nimmt ab, wenn der Umfang dieses Schnitts in Bezug auf den Inhalt zunimmt, und ist am größten, wenn der Querschnitt ein Quadrat oder ein Kreis ist. 1)

Was den Einfluß des Verhältnisses der Höhe zur Fläche des Querschnitts anbelangt, so ist die zum Zerdrücken erforderliche Kraft am größten, wenn der Stein die Gestalt eines Würfels hat. Diese Kraft nimmt ab in dem Maße, wie der Stein flacher oder höher wird. Sie nimmt noch mehr ab, wenn der Steinkörper aus mehreren auf einander gesetzten Theilen besteht. 2)

Die innere Beschaffenheit des Steins, den man dem Versuche unterwirft, hat einen merklichen Einfluß auf die Resultate. Der Widerstand der Theile, welche der obern oder untern Seite nahe liegen, ist geringer, als derjenige der innern Theile. 3)

Ueber den Widerstand der Steine gegen Zerdrücken sind sehr viele Versuche angestellt worden. 4) Die ersten sind von Gauthey, der sich einer Hebelvorrichtung bediente. Rondelet wandte eine ähnliche Maschine an; er schlägt eine Maschine vor, bei welcher der Druck durch eine Schraube hervorgebracht wird; die letztere scheint vorzüglicher zu sein.

§. 5. Mittelwerthe aus den Versuchen Gauthey's. 5) Diese Versuche wurden mit kleinen Parallelepipeden angestellt, deren Dimensionen von 4 bis 48 par. Linien variirten und gewöhnlich 10 bis 12 Linien betrug.

Aus den Resultaten sind die folgenden Werthe für eine Fläche von einem Quadratfuß berechnet.

1) Art de bâtir, par M. Rondelet, tome IV, pag. 150 u. flgde. der Ausgabe von 1831 bei Firmin Didot.

2) Rondelet, Art de bâtir, pag. 146, 147.

3) Rondelet, Art de bâtir, pag. 140 u. flgde.

4) Die neuesten Versuche sind im Anhange dieses Werkes aufgeführt.

5) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Journ. de physique, nov. 1771.

Steinarten.	Gewicht eines Kubfuß	Geringsster	Mittlerer	Größter
		Werth des zerdrückenden Gewichtes.		
	Pfund	Pfund	Pfund	Pfund
Porphy . . . . .	201	4299112	5329152	5619456
Marmor aus Flandern . . . . .	184	1824768	2239488	2159200
Marmor aus Genua . . . . .	189	691472	770688	1002240
Kalkstein, harter, aus Givry . . . . .	165	456192	663552	870911
Kalkstein, weicher, aus Givry . . . . .	145	186624	248832	311040
Kalkstein, weißer, aus Tonnerre . . . . .	120	181440	222912	279836
Biegestein, harter . . . . .	109	290304	321403	373248
Sandstein, weicher . . . . .	174	5390	8424	189586

Um den Widerstand gegen Zerdrücken für eine Querschnittsfläche von einem Quadratcentimeter ausgedrückt in Kilogrammen zu erhalten, hat man die Zahlen der letzten drei Columnen mit 0,000464 zu multipliciren.

§. 6. Die wichtigsten Ergebnisse aus den Versuchen Rondelet's. 1) Diese Versuche wurden mit kleinen Würfeln angestellt, die 0m,05 zur Seite hatten, und deren Grundfläche also 25 Quadratcentimeter enthielt.

Steinarten.	Spezif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
<b>Vulkanische Steine.</b>		
Basalt aus Schweden . . . . .	3,06	47809
Basalt aus der Auvergne . . . . .	2,88	51945
Bimsstein . . . . .	0,60	863
Duckstein (Tuff) aus Rom . . . . .	1,22	1447
Lava vom Vesuv, genannt Piperno, aus der Nähe von Puzzuolo . . . . .	2,60	14802
Lava, graue, aus der Umgegend von Rom, (Peperino) . . . . .	1,97	5700
Lava, weiche, aus Neapel . . . . .	1,72	4014
Vulkanische Schlacke . . . . .	0,86	831
<b>Granitarten.</b>		
Granit, grüner, aus den Vogesen . . . . .	2,85	15487
„ grauer, aus der Bretagne . . . . .	2,74	16353
„ aus der Normandie, Garmos genannt . . . . .	2,66	17555
„ grauer, aus den Vogesen . . . . .	2,64	10581
<b>Sandsteinarten.</b>		
Sandstein, sehr hart, röthlich . . . . .	2,52	20337
„ weißer . . . . .	2,48	23086
„ mürber . . . . .	2,49	98(?)

1) Rondelet, Art de bâtir, tome I. pag. 210 u. folge.

Steinarten.	Spezif. Gewicht	Verdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
<b>Thonhaltige Steine.</b>		
Stinkstein . . . . .	2,66	17030
Grauer Stein aus Florenz mit feinem Korn . .	2,56	10556
<b>Kalksteine.</b>		
Marmor, schwarz, aus Flandern . . . . .	2,72	19719
" weiß geädert . . . . .	2,70	7455
" weißer, zu Bildsäulen . . . . .	2,69	8176
" dunkelblau (Ital. Bardiglio) . . . . .	2,67	7695
Stein von Caserta, der Politur fähig . . . . .	2,72	14865
Stein von Saint-Fortunat, schwarz, sehr hart und muschlig, in Lyon angewandt . . . . .	2,65	15663
Lias von Vagneur bei Paris, sehr hart, feinkörnig	2,44	11113
Travertino aus Rom, sehr hart, feinkörnig, grün- flüchtig . . . . .	2,36	7449
Stein von Chatillon bei Paris, hart, wenig muschlig	2,29	4347
Stein von Chatillon bei Paris, weich . . . . .	2,08	3339
" von Arcueil bei Paris . . . . .	2,30	6334
" von Saillancourt bei Pontoise, 1. Qualität	2,41	3536
" " " " " 2. Qualität	2,29	2994
" " " " " 3. Qualität	2,10	2304
Stein von Conflans, fest, in Paris angewandt . .	2,07	2245
Stein von Conflans, weich, sogenannte Lambourde	1,82	1407
Gyps von Montmartre bei Paris, als Baustein . .	1,92	1785
Bergelée, aus der Umgegend von Paris, weich, grob- körnig, dem Wasser widerstehend . . . . .	1,83	1496
Lambourde, von geringer Qualität, weich, der Feuch- tigkeit schlecht widerstehend . . . . .	1,56	575

§. 7. Die wichtigsten Ergebnisse aus den Versuchen Rennie's. 1)  
Diese Versuche wurden mit kleinen Würfeln angestellt, deren Kante  $1\frac{1}{2}$  engl. Zoll betrug. Die zerdrückenden Gewichte sind in engl. Pfunden avoir du poids angegeben.

Steinarten.	Spezif. Gewicht	Verdrücken- des Gewicht
		engl. Pfund
<b>Granitarten.</b>		
Granit von Aberdeen, blau . . . . .	2,625	24556
" " Peterhead, feinkörnig . . . . .		18636
" " Cornwallis . . . . .	2,662	14302

1) Philosophical Transactions 1818, auch Annales de chimie et de physique, sep-  
tembre 1818.

Steinarten.	Spezif. Gewicht	Verdrücken- des Gewicht
Kieselsteine.		engl. Pfund
Stein von Dundee . . . . .	2,530	14918
Stein von Branniffall bei Leyden, parallel oder normal zu den Schichten . . . . .	2,506	13632
Stein von Derby (Grit genannt), roth, zerreiblich	2,316	7070
Kalksteine.		
Marmor, weißer italien., geadert . . . . .	2,726	21783
" weißer aus Brabant . . . . .	2,697	20742
Kalkstein von Limerick, schwarz und dicht. . . . .	2,598	19924
Rother Marmor von Devonshire . . . . .		16712
Portlandstein mit feinem und gleichmäßigem Korn (die Kante des Würfels = 2") . . . . .	2,423	14918
Derselbe Stein (die Kante des Würfels = 1½") . . . . .	2,428	10284
Ziegel.		
Ziegel von Stourbridge . . . . .		3864
" " Hammer-Smith . . . . .		2254
Derselbe Ziegel, gebrannt . . . . .		3243
Roths Ziegel, Mittel aus zwei Proben . . . . .	2,168	1817
Blauroths Ziegel . . . . .	2,085	1263
Kalk . . . . .		1127

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columne mit 0,03156, so erhält man in Kilogrammen ausgedrückt den Widerstand gegen Verdrücken für eine Fläche von einem Quadratcentimeter.

§. 8. Um zu zeigen, wie die Abnahme an Festigkeit zu schätzen ist, welche eintritt, sobald die Höhe des Prismas größer ist, als die Seite der Grundfläche, führen wir hier die folgenden Versuche von R o n d e l e t <sup>1)</sup> auf. Die Grundfläche war ein Quadrat mit einer Seite von 5<sup>cm</sup> (= 5 Cent.).

Steinarten.	Spezif. Gewicht	Verdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
Sehr harter Lias, ein Würfel . . . . .	2,388	8851
Zwei eben solche Würfel aufeinander gesetzt . . . . .		5411
Drei Würfel ebenso . . . . .		4780
Harter Stein von Bagneux, ein Würfel . . . . .	2,255	6650
Zwei solcher Würfel aufeinander gesetzt . . . . .		4223
Drei Würfel ebenso . . . . .		3890
Harter Stein von Chatillon, ein Würfel . . . . .	2,332	5138
Zwei Würfel aufeinander gesetzt . . . . .		4010
Drei Würfel ebenso . . . . .		3853
Derselbe Stein, ein Würfel . . . . .	2,162	3537
Zwei Würfel aufeinander gesetzt . . . . .		2829
Drei Würfel ebenso . . . . .		2752
Derselbe Stein, ein Prisma von 0,11 Höhe . . . . .	2,346	5164
Dasselbe Prisma in vier Theile zerlegt . . . . .		4431
Dasselbe Prisma in acht Theile zerlegt . . . . .		3698

1) Art de bâtir, tome IV, pag. 116.

§. 9. White <sup>1)</sup> berichtet über einen Versuch, bei welchem ein Prisma aus Portlandstein, welches 14'' engl. breit, 12'' dick und 2' 7'' hoch war, unter einem Drucke von 173,5 Tonnen zerdrückt wurde.

### Widerstand des Gypses gegen Zerdrücken.

§. 10. Nach Rondelet <sup>2)</sup> beträgt das Gewicht, welches einen Würfel zerdrückt, dessen Kante = 5cm ist, für Gyps mit Wasser angemacht 1239kil. und für Gyps mit Kalkmilch angemacht 1816kil.

### Widerstand des Mörtels gegen Zerdrücken.

§. 11. Der Widerstand des Mörtels ist sehr verschieden nach den Materialien und dem Bereitungsverfahren, welches man anwandte. Die folgende Tabelle ist nach den Versuchen von Rondelet berechnet.

Mörtel.	Spezif. Gewicht	Zerdrücken- des Gewicht
		Kilogramm
Mörtel aus Kalk und Flusssand . . . . .	1,63	767
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,89	1048
Mörtel aus Kalk und Grubensand . . . . .	1,59	1017
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,90	1406
Mörtel mit Cement aus gemahlenen Ziegelscherben . . . . .	1,46	1191
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,66	1633
Mörtel aus zermahlenen Sandstein . . . . .	1,68	733
Mörtel aus gemischter Puzzolane von Neapel und Rom . . . . .	1,46	916
Derselbe Mörtel, gestampft . . . . .	1,68	1333
Bewurf eines Reservoirs einer antiken Wasserleitung in der Umgegend Roms . . . . .	1,55	1903
Cementbewurf der Trümmer der Basilika . . . . .	1,49	1368

Die Versuche wurden 11½ Jahr nach der Bereitung des Mörtels angestellt. Fünfzehn Jahre später wurden sie wiederholt, und man bemerkte, daß der Widerstand bei den Mörteln aus Kalk und Sand ungefähr um 1/8, bei den Mörteln mit Cement und Puzzolane um 1/4 zugenommen hatte. <sup>3)</sup>

### Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken.

§. 12. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>4)</sup> bedarf es, um einen Würfel von Eichenholz zu zerdrücken, einer Kraft von 40 bis 48 Pfund für jede Quadratlinie der Basis (385 bis 463 kil. für den Quadratcentimeter). Diese Kraft nimmt für ein Prisma nicht merklich ab, so lange die Höhe das Sieben- bis Achtfache der Dicke nicht überschreitet und das Prisma sich nicht biegen kann.

1) The Philosophical Magazine, april 1832.

2) Art de bâtir, tome I, pag. 221.

3) Art de bâtir, tome I, pag. 223. Man sehe auch von Vicat die Recherches expérimentales sur les chaux de construction, und von demselben Verfasser das Werk: Résumé des connaissances positives actuelles sur les mortiers et ciments calcaires, 1828.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 232.

Dieselbe Kraft beträgt für Tannenholz 48 bis 56 Pfund (463 bis 538 kil. für den Quadratcentimeter).

§. 13. Nach den Versuchen von Kennie <sup>1)</sup> bedarf es, um einen Würfel zu zerdrücken, dessen Kante gleich 1" engl., für

engl. Eichenholz . . .	3860	Pfund	avoir du poids.
Weißtannenholz . . .	1928	"	"
amerik. Fichtenholz . . .	1606	"	"
Ulmenholz . . . . .	1284	"	"

Den Widerstand für den Quadratcentimeter, in Kilogrammen ausgedrückt, findet man aus den vorstehenden Zahlen durch Multiplikation mit 0,07028.

§. 14. Soll die gedrückte Oberfläche eines Stabes aus Eichenholz nicht merklich nachgeben, so darf nach Gauthey <sup>2)</sup> der Druck nicht über 160<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter betragen, wenn die gedrückte Fläche den Fasern parallel ist: und nicht über 200<sup>kil.</sup>, wenn die gedrückte Fläche zu den Fasern rechtwinklig ist.

§. 15. Nach den Versuchen von Tredgold <sup>3)</sup> darf der Druck gegen eine den Fasern parallele Fläche nicht über 1400 Pfd. avoir du poids für den engl. Quadratzoll bei Eichenholz betragen, und nicht über 1000 Pfund bei Rothtannenholz (108 und 70<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter).

Diese Zahlen setzen gute, trockne Hölzer voraus.

§. 16. Bei einem Versuche, den Minard und Desormes 1822 anstellten mit zwei Stäben von Eichenholz, deren Enden durch eine einfache Verzahnung zusammengefügt und durch eiserne Bänder gehalten wurden, wurden die Fasern des Zahns zerdrückt durch eine Kraft von 530<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter.

#### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Zerdrücken.

§. 17. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>4)</sup> fängt ein Würfel aus Schmiedeeisen, dessen Kante 6 bis 12 Linien enthält, an, zusammengeedrückt zu werden, bei einem mittleren Drucke von 513 Pfund für die Quadratlinie (4945<sup>kil.</sup> für den Quadratcentimeter). Beträgt die Höhe das Dreifache der Dicke, so wird das Eisen eher gebogen, als zusammengeedrückt.

#### Widerstand des Gußeisens gegen Zerdrücken.

§. 18. Nach den Versuchen von Reynold <sup>5)</sup> beträgt die Kraft, deren es bedarf, um einen Würfel zu zerdrücken, dessen Kante  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll, bei grauem, weichem Gußeisen 8960 Pfund avoir du poids, und bei Kanonnenmetall 22400 Pfund.

1) Philosophical Transactions 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

2) Traité de la construction des ponts, tome II, pag. 41.

3) Elementary principles of carpentry, pag. 60.

4) Art de bâtir, tome I, pag. 295.

5) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 128. Nach diesem Werke scheint es, als ob Kennie die von Reynolds gefundenen Resultate in seiner Abhandlung in dem Bande für 1818 der Philosophical Transactions nicht genau widergegeben habe.

§. 19. Die wichtigsten Resultate aus den Versuche von G. Kennie über das Zerdrücken des Gußeisens. 1)

Der Probe unterworfenen Eisensorten.	Spezif. Gewicht	Seite der quadrat. Basis	Höhe des Prism.	Zerdrücken- des Gewicht
		engl. Zoll	engl. Z.	engl. Pfund
Eisen, das aus der Mitte einer gro- ßen Masse genommen war, deren Krystalle die Gestalt und das An- sehen derjenigen hatten, die man bei dem Zerspringen einer eiser- nen Kanone beobachtet . . . .	7,033	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1440
Eisen, das aus einer kleinen Guß- masse genommen war, dichtförmig, mehr dunkelgrau . . . . .	6,977	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	2116 2363 2005 1407 1743 1594 1439
Eisen, das aus der erstenen Masse genommen war . . . . .		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	9773
Würfel aus horizontal gegossenen Stäben genommen . . . . .	7,113	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	10114
Würfel aus vertical gegossenen Stäben genommen . . . . .	7,074	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	11137 9449 9006 8845 8362 6430 6321
Prismen von verschiedenen Höhen aus horizontal gegossenem Eisen		$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	9328 8385 7896 7018 6430
Prismen aus vertical gegossenem Eisen . . . . .		$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{8}$	

Widerstand verschiedener Metalle gegen Zerdrücken.

§. 20. Nach denselben Versuchen ist die Kraft, deren es bedarf, einen Würfel aus gegossenem Kupfer mit einer Kante gleich  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll zu zerdrücken . . 7318 Pfund.

Um einen gleichen Würfel zusammenzudrücken, und zwar aus Gelbkupfer, um  $\frac{1}{10}$  . . . . 3213 Pfund avoir du poids

" um  $\frac{1}{2}$  . . . . 10304 " "

gehämmerten Kupfer, um  $\frac{1}{10}$  . 3427 " "

" " um  $\frac{1}{8}$  . 6440 " "

gegossenem Zinn, um  $\frac{1}{10}$  . . 552 " "

" " um  $\frac{1}{3}$  . . 966 " "

gegossenem Blei, um  $\frac{1}{2}$  . . 483 " "

Aus den vorstehenden Zahlen, aus den Zahlen der letzten Co-

) Philosophical Transactions 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

lumne der Tabelle im §. 19 für den Fall, wo die Seite der Basis  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll, so wie aus den Zahlen des §. 18 erhält man durch Multiplication mit 1,125 den Widerstand in Kilogrammen ausgedrückt für einen Quadratcentimeter.

## Zweites Kapitel.

### Widerstand der Materialien gegen eine in ihrer Längsrichtung wirkende Kraft, welche strebt, dieselben zu verlängern und zu zerreißen.

§. 21. Betrachtet man einen Körper, der in seiner Längsrichtung einen Zug erleidet, so kann man dabei ein Zweifaches zu erfahren suchen, nämlich: 1) die Größe, um welche sich dieser Körper bei einer gegebenen Kraft verlängern wird, und 2) die Kraft, deren es bedarf, um die Theile von einander zu trennen und den Körper zu zerreißen. Nur wenig directe Versuche sind zur Bestimmung der Größe, um welche ein gegebener Körper durch eine einwirkende Kraft verlängert wird, angestellt worden; aber man wird in der Folge sehen, daß diese Größe sich aus den Versuchen über die Biegung ableiten läßt. Der Widerstand der Körper gegen Zerreißen ist der Gegenstand, mit dem man sich am meisten beschäftigt hat, und der einzige von dem wir in diesem Kapitel zu handeln gedenken. Was wir über diesen Gegenstand sagen werden, beschränkt sich auch hier auf die Aufzählung der Resultate, die durch Versuche gewonnen sind.

### Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Ausdehnung (Zerreißen).

§. 22. Nach Coulomb<sup>1)</sup> bedarf es zum Zerreißen per Quadrat Zoll

für einen hellen Stein mit feinem,  
gleichmäßigem Korne . . . . 215 Pfund

für Ziegel aus der Provence, sehr gut  
gebrannt, sehr dichtes Korn . . 280 bis 300 Pfund.

(Diese Zahlen entsprechen  $14\frac{1}{2}$  und  $18\frac{1}{2}$  bis  $20\frac{1}{2}$  für den Quadratcentimeter).

§. 23. Nach Tredgold<sup>2)</sup> bedarf es ebenso für den engl. Quadrat Zoll

1) Mémoires des savants étrangers. 1773.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 150 und 155.



für Ziegel . . . . 275 engl. Pf. (19<sup>k</sup>,3 f. d. Quadratcentimeter)  
für Portlandstein 857 " " (60<sup>k</sup>,2 f. d. Quadratcentimeter).

### Widerstand des Gypses gegen Ausdehnung.

§. 24. Nach Rondelet<sup>1)</sup> beträgt die Cohäsion des Gypses 76 Pfund für den Quadratzoll (5<sup>kil</sup>. für den Quadratcentimeter). Die Adhäsion an Stein und Ziegel ist ungefähr  $\frac{2}{3}$  der ersteren Kraft. Die Adhäsion ist größer bei Bruchsteinen (Mühlsteinen) und Ziegeln als bei Kalksteinen. Sie nimmt mit der Zeit sehr ab.

### Widerstand des Mörtels gegen Ausdehnung.

§. 25. Nach Rondelet<sup>2)</sup> ist die Cohäsion des Mörtels ungefähr  $\frac{1}{8}$  seines Widerstandes gegen Zerdrücken. Die Adhäsion an den Steinen und Ziegeln ist größer, als seine Cohäsion.

§. 26. Nach Vicat<sup>3)</sup> beträgt die Cohäsion für den Quadratcentimeter

für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und Kalk, der vorzüglich hydraulisch . . . . .	9 <sup>k</sup> ,6
für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und Kalk, der gewöhnlich hydraulisch . . . . .	6, 0
für gut angemachten Mörtel aus Quarzsand und gewöhnlichem, mittlerem oder fettem Kalk . . . . .	3, 6
für schlecht angemachten Mörtel, gewöhnlich höchstens . . . . .	1, 5

§. 27. Nach demselben Ingenieur sind später die folgenden allgemeinen Resultate angegeben worden, nämlich:

Vorzüglicher hydraulischer Kalk . . . . .	12 <sup>kil</sup> .
Gewöhnlicher hydraulischer Kalk . . . . .	10
Mittlerer hydraulischer Kalk . . . . .	7
Fetter Kalk . . . . .	3
Schlechter Mörtel . . . . .	0,75

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Mischungsverhältnisse, so wie der Lösungsproceß angemessen bestimmt seien. Die obigen Werthe gelten für Mörtel, der seit einem Jahre angemacht und fortwährend den Unbilden der Witterung ausgesetzt war.<sup>4)</sup>

§. 28. Die Versuche mit Mörtel, der mit Cement von Pouilly

1) Art de bâtir, tome I, pag. 225.

2) Art de bâtir, tome I, pag. 224 und 325.

3) Recherches expérimentales sur les chaux de construction, pag. 96.

4) Résumé sur les mortiers et ciments calcaires, pag. 69.

angemacht war, haben folgende Resultate geliefert. 1) Die Adhäsion beträgt für den Quadratzentimeter:

Prismen ohne Beimischung von Sand, im Wasser	6 <sup>k</sup> , 47
Gleiche Theile von Cement und Sand, im Wasser	6, 97
Dasselbe, außerhalb des Wassers	5, 00
Zwei Theile Cement und ein Theil Sand, im Wasser	9, 38
Dasselbe, außerhalb des Wassers	9, 90

§. 29. Bei einigen Versuchen von J. White<sup>2)</sup> wurde ein Pfeiler aus Ziegeln mit Mörtel aus Kalk, Puzzolane und Sand, 3' 4" breit u. 1' 10" dick (engl. Mase) construirt; derselbe wurde nach einem Monate untersucht, indem das obere Ende gehoben wurde, und er trug sein eignes Gewicht bei einer Höhe von 5' 2". Das Innere war noch nicht vollkommen trocken.

Ein anderer Pfeiler wurde ebenso aus 35 Ziegellagen mit Mörtel aus Kalk und zerstampfter und gesiebter Puzzolane 6' engl. breit, 3' dick und 8' 10" hoch aufgeführt. Nach neun Monaten wurde er untersucht und das obere Ende um 15" gehoben, ohne den Pfeiler zu zerreißen. Das Gewicht betrug ungefähr 10 engl. Tonnen.

### Widerstand der Hölzer gegen Ausdehnung.

§. 30. Nach den Versuchen von Rondelet<sup>3)</sup> beträgt die Cohäsion des Eichenholzes, wenn dieses in der Richtung der Fasern gezogen wird, 102 Pfund für die Quadratlinie (981<sup>mil</sup> für den Quadratzentimeter).

§. 31. Mittelwerthe aus den Versuchen von Barlow<sup>4)</sup> mit Stäben von ungefähr  $\frac{1}{3}$  Zoll Durchmesser. Aus den Resultaten ist die Kraft berechnet, deren man zum Zerreißen bei einem Querschnitte von 1 engl. Quadratzoll bedarf.

Tannenholz, 1, . . . . .	12857	Pfund	engl.
2, . . . . .	11549	"	"
Eichenholz, 1, . . . . .	17207	"	"
2, . . . . .	16947	"	"
Buchenholz . . . . .	11467	"	"
Eichenholz, 1, . . . . .	9198	"	"
2, . . . . .	11580	"	"
Teakholz (Indische Eiche). . . . .	15090	"	"
Buchsbäumholz . . . . .	19891	"	"
Birnbaumholz . . . . .	9822	"	"
Mahagoniholz . . . . .	8041	"	"

1) Rapport fait par M. Mallet à la Société d'Encouragement, sur le ciment de M. Lacordaire, 17. Juin 1829.

2) The Philosophical Magazine, april 1832.

3) Art de bâtir, tome I, pag. 232.

4) An Essay on the strength and stress of timber, pag 29.

§. 32. Nach denselben Versuchen beträgt für Tannenholz der Widerstand gegen Verschiebung, d. h. die Kraft, welche man anwenden muß, um zwei Theile eines Körpers durch eine den Fasern parallele Verschiebung auf einander zu trennen, 592 Pfund für den Quadrat-zoll (engl. Maße).

§. 33. Nach den Versuchen von Tredgold <sup>1)</sup> beträgt die Cohäsion der Hölzer, wenn diese einen Zug erleiden, dessen Richtung rechtwinklig gegen die Richtung der Fasern ist, für den engl. Quadrat Zoll, für

Eichenholz . . . . .	2316	engl. Pfund
Pappelnholz . . . . .	1782	" "
Lärchenholz . . . . .	970 bis 1700	" "

Die vorstehenden Zahlen, so wie diejenigen in den §§. 31 und 32, sind mit 0,07028 zu multipliciren, um den Widerstand in Kilogrammen ausgedrückt für den Quadratcentimeter zu erhalten.

§. 34. Nach einigen Versuchen von Minard und Desormes beträgt die Cohäsion des Eichenholzes, wenn dieses in der Richtung der Fasern einen Zug erleidet, 600 bis 700 kil. für den Quadratcentimeter. Die Cohäsion der Zitterpappel scheint ebenso groß zu sein.

§. 35. Nach denselben Versuchen fand man für das Holz der Zitterpappel den Widerstand gegen Verschiebung, oder die Kraft, welche man aufwenden muß, um zwei Theile eines Körpers durch eine den Fasern parallele Verschiebung auf einander zu trennen, zu 57 kil. für den Quadratcentimeter.

§. 36. Versuche von Minard und Desormes über die progressive Verlängerung eines Eichenstabes von 0m,036 ins Gevierte, wenn dieser in der Richtung der Länge gezogen wurde.

Bela- stungen	0,k	1708k	0k	2411k	0k	3114k	0k
Beob. Längen	1m,016	1m,017	1m,016	1m,0175	1m,016	1m,01775	1m,01625

Aus diesen Versuche erhellt, daß das Eichenholz durch eine Belastung von 213kil. für den Quadratcentimeter um  $\frac{1}{829}$  ausge-  
dehnt werden kann, ohne die Fähigkeit zu verlieren, sich nach der Entlastung wieder bis auf seine ursprüngliche Länge zusammenzu-  
ziehen. Dies entspricht einer Verlängerung von 0,0007464 durch  
ein Kilogramm für jeden Quadratcentimeter des Querschnitts.

<sup>1)</sup> Elementary principles of carpentry, pag. 29.

§. 37. Nach den von Devau<sup>1)</sup> veröffentlichten Versuchen fügen wir den Ausdruck für die Kraft hinzu, die man anwenden muß, um Holzschrauben herauszureißen. Die Schrauben waren 2" engl. lang, der äußere Durchmesser der Gewinde betrug 0,22 Zoll, der innere Durchmesser 0,15 Zoll. Das Gewinde bildete auf der Länge eines Zolles 12 Gänge. Die Schrauben gingen durch einen halben Zoll dicke Bohlen ganz hindurch. Die folgenden Zahlen geben die Kraft an, wodurch sie herausgerissen wurden.

Trocknes Eichenholz . . . . .	790 engl. Pfund.
Eichenholz . . . . .	760 " "
Acajou . . . . .	770 " "
Ulmenholz . . . . .	655 " "
Feigenmaulbeerbaumholz (Sycomore) . . . . .	830 " "

Bei Tannenholz und andern weichen Hölzern betrug die Kraft nur die Hälfte der vorstehenden Werthe. Bei weitem genauere Versuche hierüber hat Karmarsch angestellt.<sup>2)</sup>

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Ausdehnung.

§. 38. Nach den Versuchen, die Poleni<sup>3)</sup> in Rom mit acht kleinen Stäben, die 0m,00372 ins Gevierte hielten, anstellte, variiert die Cohäsion von 41<sup>k</sup> bis 50<sup>k</sup> für den Quadratmillimeter; der Mittelwerth ist 44<sup>k</sup>,5.

§. 39. Resultate aus den Versuchen von Perronet mit Stäben aus Quadrateisen, die in der Richtung ihrer Länge gezogen wurden.<sup>4)</sup>

Länge der Stäbe	Seite des quadrat. Querschnitts	Reißen- des Gewicht	Getragene Belastung f.d. Quadratmillimeter
Meter	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
0,650	12,97	5972	35,5
0,325		6687	39,8
0,162		5502	32,7
0,081		5972	35,5
0,650	9,02	2983	36,7
0,325		3113	38,3
0,650	6,77	2134	46,6
0,325		2369	51,7
0,162		2472	53,9
0,081		2487	54,3
0,650		2159	47,1

Mittlere Belastung für den Quadratmillimeter: 42,9 kil.

1) The Philosophical Magazine, octobre 1827.

2) Mittheilungen des Gewerbevereins für das Königreich Hannover, Jahrgang 1838, S. 185.

3) Memorie istoriche della cupola del tempio Vaticano, citirt in dem Traité de la construction des ponts, tome II, pag. 395.

4) Traité de la construction des ponts par M. Gauthey, tome II, pag. 151.

§. 40. Resultate aus den Versuchen von Perronet mit Stäben aus Rundenisen, die in der Richtung ihrer Länge gezogen wurden.

Länge der Stäbe	Seite des quadrat. Querschnitts	Jerreihen- des Gewicht	Getragene Belastung f.d. Quadratmillimeter
Meter	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
0,650	10,15	3020	37,3
0,325		3074	38,0
0,162		3348	41,4
0,081		3368	41,6
0,650	7,88	2717	55,7
0,162		2748	56,3
0,081		2683	55,0
0,650	7,62	1463	32,1
0,325		1662	36,4
0,162		1721	37,7
0,081		1510	33,1

Mittlere Belastung für den Quadratmillimeter: 42,2 kil.

§. 41. Resultate der Versuche von Sufflot und Rondelet<sup>1)</sup> mit Stabeisen, das in der Richtung der Länge gezogen wurde. Die Länge der Stäbe betrug etwas mehr, als zwei Fuß.

Eisen.	Breite der Stäbe	Dicke	Jerreihen- des Gewicht	Getragene Be- lastung für die Quadratlinie
	Linien	Linien	Pfund	Pfund
Durchaus sehniges Eisen . . .	2 <sup>2</sup> / <sub>3</sub>	2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	3542	590
Deßgleichen . . . . .	2 <sup>2</sup> / <sub>3</sub>	2	3374	633
Eisen, das beim Bruche sich etwas körnig zeigt . . . . .	6	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	6157	410
Eisen, das beim Bruche sich <sup>2</sup> / <sub>3</sub> sehnig zeigt . . . . .	5	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	4874	390
Eisen, zur Hälfte sehnig . . .	5 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	3	5524	335
Durchaus sehniges Eisen . . .	6	3	15600	866
Eisen, das <sup>1</sup> / <sub>3</sub> sich körnig zeigt .	6	3	7800	433
Eisen, das sich über die Hälfte körnig zeigt . . . . .	6	3	5857	325
Eisen, das etwas körnig . . .	3	2	3635	606
Durchaus sehniges Rundenisen, 3 Linien im Durchmesser . . .			6600	933
Grobkörniges, gar nicht sehnig. Eisen	4	4	2991	187
Mittelskörniges, gar nicht sehniges Eisen . . . . .	4	4	3980	249
Feinkörniges, gar nicht sehnig. Eisen	4	4	5840	365
Mittelskörniges, zur Hälfte sehniges Eisen . . . . .	4	4	7200	450
Durchaus sehniges Eisen . . .	4	4	10320	645
Grobkörniges, zur Hälfte sehniges Eisen . . . . .	4	4	5840	365

Mittlere Festigkeit für eine Quadratlinie . . . 486

1) Traité de l'art de bâtir, tome I, pag. 277.

Die mittlere Festigkeit für einen Quadratmillimeter beträgt 46<sup>1</sup>/<sub>8</sub>.

§. 42. Resultate aus den Versuchen, die 1845 von Minard und Desormes angestellt wurden. Der Zug wurde vermittelst eines Hebels hervorgebracht.

Bezeichnung des Eisens.	Fläche des Querschnitts, in welchem der Stab zerissen wurde	Zerreißendes Gewicht		Ausdehnung, dividirt durch die ursprüngl. Länge
		im Ganzen	für den Quadratmillimeter	
Quadrat Eisen, mittleres glänzendes Korn . . .	115	5115	44,5	0,13
Dasselbe, die Stäbe zusammengeschnitten . . .	150	4520	40	
Dasselbe . . . . .	121	3520	29,1	
Dasselbe . . . . .	134	6000	45,4	0,05
Dasselbe . . . . .	138	4760	34,5	
Dasselbe . . . . .	120	4120	34,3	
Dasselbe . . . . .	224	4920	39,7	0,025
Dasselbe . . . . .	129	5420	42	0,035
Dasselbe . . . . .	126	5320	42,2	
Rundeisen, feinkörnig . . .	78	3140	40,2	0,11
Quadrat Eisen, feines grau bläuliches Korn . . .	138	4120	29,9	0,025
Dasselbe . . . . .	121	4520	37,3	0,035
Dasselbe . . . . .	100	3520	35,2	0,01
Dasselbe . . . . .	108	4580	42,4	0,095
Dasselbe . . . . .	108	5470	50,6	0,085
Dasselbe, 5 Minuten vor dem Versuche weiß glühend gemacht . . .	108	4620	42,8	0,185
Zusammengeschnitten und ausgedehnte Stäbe . . .	117	5020	42,9	0,135
Quadrat Eisen, theils sehnig	115	4120	35,8	0,07
Dasselbe . . . . .	110	4270	38,8	0,15
Dasselbe . . . . .	110	4320	39,3	0,1
Zusammengeschnitten und ausgedehnte Stäbe . . .	121	5120	42,3	0,15
Dasselbe . . . . .	147	5150	35,0	0,045
Dasselbe, weiß glühend gemacht und im Wasser abgekühlt . . . . .	121	4520	37,3	0,08
Quadrat Eisen, sehnig, umgeben von einer dünnen Schicht körnigem Eisen	700	22030	31,4	0,075
Dasselbe . . . . .	620	19228		
Dasselbe . . . . .	625	21530	34,4	0,07
Dasselbe . . . . .	616	21820	35,4	0,03

Als man die Stücke einer und derselben Stange zusammenschweißte, wurde das Eisen durch diese Bearbeitung etwas grobkörniger; doch schien es nicht, als ob das Eisen an den Stellen, wo sich ein größeres Korn zeigte, oder an den Schweißstellen, sich mehr zum Bruche neigte, als an andern.

§. 43. Die folgende Tabelle giebt die Resultate aus andern Versuchen, die ebenfalls 1815 von Minard und Desormes angestellt wurden, und zwar in der Absicht, die progressive Verlängerung des Eisens unter einer zunehmenden Belastung zu bestimmen. Die ursprüngliche Länge der Stäbe, deren Verlängerung beobachtet wurde, war 0m,2.

Bezeichnung des Eisens.	Inhalt der Querschnitts- fläche	Belastung per Quadrat- millimeter bei einer Aus- dehnung um				Belastung per Quadratmilli- meter, bei welcher der Bruch erfolgte	Gesamti- ausdehnung dividirt durch die ursprüng- liche Länge
		$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$		
<b>I. Versuch.</b>	<b>Qua- dratm.</b>	<b>Kil.</b>	<b>Kil.</b>	<b>Kil.</b>	<b>Kil.</b>	<b>Kilogramm</b>	
1. Probe . . .	115	27,1	32,3	35,8	40,4	44,5	0,13
2. " . . .	132	24,2	27,4	32		45,4	0,05
3. " . . .	124		35,6			39,7	0,025
4. " . . .	129		35,8	38,8		42	0,035
5. " . . .	78	19,5	28,5	31,0	35,9	40,2	0,11
<b>II. Versuch.</b>							
1. Probe . . .	103		26,4			40	0,025
2. " . . .	117	30,1		35,2		38,6	0,035
3. " . . .	108	30,7	32,6	35,2	39,4	42,4	0,095
4. " . . .	108		31,2	33,9	38,6	50,6	0,085
5. " . . .	117	26,7	30,9	33,5	37,5	42,9	0,135
6. " (') . . .	112		32,3	35			
7. " . . .	108		27	30,5	35,7	42,8	0,185
<b>III. Versuch.</b>							
1. Probe . . .	115	23,6	26,3	29,3	33,5	35,8	0,07
2. " . . .	110		27	29,3	34,4	38,8	0,15
3. " . . .	110		28,8	31,4	36,1	39,3	0,1
4. " . . .	121		29,5	31,6	36,5	42,3	0,15
5. " . . .	147	21,4	29,2	31,4		35,0	0,045
6. " . . .	121	19,2	22,5	29,1	34,0	37,3	0,08
IV. Versuch. .	324	26,7	28,2	30,1		32,8	0,04
V. Versuch. .	804	21,5	24,8				
<b>VI. Versuch.</b>							
1. Probe . . .	625	22,1	25,6	28,8		35,2	0,075
2. " . . .	625	26,8	31,2	32,5		34,4	0,07
3. " . . .	616	26	28,5	31,8		35,4	0,03
4. " . . .	650	22,3	27,6				
VII. Versuch.	1056	22,6	24,7				
Drath, ausge- glüht . .	6,16	23	25			39,4	0,187
Mittel . . .		24,3	28,7	32,3	36,5	39,8	0,086

Das mit einem Sternchen bezeichnete Eisen wurde zwei Tage hindurch belastet mit dem Gewichte, welches es um  $\frac{1}{100}$  verlängert hatte, und drei Monate hindurch mit dem Gewichte, welches es um  $\frac{1}{10}$  verlängert hatte, ohne daß die Verlängerungen über das Maß hinaus zugenommen hätten, welches sich als erste Wirkung der Belastung zeigte. Doch war die Belastung, welche den Stab um  $\frac{1}{40}$  ausdehnte,  $\frac{4}{5}$  derjenigen, die den Stab zerrissen hätte.

§. 44. Resultate der Versuche von Telford <sup>1)</sup> vermittelst einer hydraulischen Presse. Die ausgeübte Kraft wurde aus der Belastung eines Sicherheitsventils berechnet.

Bezeichnung des Eisens.	Belastung, bei der die Stange sich ausdehnte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Belastung für den engl. Quadrat Zoll	
	Tonnen	Tonnen	Centner	Tonnen	Centner
Eisen aus Südwalles, $1\frac{3}{8}$ Zoll im Durchmesser . . .		43	11	29	6
Dasselbe, $1\frac{1}{2}$ Zoll im Durch- messer . . . . .		52	$15\frac{1}{4}$	29	16
Eisen aus Staffordshire, $\frac{3}{4}$ Zoll ins Gevierte . . . .	12	15	$5\frac{3}{4}$	27	3
Dasselbe, $1\frac{1}{12}$ Zoll ins Ge- vierte . . . . .	32	32	6	27	10
Eisen aus Wales, 1" ins Gevierte . . . . .	18	29		29	
Schwedisches Eisen, 1" ins Gevierte . . . . .	17	29		29	
Eisen aus alten zusammen- geschweißten Stücken, 1" ins Gevierte . . . . .	16	29		29	
Gewöhnliches Eisen aus Staf- fordshire, 1" ins Gevierte .	19	31		31	
Gewöhnliches Eisen, 2 Zoll im Durchmesser . . . .	45	100		31	16
Mittlere Festigkeit für 1 engl. Quadrat Zoll . . . . .				29	$5\frac{3}{4}$

Der Mittelwerth entspricht  $46\frac{1}{2}$  für einen Quadratmillimeter. Man hält denselben für etwas zu hoch nach der Natur des Apparates, der bei den Versuchen angewendet wurde.

§. 45. Resultate der Versuche von Brown. <sup>2)</sup> Dieselben wurden mit einer Maschine angestellt, bei welcher die ausgeübte Kraft aus einem System von Hebeln gefunden wurde.

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 223 oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus (par M. Navier), pag. 218.  
2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 232, oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 220.



Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Ausdeh- nung vor dem Bruche	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Belastung für den engl. Qua- dratzoll
	Fuß Zoll	Zoll	Tonnen Centner	Tonnen
Schwedisches Eisen, das Korn sehr fein und dicht 1 <sup>5</sup> / <sub>16</sub> Zoll ins Gevierte	3 6	0 <sup>3</sup> / <sub>16</sub>	40 19	23,77
Dasselbe . . . . .	3 6	0 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	39 15	23,19
Dasselbe, 1 <sup>5</sup> / <sub>16</sub> Zoll ins Gevierte . . . . .	3 6	3	33 10	23,75
Altes, dunkles, russisches Eisen, 1 <sup>5</sup> / <sub>16</sub> im Durch- messer . . . . .	3 6	2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	36 2	26,55
Eisen aus Wales, Nr. 3, 1 <sup>1</sup> / <sub>4</sub> Zoll ins Gevierte	3 6	2	38 1	24,35
Gewöhnliches Eisen aus Wales, das Korn sehr fein und dicht, 1 <sup>1</sup> / <sub>8</sub> Zoll ins Gevierte . . . . .	3 6	0	31	24,90
Eisen aus Wales, Nr. 3, 2 Zoll im Durchmesser (behnte sich bei 68 Tonnen) . . . . .	12 6	18 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	82 15	26,33
Eisen aus Wales, 1 <sup>2</sup> / <sub>9</sub> Zoll im Durchmesser . . . . .	5	7	43 10	26,34
Mittlere Festigkeit für einen engl. Quadratzoll . . . . .				25

Der Mittelwerth entspricht 39<sup>1</sup>/<sub>4</sub> für einen Quadratmillimeter. Man hält denselben für etwas zu niedrig nach der Natur des Apparates, welcher zu den Versuchen angewendet wurde.

§. 46. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Brunel 1) mit Schmiedeeisen in kleinen, ungefähr <sup>3</sup>/<sub>8</sub> Zoll ins Gevierte haltenden Stäben. Die folgenden Werthe sind für einen Querschnitt von einem engl. Quadratzoll berechnet.

	Belastung, bei welcher das Eisen sich ausdehnte		Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	
	Tonnen	Centner	Tonnen	Centner
Aus zehn Versuchen mit dem besten Eisen aus Yorkshire . . . . .	24	11	32	8
Aus zehn Versuchen mit Eisen aus Yorkshire, zweiter Qualität . . . . .	22	4	30	8

§. 47. Resultate aus den Versuchen von Séguin, 2) dem ältern, mit Stäben aus Schmiedeeisen, die in der Richtung ihrer

1) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 221.

2) Des ponts en fil de fer, pag. 84 u. 100 der zweiten Ausgabe.

Länge gezogen wurden. Die Versuche wurden vermittelt eines Hebels angestellt.

Bezeichnung des Eisens.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Belastung für den Quadrat- millimeter
	Millim.	Millim.	Kilogramm	Kilogramm
Gewalztes Eisen von Saint- Chamond . . . . .	16	8	5611	43,8
Dasselbe . . . . .	10	8	4133	51,7
Dasselbe, 0,01 im Durch- messer . . . . .			3743	48
Eisen aus Burgund . . .	13	13	5226	30,4
Dasselbe, bis zum Roth- glühen erhitzt und lang- sam abgekühlt . . . .	13,5	13,5	5435	29,7
Dasselbe, in der Mitte zer- schnitten und mit den Enden zusammengeschw., ohne es auszustrecken .	13,3	13,3	5280	29,7
Dasselbe, in der Mitte zer- schnitten, der Länge nach zusammengeschweißt und ausgestreckt . . . . .	10,15	10,15	5688	55,2
Dasselbe, noch mehr ausge- streckt als das vorgehende Eisen ohne zu schweißen	4,5	4,5	1238	61
Bandeisen, sehr weich . .	20,3	1,7	1541	44,7

§. 48. Bei den Versuchen, die in Petersburg<sup>1)</sup> im Großen mit Hülfe einer hydraulischen Presse angestellt wurden, trug das beste Eisen 26 Tonnen (zu 1050 kil.) für den engl. Quadrat Zoll (42 kil. für den Quadratmillimeter). Bei  $\frac{2}{3}$  dieser Belastung fing das Eisen an, sich zu verlängern, und die Verlängerungen schienen in einer geometrischen Progression zu wachsen, wenn die Belastungen in einer arithmetischen Progression zunahmen.

Das schlechteste Eisen trug 14 Tonnen für den engl. Quadrat-zoll. Es schien sich nicht merklich zu verlängern vor dem Zerreißen. Indem man vier Stangen von mittlerer Güte zusammen-schweißte, erhielt man ein Eisen, welches 24 Tonnen (39 kil. für den Quadratmillimeter) trug, und bei 16 Tonnen anfang, sich aus-zudehnen.

§. 49. Nach den zahlreichen Versuchen, welche Lagerhjelm<sup>2)</sup> 1826 in Schweden anstellte ist das gewalzte Eisen stets von gleich-förmiger Dichtigkeit; das unter dem Hammer bereitete Eisen hin-

1) Brief des Herrn Lamé an Herrn Baillet in den Annales des Mines, 1826, tome X, pag. 329.  
2) Das schwedische Werk von Lagerhjelm ist erwähnt in dem Bulletin des Sciences technologiques, janvier 1829, tome XI, pag. 41.

gegen von veränderlicher Dichtigkeit und es erhält oft brüchige Stellen. Die Walzen drehen die Faser des Eisens nicht, was unter dem Hammer häufig geschieht. Die Elasticität (d. h. das Verhältniß der Belastungen zu den sehr kleinen Verlängerungen, welche durch sie bewirkt werden), ist, so lange sie noch nicht angegriffen ist, dieselbe für gewalztes Eisen, wie für unter dem Hammer bereitetes; aber das Gewicht, welches eine bleibende Ausdehnung erzeugt, ist für das erstere geringer. Der Widerstand gegen Zerreißen scheint von der Bereitungsart unabhängig zu sein, er bleibt derselbe für hartes, weiches, sehniges oder nicht sehniges Eisen. Die Elasticität wird durch das Ausglühen nicht verändert. Sehr geschmeidiges Eisen kann sich, ohne zu zerreißen, um 0,27 seiner ursprünglichen Länge ausdehnen; der Querschnitt wird dabei auf 0,722 reducirt und das spezifische Gewicht nimmt um 0,01 ab. Das Eisen erhitzt sich, ehe es zerreißt, und im Augenblick des Zerreißens zeigt sich zuweilen ein heller Funke. Die Wärmeentwicklung ist bei weichem Eisen größer, als bei hartem.

§. 50. Aus den Beobachtungen bei der Prüfung des Eisens, welches zur Construction der Invalidenbrücke zu Paris bestimmt war, hat man im Mittel gefunden, daß das Schmiedeeisen unter einer Belastung von 1 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts sich um 0,00005166 seiner ursprünglichen Länge ausdehnte. <sup>1)</sup>

Bei diesen Versuchen war die bis auf 18 kil. für den Quadratmillimeter gebrachte Belastung noch nicht groß genug, um der natürlichen Elasticität des Eisens zu schaden. Dasselbe nahm nach der Entlastung genau seine ursprüngliche Länge wieder an. Die Ausdehnung nahm nicht zu, wenn auch die Belastung 12 und selbst 36 Stunden hindurch dauerte.

§. 51. Die wichtigsten Resultate aus den von Emil Martin veröffentlichten Versuchen. <sup>2)</sup> Man wandte eine hydraulische Presse an, um die Spannung des Eisens zu bewirken.

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser oder Gevierte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividirt durch die ursprüngliche Länge
		im Ganzen	für den Quadratmillim.	
Rundeisen von St. Chamond	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
	45	55 000	34,6	0,196
	45	57 500	36,2	0,230
	45	53 000	33,3	0,205
	45,5	54 500	33,5	0,206
	53,5	75 000	33,3	0,200
	54	82 000	35,8	0,160
	53	75 000	34,3	0,230

1) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus pag. 293 der zweiten Auflage.

2) Du fer dans les ponts suspendus, Broschüre 4, 1832.

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser oder Gewichte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividiert durch die ursprüngliche Länge
		im Ganzen	für den Quadratmillim.	
	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
Rundeisen v. Fournchambault	45	54 500	33,5	0,210
	44,5	53 500	34,4	0,224
	49	63 000	33,5	0,225
	54	76 500	33,4	0,223
	54	78 000	34,1	0,243
	55,5	80 500	33,3	0,210
Engl. Rundeisen besserer Qualität	38,8	58 000	38,5	0,145
	38,8	56 000	37,5	0,166
	29	30 900	36,7	0,147
	25,5	23 300	35,8	0,197
	25,5	24 000	36,9	0,197
Engl. Rundeisen (Best cable Crawshay)	39	39 000	32,7	0,214
	32,8	29 400	34,9	0,232
	32	25 500	35,4	0,252
	28,5	21 500	33,7	0,203
	28,5 u. 29	23 000	35,8	0,183
	25,5	17 000	33,3	0,143
	25,5	18 600	36,4	0,217
Eisen zu Ankerketten v. Fournchambault	61	92 000	31,5	0,216
	57	81 000	31,7	
	57	80 400	31,5	0,201
	49	62 500	33,1	0,230
	45	53 900	33,9	0,176
	40,5	52 400	32,9	0,207
	33,5	30 000	34,0	0,195
	33,3	30 200	34,6	0,197
	29 u. 29,7	22 400	33,2	0,188
	29,3	22 700	33,6	0,186
	29 u. 29,5	22 500	33,8	0,186
	28,3 u. 28,7	21 400	33,6	0,190
Eisen zu Ankerketten von Rigny	41,8 u. 42,7	51 000	36,4	0,160
	33,8 u. 34	26 900	29,8	0,226
	33 u. 34	29 200	33,1	0,111
	33 u. 33,5	31 200	35,9	
Eisen zu Ankerketten von Creusot	63	102 000	32,8	0,089
	55,5	86 000	35,5	0,230
	37,5	39 500	35,8	0,225
Rundeisen v. Creusot	37,5	36 000	32,6	0,070
	37,5	41 500	36,7	0,218

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser oder Gebierte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte		Ausdehnung dividirt durch die ursprüngliche Länge
		im Ganzen	für den Quadratmillim.	
Eisen zu Ankerketten v. St. Chamond	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm	
	45	58 000	36,5	0,183
	45	57 000	35,8	0,200
Rundeisen, erhalten durch Zusammen-schweißen von Abgängen vom Walzwerk von Guernigny . . . .	45	51 000	32,1	0,241
Rundeisen v. Blechabgängen, von demselben Walzwerk . . . . .	31,3	24 500	31,8	0,241

### Widerstand des Eisenblechs gegen Ausdehnung.

§. 52. Resultate aus den vom Verfasser mit Eisenblech angestellten Versuchen. Bei denselben wurden die Gewichte unmittelbar an die zu prüfenden Bleche gehängt. Die Dimensionen sind mit Genauigkeit gemessen.

Bezeichnung des Eisens.	Länge	Dicke	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	
			im Ganzen	für den Quadratmillim.
Blech, das in der Walzrichtung gezogen wurde . . . . .	Millim	Millim	Kilogr.	Kilogramm
	9	1,5	488	36,1
Dasselbe . . . . .	6,3	1,5	374	39,6
Dasselbe . . . . .	7,3	2,6	823	43,3
Dasselbe . . . . .	8,3	2,4	905	45,4
Dasselbe . . . . .	7,8	1,5	461	39,4
Dasselbe . . . . .	7,3	2,3	686	40,9
Mittel . . . . .	..	..	..	40,8
Blech, das in der zur Walzenrichtung normalen Richtung gezogen wurde . . . . .	6,1	1,0	241	39,5
Dasselbe . . . . .	7,2	2,2	531	33,5
Dasselbe . . . . .	7	1,5	351	33,5
Dasselbe . . . . .	7,3	1,1	316	39,3
Mittel . . . . .	..	..	..	36,4

Die Bleche fingen an, sich merklich auszudehnen, bei Gewichten, die die Hälfte oder zwei Drittel derjenigen betrugten, bei welchen der Bruch erfolgte.

### Widerstand des Eisendraths gegen Ausdehnung.

§. 53. Nach Buffon<sup>1)</sup> wurden zwei Dräthe von 2,26 Millimeter im Durchmesser durch Gewichte von 236 und 242 kil. zerrissen; diese Zahlen entsprechen 60 kil. für den Quadratmillimeter.

§. 54. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Telford.<sup>2)</sup>

Durchmesser der Dräthe in engl. Zoll.	$\frac{9}{70}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$
Zerreißende Gewichte in engl. Pfund.	531	738	277	157	630

Das Mittel entspricht 63 $\frac{1}{2}$ ,6 für den Quadratmillimeter.

§. 55. Resultate aus den Versuchen von Séguin, dem ältern, mit Eisendrath. Die Durchmesser der Dräthe wurden nicht gemessen, sondern aus dem Gewichte eines Drathstücks von 1<sup>m</sup> Länge berechnet, wobei man das Gewicht eines Kubikmeters zu 7780 kil. voraussetzte.<sup>3)</sup>

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Dräthe zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Q. millim.
	Millimeter	Kilogramm	Kilogr.
Burgundischer Drath, Nr. 8, ungleich- mäßig ausgeglühet . . . . .	1,172	41,3	38,2
Derselbe, Nr. 7, sorgfältig ausge- glühet . . . . .	1,062	31,4	36,1
Derselbe, Nr. 18, ungeglühet. . . .	3,366	505,6	56,8
Derselbe, Nr. 7, ungeglühet . . . .	1,062	65,5	73,7
Feiner Eisendrath (Fil de l'Aigle) zu Krämpeln (Karbätschen) ange- wandt . . . . .	0,2294	3,72	89,8
Feiner Eisendrath (Passe-perle), ziem- lich weich . . . . .	0,5917	23,6	85,7
Drath aus einer Fabrik zu Besançon, Nr. 1, weich . . . . .	0,6188	25,96	86,1
" 2, weich . . . . .	0,7078	34,25	87
" 3, brüchig . . . . .	0,7327	34,12	80,8
" 4, brüchig . . . . .	0,838	42,3	76,6
" 5, sehr brüchig . . . . .	0,9115	47,25	72,3
" 6. . . . .	1,022	62,56	76,1
" 7. . . . .	1,08	65,25	71,2
" 8, sehr brüchig . . . . .	1,123	66,75	67,3
" 9, ziemlich brüchig . . . . .	1,293	91,74	69,8

1) Oeuvres de Buffon, partie expérimentale, 4<sup>e</sup> mémoire.

2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 221; oder auch Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 211.

3) Des ponts en fil de fer, pag. 83 und 100.

Bezeichnung des Eisens.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Querschnitt.
Drath aus einer Fabrik zu Besançon,	Millimeter	Kilogramm	Kilogr.
Nr. 10, sehr weich . . . . .	1,435	105	64,8
" 11, sehr weich . . . . .	1,476	100,25	58,6
" 12. . . . .	1,691	124,8	55,5
" 13. . . . .	1,8	145,5	57,2
" 14, sehr weich, unelastisch . . .	2,072	166,5	49,3
" 15. . . . .	2,226	202	51,9
" 16, sehr weich . . . . .	2,489	311	63,9
" 17, ungangz . . . . .	2,695	389	68,1
" 18. . . . .	3,087	617	84
" 19. . . . .	3,492	750	78,2
" 20. . . . .	4,14	874,75	65,7
" 21. . . . .	4,812	1138	62,5
" 22, sehr brüchig . . . . .	5,449	1579	67,7
" 23, weich . . . . .	5,942	1738,5	62,6

§. 56. Resultate aus den Versuchen von Dufour mit Eisendrath. Die Durchmesser der Dräthe sind mit Genauigkeit gemessen. Die folgenden Zahlen sind die Mittelwerthe aus mehreren Versuchen mit jeder Drathsorte. <sup>1)</sup>

Bezeichnung der Dräthe.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Drähte zerrissen wurden	
		im Ganzen	für den Querschnitt.
Drath aus der Fabrik von la Ferrière	Millimeter	Kilogramm	Kilogr.
Nr. 4 . . . . .	0,85	48	84,4
" 13 . . . . .	1,9	196	69,1
" 17 . . . . .	2,75	382	64,3
" 19 . . . . .	3,7	776	72,2
Drath aus der Fabrik von St. Gingolf.			
Nr. 4 . . . . .	0,85	38,5	67,7
" 13 . . . . .	1,9	178	62,8
" 17 . . . . .	2,75	349	49,4
" 19 . . . . .	3,7	644	59,9

§. 57. Aus einigen Versuchen, die bei einer Temperatur von 6 bis 8 Grad unter Null angestellt worden waren, schien hervorzugehen, daß die Kälte den Dräthen einen kleinen Theil ( $\frac{1}{13}$  oder  $\frac{1}{25}$ ) ihrer Kraft benähme; man steckte daher einen Drath aus der Fabrik von la Ferrière, Nr. 4, in ein Futter, worin derselbe bis

1) Description du pont suspendu en fil de fer, construit à Genève, pag. 8 u. figde.

auf  $-22\frac{1}{2}$  Grad abgekühlt und bis auf  $+92$  Grad erhitzt wurde. Diese Temperaturveränderungen schienen keinen merklichen Einfluß auf die Tragfähigkeit des Drathes auszuüben. 1)

§. 58. Die Tragfähigkeit des ausgeglüheten Drathes wurde als etwas geringer, als die Hälfte von derjenigen des ungeglüheten gefunden.

§. 59. Die Tragfähigkeit der oben aufgeführten Dräthe blieb dieselbe, als man sie um einen Cylinder von  $0^m,04$  im Durchmesser wickelte. 2)

§. 60. Versuche von Lamé mit russischem Eisendrath. 3) Der Durchmesser der Dräthe wurde aus dem Gewichte einer bestimmten Länge gefunden, wobei man das Gewicht eines Kubikmeters zu 7600 kil. annahm. Der wahre Werth dieses Gewichtes liegt zwischen 7600 und 7800 Kilogramm.

Nummer der Gewichte	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Dräthe zerissen wurden	
		im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
	Millimeter	Kilogramm	Kilogramm
6	4,999	1457	74,2
7*	4,664	1042	61,0
9	3,743	800,5	72,7
10*	3,197	438,7	54,7
11*	3,086	358,1	47,9
12	2,687	410,2	72,3
13	2,190	376,4	99,9
14	1,902	277,9	97,8
16	1,497	208,7	118,5
17*	1,456	130,2	78,2
19	1,090	89,6	95,9
20	0,935	98,8	143,8

Die mit einem Sternchen bezeichneten Versuche müssen als mangelhaft verworfen werden, da der Drath an der Befestigungsstelle zerriß.

§. 61. Nach den Beobachtungen von Vicat<sup>4)</sup> beträgt die Ausdehnung des Eisendrathes durch eine Kraft von 1 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts,

für den Eisendrath von Nr. 18 . . 0,0000579

" " " " Nr. 17 . . 0,0000536.<sup>5)</sup>

### Widerstand des Gußeisens gegen Ausdehnung.

§. 62. Die folgende Tabelle giebt die Resultate von ver-

1) Description du pont suspendu etc., pag. 23.

2) Dasselbe Werk, pag. 18.

3) Journal des voies de communication, Nr. 12, 1828.

4) Description du pont suspendu construit sur la Dordogne à Argentat, pag. 22.

5) Hierher gehört auch noch, als besonders empfehlenswerth, Wrix Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitäts-Verhältnisse einiger beim Baue der Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendräthe, Berlin 1837. Ein Auszug davon befindet sich im Anhange gegenwärtigen Werkes.



schiedenen Versuchen, die Minard und Desormes 1815 mit cylindrischen Gußstücken anstellten, deren specifisches Gewicht 7,074 betrug.

Nummer der Probestücke	Temperatur nach Celsius	Inhalt der Querschnittsfläche	Gewicht, durch welches die Gußstücke gerissen wurden	
			im Ganzen	ff. d. Quadratmillim.
	Grad	Quadratmill	Kilogramm	Kilogramm
1	— 6	330	3392	10,3
2	— 5	346	3542	10,23
3	— 5	363	3092	8,51
4	— 15	363	3720	10,27
5	+ 60	353	4020	11,39
11*	+ 72	346	3100	8,96
12*	+ 5	346	2720	7,86
13	+ 5	346	3670	10,6
6	+ 3	147	1920	13,06
7	+ 5	165	1920	11,63
8	+ 5	165	2140	13,89
9	+ 5	165	2360	14,3
10*	+ 5	165	1620	9,81

Die mit einem Sternchen bezeichneten Versuche müssen verworfen werden, weil die Gußstücke Blasen zeigten. Läßt man diese Versuche hinweg, so findet man als Mittel aus den ersten acht Versuchen 10<sup>k</sup>,21, und aus den letzten fünf Versuchen 13<sup>k</sup>,22 für den Quadratmillimeter.

§. 63. Resultate aus den Versuchen von Brown<sup>1)</sup> mit Stäben von quadratischem Querschnitte.

Querschnittsseite der Gußstücke	Gewicht, durch welches die Gußstücke gerissen wurden	
	Tonnen	Centner
Engl. Zoll 1 1/4	11	7
	11	
	14	
	16	
	11	10
1		

Der Mittelwerth entspricht 14<sup>k</sup>,2 für einen Quadratmillimeter.

§. 64. Nach den Versuchen von Kennie<sup>2)</sup> beträgt die Festigkeit für quadratische Barren von 1/4 engl. Zoll ins Gevierte, für horizontal gegossenes Eisen . 1166 engl. Pfund

" vertical " " . 1218 " "

Diese Werthe entsprechen 13<sup>k</sup>,1 und 13<sup>k</sup>,7 für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts.

1) Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 222, 224.

2) Philosophical Transactions, 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

### Widerstand des Kupferdraths gegen Ausdehnung.

§. 65. Resultate der 1815 von Minard und Desormes über die Festigkeit des Kupferdraths angestellten Versuche. Das spezifische Gewicht des Kupfers war 8,741.

Bezeichnung der Dräthe.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Dräthe zerissen wurden, für den Quadratmillimeter	Ausdehnung vor dem Zerreißen
Ungeglüheter Drath . . . . .	Millimeter 0,551	Kilogramm 69,4	0,0084
Derselbe . . . . .	1,478	49,4	0,0068
Derselbe . . . . .	1,032	44,6	0,0037
Derselbe, nachdem man denselben in Oel getaucht hatte, welches auf dem Punkte stand, sich zu entzünden . . . . .	0,616	35,7	0,0091
Derselbe, nachdem er 40 elektrische Schläge von einer kleinen Lebdener Flasche erhalten hatte . . . . .	0,616	33,7	0,0018
Ausgeglüheter Drath . . . . .	0,551	24,4	0,164
Derselbe . . . . .	1,032	21	0,167
Derselbe . . . . .	1,478	22,3	0,197
Derselbe, in Dampf von 80° gebracht . . . . .	1,032	21,7	0,154

§. 66. Resultate aus den Versuchen von Dufour<sup>1)</sup> mit Messingdrath.

Bezeichnung der Dräthe.	Durchmesser	Gewicht, durch welches die Dräthe zerissen wurden im Ganzen / f. d. Quadratm.	
		Kilogramm	Kilogramm
Drath, Nr. 4, weich, ließ sich zu Knoten schlingen . . . . .	0,85	48,5	85,2
Derselbe, ausgeglühet . . . . .		23,5	
Drath, Nr. 13, hart, brüchig . . . . .	1,9	117,5	41,4
Derselbe, ausgeglühet . . . . .		84	
Drath, Nr. 13 . . . . .		187,5	66,1
Derselbe, ausgeglühet . . . . .		100,5	

### Widerstand verschiedener Metalle gegen Ausdehnung.

§. 67. Die folgende Tabelle enthält die wichtigsten Resultate aus den Versuchen, welche Minard und Desormes im Jahre 1815 mit cylindrischen Stäben aus Kanonenmetall anstellten, dessen spezifisches Gewicht 8,16 betrug.

1) Description du pont suspendu en fil de fer construit à Genève, pag. 12, 23.

Nummer der Stäbe	Temperatur	Durch- messer	Gewicht, durch welches die Stäbe zerrissen wurden		Ausdehnung, dividirt durch die ursprüngl. Länge
			im Ganzen	f. d. Querschnitt	
1	Reaum.-Gr. — 6	Millimeter 14	Kilogr. 3042	Kilogr. 19,7	0,13
2*	+ 60	14	2692	17,5	
3	— 19	14	3442	22,3	
4	— 15	14	3620	23,5	0,14
5	+ 60	14	2920	19	0,13
6	+ 3	19	6330	22,4	0,15
7	+ 5	19,4	5940	20,1	0,14
8*	+ 5	19,4	5500	18,6	0,09
9	+ 60	19,4	6080	20,6	0,1
10	— 16	19,5	6330	21,2	0,12

Die mit einem Sternchen bezeichneten Stäbe zeigten blasse Stellen. Läßt man die bezüglichen Versuche hinweg, so giebt der Mittelwerth eine Festigkeit von 21 kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts.

§. 68. Nach denselben Ingenieurs beträgt die Festigkeit des Bleis 1 $\frac{1}{4}$  für den Quadratmillimeter bei einer Temperatur von 20°; und die des Zinnes 2 kil. bei einer Temperatur von 220°.

§. 69. Nach den Versuchen von Kennie<sup>1)</sup> beträgt die Festigkeit bei quadratischen Stäben von  $\frac{1}{4}$  engl. Zoll ins Gevierte, für

	Engl. Pfd.	Kilogr. für den Quadratmill.
Hartes Kanonenmetall . . . . .	2273	25,57
Kupfer, gehämmert . . . . .	2212	24,88
Kupfer, gewalzt . . . . .	1192	13,41
Feines Gelbkupfer . . . . .	1123	12,63
Zinn, gegossen . . . . .	296	3,33
Blei, gegossen . . . . .	114	1,28.

§. 70. Resultate aus den vom Verfasser angestellten Versuchen mit Metallstäben, die in der Längsrichtung ausgedehnt wurden.

Bezeichnung des Metalls.	Breite	Dicke	Gewicht, durch welches die Stäbe zerrissen wurden	
			im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
Gewalztes Kupfer . . . . .	Millim. 11,2	Millim. 1,2	Kilogramm 269	Kilogr. 20
Dasselbe . . . . .	11,6	1,8	463	22,2
Mittel . . . . .				21,1
Gewalztes Blei . . . . .	30,4	3,3	166	1,65
Dasselbe . . . . .	20,2	3,3	116	1,74
Dasselbe . . . . .	14,7	3,3	78	1,61
Dasselbe . . . . .	31,2	2,4	63	0,84
Dasselbe . . . . .	29,6	2,4	86	1,21
Dasselbe . . . . .	16,5	2,4	41,3	1,04
Mittel . . . . .				1,35

1) Philosophical Transactions 1818, oder auch Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

Die Kupferstäbe fingen an, sich auszudehnen, bei Belastungen, die ungefähr die Hälfte betrug, die Bleistäbe aber bei Belastungen, die zwischen der Hälfte und zwei Dritteln lagen, desjenigen Gewichts, durch welches die Stäbe zerrissen wurden.

§. 71. Resultate aus den Versuchen von Tremery und Poirier Saint-Brice 1). Die folgenden Zahlen drücken die Festigkeit für einen Quadratmillimeter des Querschnitts aus.

Sehr gutes Schmiedeisen . . . . .	43 <sup>k</sup> ,45
Dasselbe, erhitzt bis zur dunkeln Rothglühhitze . . . . .	7 <sup>k</sup> ,80
Schwarzblech von der besten Qualität . . . . .	40 <sup>k</sup> ,15
Dasselbe . . . . .	38 <sup>k</sup> ,56
Gewalztes Kupfer von vorzüglicher Qual. . . . .	26 <sup>k</sup> ,02.

### Widerstand des Glases gegen Ausdehnung.

§. 72. Resultate aus den Versuchen des Verfassers mit Glasstäben, die in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt wurden.

Bezeichnung des Glases.	Innerer Durchmesser.	Äußerer Durchmesser.	Gewicht, durch welches das Glas zerrissen wurde	
			im Ganzen	f. d. Quadratmillim.
Glasröhre . . . . .	2,3	4,85	44,4	3,1
Dasselbe . . . . .	3,45	7	71,9	2,47
Dasselbe . . . . .	3,45	6,95	65,9	2,3
Dasselbe . . . . .	2,45	5,6	40,4	2,03
Voller Glaszylinder . . . . .		6,45	54,9	1,68
Ein Theil desselben Cylinders		6,55	110	3,26
Voller Cylinder von Krystallglas . . . . .		9,6	164	2,27
Mittel . . . . .				2,48

### Widerstand der Hanfseile gegen Ausdehnung.

§. 73. Nach den Versuchen von Dühamel<sup>2)</sup> nimmt die Tragfähigkeit der Hanfseile in einem etwas schnellerem Verhältniß zu, als ihr Gewicht. Sie nimmt auch in einem schnelleren Verhältniß zu, als die Zahl der Fäden, aus denen die Seile bestehen, was man dem Grunde zuschreiben kann, daß in den dickeren Seilen die Fäden weniger durch die Drehung geschwächt werden.

Bei gleichem Gewichte tragen neue getheerte Seile weniger, als ungetheerte; zieht man das Gewicht des Theers ab, so sind beide fast von gleicher Stärke. Aber der Theer schwächt mit der Zeit die Stärke des Hanfs, und im Allgemeinen sind ungetheerte

1) Annales des mines, 2<sup>e</sup> série, tome III, pag. 513.

2) Traité de l'art de la corderie, oder auch der Artikel cordages in dem dictionnaire de marine de l'Encyclopédie méthodique.

Seile von längerer Dauer, als getheerte, selbst wenn sie abwechselnd angefeuchtet und getrocknet werden. Durch Tränken mit Fett oder Del vermindert man die Tragfähigkeit der Seile, ohne ihnen eine größere Dauerhaftigkeit zu verschaffen.

Als Mittelwerth kann man bei ungetheerten Seilen, deren Durchmesser in Centimetern ausgedrückt, mit  $d$  bezeichnet wird, annehmen:

$400 d^2$  . Kilogramm,

als das Gewicht, durch welches sie zerrissen werden.

§. 74. Nach Coulomb tragen die ungetheerten Seile 50 bis 60 kil. für jeden Faden Kabelgarn (fil de caret); doch darf man sie nie mit mehr, als 40 kil. belasten.

Die getheerten Seile tragen nur  $\frac{2}{3}$  oder  $\frac{3}{4}$  so viel. 1)

§. 75. Die wichtigsten Resultate aus den mit Hanfseilen angestellten Versuchen von Voironfontaine, Hauptmann im franz. Geniecorps. Es wurde bei den Versuchen ein Hebel angewandt. 2)

Bezeichnung des Seilwerks.	Durchmesser	Belastung	Ausdehnung, dividiert durch die ursprüngl. Länge	Tragfähigkeit für den Quadratmillimeter
	Millim.	Kilogramm		Kilogr.
Neuer Greling (Grelin, kleines Kabeltau) aus elsasser Hanf	13	1050 1250	0,17 zerriß	9,5
Dasselbe Tau, die Enden durch eine dreifache Splißung verbunden . . . . .		1048 1128	 zerriß	8,6
Neues dreibräthiges Tau (Aussière) aus lothringerr Hanf . . . . .	14	1090	zerriß	7,1
Neuer Greling aus lothringerr Hanf . . . . .	16	850 1090 1210	0,15 0,17 zerriß	6,04
Neuer Greling aus elsasser Hanf . . . . .	17	848 1648 1808	0,12 0,17 zerriß	8,5
Neues dreibräthiges Tau (Aussière) aus lothringerr Hanf . . . . .	23	850 2450	0,15 zerriß	5,9

1) Mémoires des savants étrangers, tome X, pag. 285.

2) Mémoire sur les ponts de cordages construits à Metz en 1827. Mémorial de l'officier du génie, Nr. 10.

Bezeichnung des Seilwerks.	Durchmesser	Belastung	Ausdehnung durch die ursprüngl. Länge	Tragsfähigkeit für den Quadratmillimeter
	Millim.	Kilogr.		Kilogr.
Neuer Greling aus Isotringer Hanf . . . . .	23	1650 3010	0,11 zerriß	7,3
Altes Tau . . . . .	23	1680	zerriß	4,09
Neuer Greling aus elasser Hanf . . . . .	25	2500 3000	0,14 zerriß	6,3
Dasselbe Tau . . . . .	28	2000 3290	0,14 0,27	
		3710	zerriß	6,0
Dasselbe Tau . . . . .	33	3000 4340	0,13 0,14	
		4480	zerriß	5,4
Dasselbe Tau als Schleife, (ganse) indem die Enden durch eine dreifache Splisung verbunden wurden .		8365	zerriß	5,1
Altes Tau aus Kameelgarn .	34	4000	zerriß	4,4
Neuer Greling aus elasser Hanf . . . . .	40	3255 5635 7119	0,05 0,15 zerriß	5,6
Dasselbe Tau als Schleife, die Enden dreifach gesplis		13700	zerriß	5,5
Neues dreidrähtiges Tau (Aussière) aus elasser Hanf . . . . .	40	3815 6342 7392	0,07 0,13 zerriß	5,9
		4000	0,07	
Dasselbe Tau . . . . .	54	9501 11091	0,14 zerriß	4,85

Seile, welche eine gewisse Belastung einige Minuten lang trugen, ohne nachzugeben, zerrissen, wenn die nämliche Belastung mehrere Stunden dauerte. Die Natur des Hanfes kann bei Seilen von derselben Dicke die Tragsfähigkeit um mehr als  $\frac{1}{4}$  verändern. Die Tragsfähigkeit kann im Mittel auf 5 bis 6 Kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts geschätzt werden; doch darf man Hanfseile höchstens mit der Hälfte dieses Gewichtes belasten.<sup>1)</sup>

1) Die neuesten Versuche über Tragsfähigkeit der Hanfseile (auch Drathseile) sind im Anhang aufgeführt.

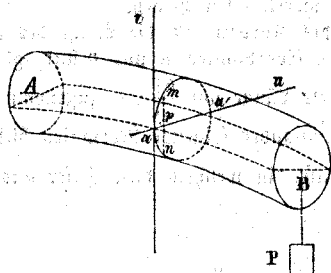
### Drittes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Körpers gegen Biegung, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längsart dieses Körpers ist.**

§. 76. Wenn ein prismatischer Körper in seiner Längsrichtung einen Zug erleidet, so verlängern sich alle Längenelemente oder Fasern. Wenn der nämliche Körper zusammengebrückt und zugleich verhindert wird, durch eine Biegung auszuweichen, so verkürzen sich die Fasern. Sind diese Verlängerungen und Verkürzungen sehr klein, so sind sie den Kräften proportional, wodurch sie hervorgebracht werden. Außerdem sind diese Längenveränderungen natürlich auch der Länge des Körpers proportional.

§. 77. Wird ein prismatischer Körper gebogen, so werden die Fasern, welche nach der convexen Seite hin liegen, verlängert; die Fasern, welche nach der concaven Seite hin liegen, verkürzt; und gewisse Fasern im Innern des Körpers werden ihre Länge unverändert behalten.<sup>1)</sup> Nimmt man nun an, in Uebereinstimmung mit dem, was oben bemerkt ist, daß die Widerstände, welche die Fasern der Verlängerung oder Verkürzung entgegensetzen, diesen Längenveränderungen proportional seien, so kann man sich klar machen, in welcher Weise ein Körper der Biegung widersteht. Es

stelle Fig. 1 einen graden prismatischen Körper dar, welcher mit einem Ende, bei A, eingemauert ist, und durch ein am andern Ende, bei B, aufgehängtes Gewicht P gebogen wird. Betrachten wir jetzt einen beliebigen Querschnitt *mana'*. Es sei *aa'* die horizontale Linie, welche der Querschnitt derjenigen Faserschicht bildet, deren Länge unverändert geblieben ist. Alsdann sind



die Gleichgewichtsbedingungen für den Theil des Prismas, welcher rechts von dem Querschnitte *mana'* liegt, folgende:

1. Zerlegt man die Widerstände, welche in den Fasern durch die Ausdehnung und Zusammendrückung derselben hervorgerufen werden, in verticale und horizontale Kräfte, so muß die Summe der verticalen Kräfte gleich P sein.

<sup>1)</sup> Diese Fasern pflegt man sonst durch den Namen: „neutrale Faserschicht“ zu bezeichnen.

2. Die Summe der horizontalen Kräfte muß gleich Null sein.

3. Die Summe der statischen Momente dieser verticalen und horizontalen Kräfte, so wie des Gewichtes  $P$ , bezogen auf die feste Axe  $aa'$ , muß gleich Null sein. <sup>1)</sup>

Wir nennen jetzt

$E$  die Kraft, deren man bedarf, um ein Prisma, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, bis auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen, oder bis auf die Hälfte seiner ursprünglichen Länge zusammenzudrücken;

$\rho$  den Krümmungshalbmesser der Curve des Körpers (eigentlich der neutralen Faserschicht) für den Punkt, durch welchen der Schnitt  $man'a$  genommen ist;

$u$  die auf  $aa'$  gezählte Abscisse eines beliebigen Punktes in dem Querschnitt  $man'a$ ;

$v$  die Ordinate desselben Punktes, rechtwinklig auf  $aa'$  genommen;

$f_1(u)$  den größten Werth, welchen  $u$  annehmen kann;

$f_1(u)$  die Ordinate  $pn$  der Curve, welche denjenigen Theil des Querschnitts begränzt, in welchem die Fasern ausgedehnt werden;

$f_2(u)$  die Ordinate  $pn$  der Curve, welche den Theil begränzt, in welchem die Fasern zusammengedrückt werden;

$x$  die Entfernung des Querschnitts  $man'a$  vom dem eingemauerten Ende des Prismas;

$a$  die Entfernung zwischen dem Angriffspunkt der Kraft  $P$  und dem eingemauerten Ende; dieselbe ist von der Länge  $AB$  des Körpers nicht merklich verschieden.

Im natürlichen Zustande des Körpers ist die Länge des unendlich kleinen Fasertheils, dessen Coordinaten  $u$  und  $v$  sind, gleich  $dx$ . Nach der Biegung hat diese Länge um  $\frac{dx}{\rho} \cdot v$  zugenommen,

weil der Winkel den zwei auf einander folgende Normalen bilden gleich  $\frac{dx}{\rho}$  ist. <sup>2)</sup> Das Verhältniß, in welchem diese Faser ausgedehnt wurde, ist daher

$$\frac{\frac{dx}{\rho} \cdot v}{dx}, \text{ oder } \frac{v}{\rho}.$$

1) In dem nämlichen Kräfte als in parallelen Ebenen wirkend angenommen werden können.

2) Man sehe: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Navier. Deutsch herausgegeben von Dr. Th. Wittstein. Bd. I, §. 181. Der Winkel, welchen zwei auf einander folgende Normalen bilden ist gleich  $\frac{ds}{\rho}$ , wenn durch  $ds$  das Differential des Bogens bezeichnet wird; im vorliegenden Falle kann  $ds$  mit  $dx$  verwechselt werden, in Betracht der geringen Biegung des Prismas. Das eben citirte Werk wird ferner schlechtthin nur mit „Navier-Wittstein“ bezeichnet werden.



Da der Querschnitt der Faser gleich  $dudv$  ist, so hat man für den Widerstand, den sie der Ausdehnung entgegensetzt,

$$E \cdot \frac{v}{\varrho} \cdot dudv;$$

und als statisches Moment dieses Widerstandes, bezogen auf die Ase  $aa'$ , findet sich

$$E \cdot \frac{v^2}{\varrho} \cdot dudv.$$

Folglich hat man für die Summen der Widerstände der ausge-  
dehnten und zusammengedrückten Fasern, respective:

$$\frac{E}{\varrho} \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv, \text{ und } \frac{E}{\varrho} \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv;$$

und für die Summe der Momente dieser Widerstände, bezogen auf die Ase  $aa'$

$$\frac{E}{\varrho} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\}.$$

§. 78. Um auszudrücken, daß die horizontalen Kräfte sich das Gleichgewicht halten (welche Bedingung die Lage der Ase  $aa'$  bestimmt), hat man

$$\int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v dv = \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v dv.$$

d. h. die Ase  $aa'$  geht durch den Schwerpunkt des Querschnitts *manu*.

§. 79. Um auszudrücken, daß Gleichgewicht gegen Drehung um diese Ase stattfindet, hat man ferner

$$\frac{E}{\varrho} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\} = P(a-x).$$

Dabei sind die verticalen Kräfte vernachlässigt worden, was geschehen darf, sobald die Dicke des Körpers gering in Bezug auf seine Länge ist. Es muß übrigens die Dicke des Körpers gering sein in Bezug auf seine Länge, damit die Verlängerungen und Verkürzungen der Fasern, und die innern Kräfte, die hieraus resultiren, gerade so auftreten, als vorausgesetzt wurde; die folgenden Ergebnisse dürfen daher nur da angewandt werden, wo dieser Bedingung Genüge geschieht.

§. 80. Der Ausdruck

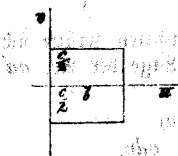
$$E \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\}$$

hat für jeden Körper einen bestimmten Werth, der von der Natur des Körpers und der Gestalt des Querschnitts abhängt. Man nennt diese Größe das *Elasticitätsmoment* (moment de flexion) des Körpers. Wir werden es später mit dem Buchstaben  $\varepsilon$  bezeichnen. Läßt sich die Figur des Querschnitts durch eine horizontale Linie in zwei symmetrische Hälften theilen, so ist diese Linie die Gleichgewichtsaxe, welche die unveränderten (neutralen) Fasern enthält, und von welcher aus das Integral

$$E \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv$$

zu nehmen ist; das Doppelte des Integrals ist dann der Werth des Elasticitätsmomentes. Im entgegengesetzten Falle muß man zuerst die Lage der Gleichgewichtsaxe vermittlest der Bedingungsgleichung im §. 78 bestimmen und sodann einzeln die Werthe der beiden Integrale berechnen, die in dem Ausdruck für das Elasticitätsmoment enthalten sind.

Fig. 2.

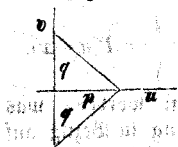


§. 81. Ist die Figur des Querschnitts ein Rechteck, dessen Grundlinie und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden mögen, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes

$$\varepsilon = 2 E \int_0^b du \int_0^{\frac{1}{2}c} v^2 dv = E \frac{bc^3}{12}.$$

Das Elasticitätsmoment ist also der Breite und dem Würfel der Höhe des Körpers proportional.

§. 82. Wird der Querschnitt von zwei congruenten, rechtwinkligen Dreiecken (Fig. 3) gebildet, deren Katheten durch  $p$  und  $q$  bezeichnet werden mögen, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes



$$\varepsilon = 2 E \int_0^p du \int_0^{\frac{q}{p} \cdot u} v^2 dv = E \frac{pq^3}{6}.$$

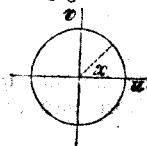
§. 83. Ist die Figur des Querschnitts ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$ , und bildet die horizontale Gleichgewichtsaxe mit der Seite  $b$  den Winkel  $\varphi$ , so erhält man als Elasticitätsmoment 1)

$$\varepsilon = E \cdot \frac{b^2 c \sin^3 \varphi + bc^3 \cos^2 \varphi}{12}.$$

1) Man sieht leicht, daß die Bestimmung der Elasticitätsmomente sich auf diejenige der Trägheitsmomente reducirt. Das Trägheitsmoment für den vorliegenden Fall findet man entwickelt in Rühlmann's Geodynamik, Seite 75 der zweiten Auflage.

Es leistet also ein Stab mit quadratischem Querschnitt der Biegung in jeder Richtung gleichen Widerstand. Ist ferner der Querschnitt ein Rechteck und  $b$  die größere Seite, so ist der Werth des Elasticitätsmomentes am Kleinsten, wenn die Biegung in der Richtung von  $c$  stattfindet.

Fig. 4.



§. 84. Ist der Querschnitt ein Kreis (Fig. 4) mit dem Halbmesser  $r$ , so wird aus dem allgemeinen Ausdrucke des Momentes  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 2E \cdot \int_{-r}^r du \int_0^{\sqrt{r^2-u^2}} v^2 dv = 2E \int_{-r}^r \frac{1}{3} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} \cdot du \\ &= 2E \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{3} \cdot \sin^4 x dx \\ &= E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}.\end{aligned}$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß das Elasticitätsmoment des Quadrats zu dem des eingeschriebenen Kreises sich verhält, wie 1 zu  $\frac{3\pi}{16}$ .

§. 85. Das Elasticitätsmoment einer Röhre ist die Differenz der Elasticitätsmomente der beiden Cylinder. Sind  $r_1$  der äußere und  $r_2$  der innere Halbmesser der Röhre, so ist das Moment

$$\varepsilon = E \frac{(r_1^4 - r_2^4) \pi}{4}$$

1) Statt  $\int_{-r}^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du$  hat man  $2 \int_0^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du$  nach Navier-Wittstein, §. 347.

Setzt man nun  $\frac{u}{r} = \cos x$  so wird  $du = -r \sin x \cdot dx$

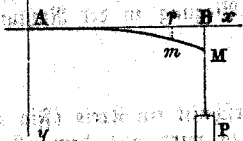
$$(r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} = r^3 \left(1 - \frac{u^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}} = r^3 \sin^3 x;$$

Statt der Grenzen 0 und  $r$  sind  $x = \frac{\pi}{2}$  und  $x = 0$  zu nehmen; also

$$\int_{-r}^r (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} du = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -r^4 \sin^4 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^4 x dx = 2r^4 \frac{1.3}{2.4} \frac{\pi}{2},$$

nach Navier-Wittstein, §. 352; also  $\varepsilon = E \cdot \frac{r^4 \pi \cdot 2.2.1.3}{3.2.4.2} = E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}$ .

**Fig. 5.** §. 86. Betrachten wir wieder wie im §. 77 einen graden prismatischen Körper (Fig. 5), der an einem Ende, bei A, horizontal eingemauert, am andern Ende, bei M, mit einem Gewichte belastet sei.



Man nenne jetzt

$x$  die auf der horizontalen Linie  $AB$  gezählte Abscisse  $Ap$  eines Punktes  $m$  der Curve, welche der Körper nach der Biegung bildet;

$y$  die Ordinate  $pm$  dieses Punktes;

$q$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der Curve;

$P$  das an dem Ende  $M$  aufgehängte Gewicht;

$a$  die horizontale Entfernung  $AB$  der beiden Endpunkte des Körpers;

$f$  die Ordinate  $BM$  des äußersten Punktes der Curve;

$s$  die Länge  $AM$  des Körpers;

$\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente für den Punkt  $M$  mit der Horizontalen bildet;

$\varepsilon$  das Elasticitätsmoment des Körpers, dessen allgemeiner Ausdruck im §. 80 gegeben ist.

Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht ist nach §. 79

$$\frac{\varepsilon}{q} = P(a-x);$$

oder wenn man für  $q$  seinen analytischen Werth setzt 1)

$$\varepsilon \cdot \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = P(a-x);$$

und im Falle die Biegung sehr gering ist, und man sich daher erlauben darf, das Quadrat von  $\frac{dy}{dx}$  zu vernachlässigen, hat man

$$\varepsilon \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x)$$

$$\varepsilon \cdot \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$s = a + \frac{3f^2}{5a}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{3f}{2a}$$

1) Navier-Wittstein, §. 180.

(Um den in den analytischen Rechnungen weniger Geübten das Studium des vorliegenden Werkes zu erleichtern, fügen wir hier die vollständige Ableitung der obigen Formeln hinzu.)

Aus  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = P(a-x) \dots (1)$  folgt

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

Für  $x=0$  wird auch  $\frac{dy}{dx} = 0$ , weil  $\frac{dy}{dx}$  die trigonometrische Tangente des Winkels ausdrückt, welchen die geometrische Tangente mit der Horizontalen bildet. Daraus folgt  $C=0$  und

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right) \dots (2); \text{ woraus}$$

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C'$$

Für  $x=0$ , wird auch  $y=0$ , folglich ist  $C'=0$ , und

$$\varepsilon y = P\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \dots (3)$$

Für  $x=a$ , wird  $y=f$ , daher

$$\varepsilon f = P \cdot \frac{a^3}{3} \quad \text{oder} \quad f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} \dots (4)$$

Für  $x=a$ , wird  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha$ , daher

$$\tan \alpha = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{3f}{2a} \dots (5)$$

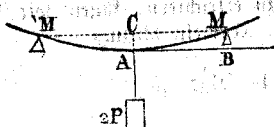
Um  $s$  zu finden, beachte man, daß  $ds = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ . Entwickelt man den Wurzelausdruck und vernachlässigt die höhern Potenzen von  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ , welches bei einer so geringen Biegung, wie sie hier vorausgesetzt wird, geschehen kann, so folgt

$$ds = dx \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \left(ax - \frac{x^2}{2}\right)^2 \right\} \text{ aus (2)}$$

$$s = \int_0^a \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \left(a^2x^2 - ax^3 + \frac{x^4}{4}\right) \right\} dx$$

$$= a + \frac{1}{2} \frac{P^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{4}{15} a^5 = a + \frac{1}{2} \frac{9f^2}{a^6} \cdot \frac{4}{15} a^5 = a + \frac{3f^2}{5a} \dots (6)$$

Fig. 6.



§. 87. Wird ein Körper, Fig. 6, horizontal auf zwei Stützen gelegt, so finden die vorstehenden Gleichungen auf die Curve Anwendung, welche jede der beiden Hälften des Körpers bildet.

Man nenne

- $f$  den Pfeil  $AC$  der Curve des Körpers;
- $2P$  das in der Mitte des Körpers aufgehängte Gewicht;
- $2a$  die Entfernung  $MM'$  der Stützen von einander;
- $2s$  die Länge  $MAM'$  des Körpers zwischen den Stützen;
- $\alpha$  den Neigungswinkel der Curve für den Endpunkt  $M$ .

Nimmt man nun an, daß die Biegung des Körpers sehr gering sei, so hat man

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3},$$

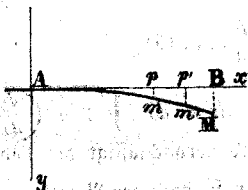
$$f = \frac{2P}{\varepsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48},$$

$$s = a + \frac{3f}{5a},$$

$$\tan \alpha = \frac{3f}{2a}.$$

Der Pfeil der Curve ist proportional dem Gewichte  $2P$  und dem Würfel der Entfernung der Stützen von einander.

Fig. 7.



§. 88. Betrachtet man, eben wie im §. 86, einen graden prismatischen Körper, Fig. 7, der an einem Ende eingemauert ist, so kann man annehmen, daß er in allen Punkten seiner Länge mit Gewichten belastet werde, deren Vertheilung nach einem beliebigen Gesetze geschehe.

Nennt man

- $x, y$  die horizontale und vertikale Coordinate eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve des Körpers;
- $x'$  die Abscisse eines beliebigen Punktes  $m'$  zwischen  $m$  und  $M$ ;
- $a$  die Entfernung  $AB$ ;
- $p'$  das in  $m'$  aufgehängte Gewicht für die Längeneinheit der Abscisse, in der Weise, daß  $p' dx'$  von dem Längenelemente getragen wird, dessen Horizontalprojection gleich  $dx'$  ist ( $p'$  wird als Function von  $x$  ausgedrückt angenommen);
- $f$  die Ordinate des äußersten Punktes der Curve; so hat man

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^a p'(x' - x) dx',$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \int_0^x dx \int_x^a p'(x' - x) dx'$$

$$\varepsilon y = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_x^a p'(x' - x) dx'.$$

§. 89. Tragen alle Längenelemente des Körpers gleiche Gewichte, was der Fall ist, wenn diese Gewichte die der Elemente selbst sind, so erhält  $p'$  einen constanten Werth  $p$ , und man hat

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left( \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left( \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right),$$

$$\varepsilon y = p \left( \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{4f}{3a}$$

Das auf der Länge des Körpers vertheilte Gesamtgewicht ist  $pa$ . Wäre dieses Gewicht in  $M$  aufgehängt, so wäre die Durchbiegung dieses Punktes  $\frac{8}{3}$  der vorigen.

Fig. 8.



§. 90. Wird ein Körper, Fig. 8, horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit Gewichten belastet, die man gleichmäßig auf der ganzen Länge vertheilt, so ist jede Hälfte

in demselben Falle, als ob sie, an einem Ende horizontal eingemauert, zugleich gebogen würde von auf der Länge gleichförmig vertheilten Gewichten und von einer der Summe dieser Gewichte gleichen Kraft, die im entgegengesetzten Sinne am andern Ende wirkt. Man hat also

$$\varepsilon y = pa \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - p \left( \frac{a^2 x^3}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right),$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5a^4}{24},$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{8f}{5a}$$

Wäre das Gewicht  $2pa$  in der Mitte aufgehängt, statt auf der ganzen Länge des Körpers gleichförmig vertheilt zu sein, so

wäre die Durchbiegung in dem Verhältniß 8:5 größer. Diese Resultate finden sich durch die Erfahrung bestätigt.

§. 91. Um die obigen Resultate auf einen gegebenen Körper anzuwenden, muß man nach §. 80 u. folg. an die Stelle von  $\varepsilon$  den Ausdruck für das Elasticitätsmoment setzen, welches dem Querschnitt dieses Körpers zugehört. Darnach hat man für  $E$  (§. 77) den Werth zu setzen, welcher der Natur des Körpers entspricht und durch Beobachtung ermittelt werden muß.

Die geeignetsten Versuche, um diesen Werth zu bestimmen, bestehen darin, einen prismatischen Stab horizontal auf zwei Stützen zu legen, ihn in der Mitte mit einem Gewichte zu belasten, und die Größe der Durchbiegung zu beobachten. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, dessen Seiten durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so hat man (nach §. 81)  $\varepsilon = E \frac{bc^3}{12}$ , und (nach §. 87)

$$f = \frac{2P}{\varepsilon} \cdot \frac{(2a)^3}{48}; \text{ daher}$$

$$f = \frac{2P}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3}, \quad E = 2P \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3 f};$$

wobei  $2a$  die Entfernung der Stützen von einander und  $2P$  das in der Mitte des Stabes wirkende Gewicht bezeichnen.

Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so hat man

$$f = \frac{2P}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi}, \quad E = 2P \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi f}.$$

§. 92. Man muß zuweilen auf das eigene Gewicht Rücksicht nehmen. Dies geschieht, indem man (nach §. 90)  $\frac{5}{8}$  desselben den  $2P$  hinzufügt. Bezeichnet man das eigne Gewicht daher mit  $2H$ , so hat man für den Fall eines rechteckigen Querschnitts

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2H)}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3}, \quad E = \left\{ 2P + \frac{5}{8}(2H) \right\} \frac{(2a)^3}{4bc^3 f};$$

und für den Fall eines kreisförmigen Querschnitts

$$f = \frac{2P + \frac{5}{8}(2H)}{E} \cdot \frac{(2a)^3}{12r^4\pi}, \quad E = \left\{ 2P + \frac{5}{8}(2H) \right\} \frac{(2a)^3}{12r^4\pi f}.$$

§. 93. Es wird endlich noch einleuchten, daß man nicht die absoluten Werthe des in der Mitte des Stabes angebrachten Gewichtes und der entsprechenden Durchbiegung zu kennen braucht; sondern nur die Zunahme der Durchbiegung (des Pfeils der Curve), die einer gegebenen Zunahme der Belastung entspricht. Nennt man  $P$  und  $P'$  zwei auf einander folgende Werthe von  $P$ , und  $f$  und  $f'$  die beiden entsprechenden Werthe von  $f$ , so wird man aus einer der vorhergehenden Gleichungen für einen rechteckigen Querschnitt erhalten

$$E = (2P' - 2P) \cdot \frac{(2a)^3}{4bc^3(f' - f)}$$

Wir werden jetzt die Resultate der bekannten Versuche auf-



führen, nach denen man die Werthe der Constanten  $K$  für die verschiedenen Materialien bestimmen kann. Diese Werthe können genau nur aus solchen Versuchen abgeleitet werden, bei denen die Biegung sehr gering ist. Sobald sich die Ausdehnung oder Zusammendrückung der Fasern der Gränze nähert, wo der Bruch erfolgen muß, hört gewöhnlich der Widerstand der Fasern auf der Ausdehnung oder Zusammendrückung proportional zu sein, wie dies in den §§. 76 und 77 vorausgesetzt wurde. Man sagt also dann, die Elasticitätsgrenze sei überschritten.

### Widerstand der Steine gegen Biegung.

§. 94. Resultate aus den von Tredgold angestellten Versuchen mit Barren rechteckigen Querschnitts von Marmor und Stein, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden.<sup>1)</sup>

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
Weißer Säulenhau-Marmor, sehr rein, specif. Gewicht = 2,706 . . . . .	30	30	30	Pfd.	30
	30	1,075	1,075	10	0,02
				20	0,045
				30	0,06
Portlandstein, braun, specif. Gewicht = 2,113 . . . . .	24	2	1,45	10	0,01
				20	0,015
				30	0,02
				40	0,022
Weißer Sandstein von Long-Annet, specif. Gewicht = 2,212 . . . . .	18	1,45	1,525	20	0,015
				30	0,02
				40	0,022
				50	0,025
				60	0,03

### Widerstand der Hölzer gegen Biegung.

§. 95. Resultate aus den Versuchen von Duhamel<sup>2)</sup> mit Stäben von Eichenholz, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Entfernung zwischen den Stützen war 23 Fuß und das in der Mitte des Stabes wirkende Gewicht betrug 7591 Pf.

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Größe der Durchbiegung
30	30	30
10	9	3½
10	11½	2½
12	13	1

1) The philosophical magazine and journal, vol. 56, pag. 290.

2) Mémoires de l'Académie des sciences, 1768.

Aus diesen Versuchen folgt, mit Hülfe der Formel des §. 92, der mittlere Werth der Constanten  $E$  für Eichenholz zu

$$E = 1\,012\,000\,000 \text{ Kil.}$$

den Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen.

Daraus folgt, daß ein Stab von Eichenholz, der in der Längsrichtung eine Spannung von 1 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts erleidet, um  $\frac{1}{1012}$  ausgedehnt wird.

§. 96. Mittelwerthe aus den Versuchen von Aubry<sup>1)</sup> mit Stäben von Eichenholz, die horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Es wird hier nicht das Detail der Belastungen und der entsprechenden, vom Experimentator beobachteten Durchbiegungen angegeben werden, sondern nur die mittleren Zahlen, aus denen man die Beziehungen zwischen den Belastungen und den Durchbiegungen, die aus diesen Beobachtungen resultiren, ersc hen kann.

Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
Fuß	Zoll	Zoll	Pfund	Linien
12	3	3	169	12
5	1	2,5	35	1

§. 97. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche von Ch. Dupin<sup>2)</sup> mit verschiedenen Holzarten im Jahre 1811 in Korsu angestellt wurden. Die Entfernung der Stützen von einander betrug 2 Meter.

Bezeichnung der Hölzer.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbieg.
	Meter	Meter	Kilogr.	Meter
Eichenes Abbruchsholz, 25 Jahre nachdem es gefällt. . . . .	0,03	0,03	4	0,00585
Cypressenholz, 1 Jahr nach dem Fällen	0,03	0,03	4	0,0072
Buchenholz, desgl. . . . .	0,03	0,03	4	0,0089
Tannees Abbruchsholz, 25 Jahre nach dem Fällen . . . . .	0,03	0,02	2	0,016
	0,02	0,03	2	0,0672
	0,02	0,01	0,5	0,047
	0,01	0,02	0,5	0,0112
	0,03	0,01	1	0,0801
	0,01	0,03	1	0,067
	0,05	0,02	10	0,0305
	0,02	0,05	10	0,095

1) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pag. 55 u. 66.

2) Journal de l'Ecole Polytechnique, 17<sup>e</sup> cahier.

Aus dem ersten Versuche mit Eichenholz findet man die Constante  $E$  zu

$$E = 1\,668\,000\,000 \text{ Kil.}$$

Aus den Versuchen mit Tannenholz findet man im Mittel dieselbe Constante zu

$$E = 1\,029\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 98. Mittelwerthe aus den Versuchen von Rondelet <sup>1)</sup> mit Stäben von Eichen- und Tannenholz. Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte.

Bezeichnung der Hölzer.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
	Zoll	Pfund	Linien
Eichenholz . . .	42	100	11,5
Tannenholz . . .	42	100	11

Aus diesen Versuchen findet man für Eichen- und Tannenholz die Constante  $E$  ungefähr zu

$$E = 13\,000\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 99. Mittelwerthe aus den Versuchen von Barlow <sup>2)</sup> über die Elasticität verschiedener Holzarten.

Sämmtliche Stäbe hielten 2 Zoll engl. ins Gevierte

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung	Zahlen, die der Elasticität proportional sind
		engl. Fuß	engl. Pfd	engl. Zoll	
Teakholz (ind. Eiche) .	0,745	7	300	1,151	9658
Poonholz . . . . .	0,579	7	150	0,822	6760
Eichenholz, englisch .	0,969	7	150	1,590	3495
dto. dto. . . . .	0,934	7	200	1,280	5806
dto. aus Canada . . .	0,872	7	225	1,080	8596
dto. aus Danzig . . .	0,756	7	200	1,590	4766
dto. vom Adria-					
tischen Meere . . . .	0,993	7	150	1,430	3886
Eichenholz . . . . .	0,760	7	225	1,266	6581
Buchenholz . . . . .	0,696	7	150	1,026	5417
Ulmenholz . . . . .	0,553	7	125	1,685	2799
Holz der Weibrauchsfichte	0,660	7	150	1,134	4900
Fichtenholz (Kochtan-					
nenholz) . . . . .	0,637	7	150	0,755	7360

1) Art de bâtir, tome I. pag. 294.

2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 180.

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewichte	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbie- gung	Zahlen, die der Elasticität proportional sind
		engl. Fuß	engl. Pfd	engl. Zll.	
Tannenholz, aus New- england . . . . .	0,553	7	150	0,931	5967
Tannenholz, aus Niga- dto. . . . .	0,753	7	125	0,870	5315
dto. . . . .	0,738	6	150	0,883	3963
dto. von Mar forest . . . . .	0,696	7	125	1,442	2581
dto. . . . .	0,693	6	150	1,006	3478
dto. . . . .	0,703	6	150	1,006	3478
Lärchenholz . . . . .	0,531	7	125	1,885	2465
dto. . . . .	0,522	6	125	0,812	3591
dto. . . . .	0,556	6	150	0,831	4211
dto. . . . .	0,560	6	150	0,831	4211
Sparrn aus Norwe- gen (Tannenholz)	0,577	6	200	0,800	5832

Die erste Probe von englischem Eichenholz war von geringer Qualität.

Multipliziert man die Zahlen der letzten Columnne mit 175700, so erhält man die Werthe für  $E$ , wenn der Meter zur Längen- und das Kilogramm zur Gewichtseinheit angenommen werden.

Darnach findet man für Eichenholz den größten Werth für  $E$  aus dem Versuche mit Eichenholz aus Canada, wo

$$E = 1\,510\,000\,000 \text{ Kil.}$$

und den kleinsten Werth aus dem Versuche mit Eichenholz vom Adriatischen Meere, wo

$$E = 683\,000\,000 \text{ Kil.}$$

Für Tannenholz findet man den größten Werth aus dem Versuche mit Rothtannenholz, wo

$$E = 1\,293\,000\,000 \text{ Kil.}$$

und den kleinsten Werth als Mittel aus den Versuchen mit Tannenholz aus dem Mar forest in Schottland, wo

$$E = 558\,500\,000 \text{ Kil.}$$

Barlow giebt an einem andern Orte <sup>1)</sup> noch eine Reihe von Versuchsergebnissen über Tannenholz, aus denen im Mittel folgt

$$E = 934\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 100. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche Ebbels und Tredgold <sup>2)</sup> in England über die Biegung des Eichenhol-

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 125

2) Elementary principles of carpentry, pag. 34.

ges anstellten. Die Stäbe wurden horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet; alle hielten einen Zoll engl. im Gebiete.

Bezeichnung des Eichenholzes.	Spezif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
Altes Schiffsholz . . . . .	0,872	engl. Fuß 2,5	engl. Pfd. 127	engl. Zl. 0,5
Junges Eichenholz von King's Langley, Herts . . . . .	0,863	2	237	0,5
Eichenholz von Beaulieu, Hants	0,616	2,5	78	0,5
dto. ein anderes Stück	0,736	2,5	65	0,5
dto. von einem alten Baume	0,625	2	103	0,5
dto. von Riga . . . . .	0,688	2	233	0,5
Englisches Eichenholz . . . . .	0,748	2,5	137	0,5
dto. dto. grünes . . . . .	0,763	2,5	96	0,5
Danziger Eichenholz, ausgetrocknet	0,755	2,5	148	0,5
Eichenholz v. <i>quercus sessiliflora</i>		2	149	0,35
Holz der Steineiche ( <i>quercus robur</i> ) . . . . .		2	167	0,35

§. 101. Mittelwerthe aus den Versuchen, welche von denselben Experimentatoren über die Biegung des Tannenholzes angestellt wurden 1).

Bezeichnung des Tannenholzes.	Spezif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
		engl. Fuß	engl. Z.	engl. Z.	engl. Pfd.	engl. Z.
Nothtannenholz von Riga		18	2	7	103	0,25
dto. v. Langsund in Norwegen	0,640	2	1	1	261	0,5
dto. v. Riga . . . . .	0,480	2,5	1	1	123	0,5
dto. dto. . . . .	0,464	2,5	1	1	116	0,5
dto. v. Memel . . . . .	0,553	2,5	1	1	143	0,5
dto. dto. . . . .	0,544	2,5	1	1	145	0,5
Amerik. Fichtenholz vermuthlich v. d. Weymouthsichte . . . . .	0,460	2	1	1	237	0,5
dto. dto. . . . .	0,407	3	1	1	69	0,5
Weißtannenholz v. Christiania	0,512	2	1	1	261	0,5

1) Elementary principles of carpentry, pag. 34.

Bezeichnung des Laannenholzes.	Spezif. Gewicht.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte.	Größe der Durchbie- gung
		engl. Fuß	engl. 3.	engl. 3.	engl. Pfd.	engl. 34.
Weißtannenholz v. Duerbeck	0,465	2	1	1	180	0,5
Lärchenholz v. Blair in Schottland	0,622	2,5	1	1	93	0,5
do. ausgetrocknet	0,644	2,5	1	1	101	0,5
do. . . . .	0,554	2,5	1	1	112	0,5
do. sehr junges Holz . . .	0,396	2,5	1	1	45	0,5
Schottisches Lan- nenholz . . .	0,529	2,5	1	1	89	0,5
Englisches Weißtan- nenholz . . .	0,555	2,5	1	1	103	0,5

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Biegung.

§. 102. Die folgende Tabelle ist nach den Versuchen auf-  
gestellt, welche im Jahre 1812 Dureau <sup>1)</sup> zu Bordeaux mit Stä-  
ben von Schmiedeeisen anstellte, welche horizontal auf zwei Stützen  
gelegt und in der Mitte belastet wurden. Aus den Resultaten  
wurden die Durchbiegungen für eine Belastung von 10 Kil.  
berechnet.

Bezeichnung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Größe der Durchbie- gung
	Meter	Millimeter	Millimeter	Millimeter
Perigordeseisen. Der Quer- schnitt war ein gleichsei- tiges Dreieck, dessen Sei- ten 0,0038 hielten. (Die Durchbiegung blieb die- selbe, man mochte den Stab auf eine Seite oder auf eine Kante legen)	3			7,6
Perigordeseisen. . . . .	1	61	5,5	12,57
do. . . . .	0,5	61	5,5	1,71
Engl. Eisen, wie es aus den großen Eisenwerken hervorgeht . . . . .	3,035	34	8,56	136
do. do. . . . .	3,075	8,56	34	13,5
Perigordeseisen . . . . .	2	30	11	24
do. . . . .	1	30	11	3

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 26.

Bezeichnung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Größe der Durchbie- gung
Perigorbeisen, weich, zu Hufeisen bestimmt	Meter 2	Millimeter 70	Millimeter 11,2	Millimeter 9,5
dto. . . . .	1	68	11	1,5
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde.	2	45	12	12
dto. . . . .	2	40	11,5	21
dto. . . . .	1	40	11,5	2,5
dto. . . . .	2	11,5	40	1,67
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde	3	77	14	14,4
Engl. Eisen, mit der Marke B., wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde	1,5	67,8	14,7	2
Perigorbeisen . . . . .	3	25	15	37
dto. . . . .	3	15	25	14
dto. . . . .	1	58	16,3	0,57
dto. . . . .	3	39	19,6	10,8
dto. . . . .	3	19,6	39	2,8
dto. . . . .	2	60	20	2
dto. . . . .	3	60	20	6,6
dto. . . . .	3	20	60	0,75
dto. . . . .	5	120	20	15
Eisen aus dem Departement des Landes . . . . .	2	120	21	1
Perigorbeisen . . . . .	3	39	24,5	6
dto. . . . .	3	24,5	39	2,33
dto. wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde	3	67	26	2,3
dto. . . . .	5	108	30	4,75
dto. . . . .	5	30	108	0,4
dto. . . . .	2,92	31	31	3
Derselbe Stab, auf eine Kante gelegt . . . . .				3,35
Durchmesser in Millimetern				
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège, wie es aus den großen Eisenwerken herborgeht . .	3,69	21,49		48,25
dto. dto. . . . .	2,99	21,51		27,5
Engl. Rundeisen, ebenso .	2,93	23,52		18
Rundeisen aus dem Departement de l'Arriège, ebenso	2,92	26,82		10
Rundeisen a. Bilbao, sehr weich	2,92	31,8		5

Als Mittel erhält man aus diesen Versuchen den Werth der Constanten  $E$  (des §. 77) für Schmiedeeisen zu

$$E = 20\,000\,000\,000 \text{ Kil.}$$

den Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen <sup>1)</sup>.

Berechnet man aus diesem Werthe für  $E$  nach der Formel des §. 92 die Durchbiegungen, so weichen Rechnung und Beobachtung nicht über  $\frac{1}{4}$  von einander ab.

Aus dem obigen Resultate folgt, daß ein schmiedeeiserner Stab, welcher eine Spannung von einem Kilogramm für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts erleidet um  $\frac{1}{20000}$  ausgedehnt wird.

§. 103. Resultate aus den Versuchen von Tredgold <sup>2)</sup> mit Stabeisen, welches horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurde. Die Länge der Stäbe war 6 Fuß engl. und die Entfernung der Stützen von einander  $66\frac{1}{2}$  Zoll.

Bezeichnung des Eisens.	Belastung auf sechs Fuß Länge	Größe der Durchbiegung bei Belastungen in der Mitte von		
		58 Pfund	114 Pfund	170 Pfund
Engl. Quadrateisen 1,25 Zoll stark	33	0,0625	0,1	0,1875
dto. dto. 1,125 Zoll stark	25	0,125	0,25	0,375
dto. dto. 1 Zoll stark	20	0,15	0,32	0,5
Engl. Rundeisen, 1,25 Zoll stark	24	0,125	0,25	0,375
dto. dto. 1 Zoll stark	17	0,25	0,5	0,8
Schwed. Quadrateisen, 1,23. stark	32	0,0625	0,125	0,19
dto. dto. 1,125 Zoll stark	27	0,08	0,161	0,25
dto. dto. 1 Zoll stark	33	0,125	0,25	0,375

Der Werth für  $E$ , welchen man aus den Versuchen mit dem englischen Eisen berechnet, ist von dem obigen, im §. 102 angegebenen Werthe nur sehr wenig verschieden. Aus den Versuchen mit dem schwedischen Eisen berechnet sich  $E$  im Mittel zu

$$E = 23\,470\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 104. Versuch mit einer 38 Zoll langen und 10,4 Pfund schweren Stange Quadrateisen von 1 Zoll Stärke, welche auf zwei Stützen gelegt wurde, die 3 Fuß von einander abstanden (engl. Maße).

1) Essai théorique et expérimental, pag. 51.

2) An essay on the strength of cast iron, pag. 102 der zweiten Auflage.



Belastung in der Mitte.	Größe der Durchbiegung	
	nachdem die Stange so probirt worden war, wie sie aus der Fabrik gekommen	nachdem die Stange vorher mäßig erhitzt und langsam abgekühlt worden war
Pfund	Zoll	Zoll
126	0,05	0,059
352	0,1	0,117
310	0,12	0,145
330	0,13	0,154

Die Belastung von 330 Pfund brachte keine nachtheilige Veränderung hervor, aber 20 Pfund mehr bewirken eine merkliche, bleibende Krümmung; dasselbe bewirkten 10 Pfund mehr bei der aboucirtten Stange.

§. 105. Die nämliche Stange wurde bis auf 212° Fahrenheit erhitzt und bis auf 60° abgekühlt; bei einer Belastung von 300 Pfund schien die Durchbiegung bei der ersten Temperatur um ungefähr  $\frac{1}{20}$  größer zu sein, als bei der zweiten.

### Widerstand des Stahls gegen Biegung.

§. 106. Mittelwerthe aus den Versuchen von Duleau mit Stahlstäben, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Durchbiegungen gehören, wie in §. 102, zu einer Belastung von 10 Kil.

Bezeichnung des Stahls.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Größe der Durchbiegung
	Meter	Millimeter	Millimeter	Millimeter
Engl. Gußstahl mit der Marke Huntsman	0,98	13,3	5,9	32,05
dto. dto. . .	0,98	5,9	13,3	8,4
Cementstahl für Rasirmesser, mit der Marke Fortsman	0,68	14,5	7,8	8
dto. dto. . .	0,68	7,8	14,5	2,1
dto. dto. . .	1,845	25,7	21,6	2,8
dto. dto. . .	1,845	21,6	25,7	2,2
dto. dto. . .	1,845	28,5	21,9	2,6
dto. dto. . .	1,845	21,9	28,5	1,8
dto. dto. . .	1,35	54,8	25,5	0,55
dto. dto. . .	1,35	25,5	54,8	0,27
dto. dto. . .	1,35	52	26,6	0,5
dto. dto. . .	1,35	26,6	52	0,3

Nach diesen Versuchen ist der Widerstand des Stahls geringer, als der des Schmiedeeisens; auch zeigen die Resultate weniger Regelmäßigkeit.

§. 107. Resultate aus einigen Versuchen von Tredgold<sup>1)</sup> mit Stahlstäben, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die folgenden Zahlen sind in englischen Maßen gegeben.

Bezeichnung des Stahls.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbie- gung
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Zoll
Stahl, geschmiedet, zu Drath ausgezogen, gehärtet und bis zu dem Härtegrade einer gewöhnlichen Feile nachgelassen . . . . .	13	0,95	0,375	54 82 110	00,2 00,3 00,4
Weicher Stahl, der von der Feile leicht angegrif- fen wird . . . . .	24	0,92	0,36	18,6 37 47	0,05 0,1 0,127

§. 108. Der erste Stab zeigte die nämliche Biegung bei gleicher Belastung: 1) nachdem der Stahl bis zu einem intensiven Strohgelb angelassen worden war; 2) nachdem er bis zur stahl-blauen Farbe angelassen worden war; 3) nachdem er bis zum Rothglühen erhitzt und langsam abgekühlt worden war, wobei die Belastung von 110 Pfund noch keine bleibende Krümmung bewirkte; 4) nachdem er aus Neue gehärtet und glashart geworden war. In diesem letztern Zustande des Stahls bewirkte eine Belastung von 350 Pfund eine bleibende Durchbiegung von 0,005 Zoll, welche um 0,005 Zoll zunahm, wenn man die Belastung um 10 Pfund vergrößerte. Der Stab brach bei einer Belastung von 580 Pfund.

Der zweite Stab zeigte ebenfalls bei gleicher Belastung die nämliche Biegung: 1) nachdem der Stahl gehärtet worden war, so daß die Feile keinen Eindruck darauf machte; 2) nachdem er bis zu einer gleichmäßigen Strohfärbung angelassen worden war. In diesem Zustande bewirkte eine Belastung von 130 Pfund noch keine bleibende Krümmung; doch bewirkte dies eine Belastung von 150 Pfund. Zerbrochen wurde der Stab von 385 Pfund.

1) Repertory of arts and manufactures, Mai 1823.

### Widerstand des Gußeisens gegen Biegung.

§. 109. Mittelwerthe aus den Versuchen von Rondelet<sup>1)</sup> mit Barren von Gußeisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Sämmtliche Barren hielten einen Zoll ins Gebierte.

Bezeichnung des Gußeisens.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbie- gung
	Zoll	Pfund	Linien
Graues Gußeisen . . . . .	42	312	5,5
Weiches Gußeisen . . . . .	42	312	4,6
Graues Gußeisen . . . . .	21	450	1
Weiches Gußeisen . . . . .	21	450	0,875

Aus den Versuchen mit grauem Gußeisen erhält man für die Constante  $E$  den Mittelwerth

$$E = 9\,029\,000\,000 \text{ Kil.}$$

und aus den Versuchen mit weichem Gußeisen

$$E = 10\,653\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 110. Mittelwerthe aus den Versuchen von Tredgold<sup>2)</sup> mit Barren von Gußeisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. (Englische Maße.)

Bezeichnung des Gußeisens.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbie- gung
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Zoll
Graues, weiches Gußeisen, das von der Feile leicht und vom Hammer we- nig angegriffen wurde .	34	1	1	20	0,01
Gußeisen, gegossen von Hrn. Dowson . . . . .	77	1,5	3	440	0,075
Dieselbe Barre . . . . .	77	3	1,5	360	0,25
Gußeisen, gegossen von Hrn. Bramah (weniger weich als das vorherge- hende) . . . . .	36	0,9	0,9	180	0,183
dto. . . . .	36	0,9	0,9	180	0,189
dto. . . . .	36	0,75	0,975	180	0,255

1) Art de bâtir, tome I. pag. 291.

2) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 45.

Die vom Experimentator als mittleres Resultat dieser Versuche angenommene Regel 1) entspricht einem Werthe für die Constante  $E$  von

$$E = 12\,144\,000\,000 \text{ Kil.}$$

§. 111. Mittelwerthe aus neueren Versuchen von Tredgold<sup>2)</sup> mit Barren von Gußeisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. (Engl. Maße.)

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Barren	Dicke der Barren	Belastung in der Mitte	Größe der Durchbiegung
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Zoll
1) Drei von Bramah gegossene Stücke . . .	36	0,9	0,9	40	0,041
2) Zwei Barren aus altem Eisen von Park . . .	33	1,3	0,65	60	0,1
3) Zwei Barren aus Eisen von Adolphi . . .	33	1,3	0,65	60	0,1
4) Zwei Barren aus Eisen von Alfretou . . .	33	1,3	0,65	60	0,1
5) Zwei Barren von altem Gußeisen . . . . .	33	1,3	0,65	60	0,09
6) Legirung aus gleichen Theilen von altem Park-eisen und gutem, altem Gußeisen . . . . .	33	1,3	0,65	72	0,1
7) Legirung aus Eisen und $\frac{1}{16}$ Kupfer . . . . .	33	1,25	0,675	60	0,1

Eine Belastung von 180 Pfund, welche mehrere Stunden hindurch dauerte, bewirkte bei den drei Stücken unter Nr. 1 nur eine fast unmerkliche Krümmung.

Die Barren unter den Nr. 2, 3 und 4 wurden von Belastungen von 162 Pfund nicht nachtheilig verändert; Belastungen von 182 Pfund bewirkten sehr kleine bleibende Krümmungen.

Die Barren unter Nr. 5 wurden von 180 Pfund gar nicht, von 190 Pfund fast gar nicht nachtheilig verändert.

Die Barren unter den Nr. 6 und 7 wurden von 182 Pfund gar nicht, von 202 Pfund sehr wenig nachtheilig verändert.

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 40. Die von dem Experimentator mit a bezeichneten Zahlen sind die Reciprofen des Widerstandes gegen Biegung. Dividirt man  $12144000$  durch die Zahl  $a$ , so erhält man den zugehörigen Werth für  $E$ , wenn der Nenner als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

2) Dasselbe Werk, pag. 76 und folg. der zweiten Auflage.

Aus den Versuchen unter den Nr. 1, 2, 3 und 4 findet man im Mittel den Werth der Constante  $E$  zu

$$E = 11\,530\,000\,000 \text{ Kil.}$$

#### Viertes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch, wenn die Richtung der einwirkenden Kraft rechtwinklig gegen die Längsaxe dieses Körpers ist.**

§. 112. Werden die Längen-Elemente der Körper sehr wenig ausgedehnt oder zusammengedrückt, so bringen nach §. 76 und 77 gleiche Kräfte auch gleiche Verlängerungen oder Verkürzungen hervor. Bei einem rechteckigen Querschnitt liegen daher die Fasern, deren Länge unverändert bleibt, in der halben Höhe dieses Schnittes. Sobald aber die Längenveränderungen der Fasern beträchtlicher werden, können diese durch dieselbe Kraft mehr oder weniger ausgedehnt, als zusammengedrückt werden, und die unveränderten Fasern werden alsdann derjenigen Seite ferner oder näher rücken, welche durch die Biegung convex wird. Können endlich die Fasern nicht weiter ausgedehnt oder zusammengedrückt werden, ohne sie zu zerreißen, oder zu zerquetschen, so erfolgt der Bruch. Dies geschieht bei den einzelnen Materialien auf verschiedene Weise. Bei den Steinen, dem Glase und den gegossenen Metallen tritt eine plötzliche und vollständige Trennung auf der ganzen Höhe des Querschnitts ein; bei den Hölzern werden die Fasern an der concaven Seite zerquetscht, an der convexen Seite aber unregelmäßig herausgerissen; bei den geschmiedeten Metallen endlich ist der Bruch nicht immer von einer gänzlichen oder theilweisen Trennung begleitet: nur die Gestalt des Körpers wird verändert in Folge von neuen Gleichgewichtslagen, welche die Moleküle in der Nähe des Bruchquerschnitts angenommen zu haben scheinen, ohne dabei ihren Zusammenhang zu verlieren.

Von dem Gleichgewichte zwischen den Kräften, welche den Körper zu zerbrechen streben, und den widerstehenden Kräften; welche in einem beliebigen Querschnitte durch die Ausdehnung und Zusammendrückung der Fasern hervorgerufen werden, hängen die Bedingungen für den Bruch in diesem Querschnitte ab. Um die widerstehenden Kräfte genau zu schätzen, müßte man 1) die Lage der Gleichgewichtsaxe kennen, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, so wie 2) den Ausdruck für die Kraft, welche in einer Faser durch eine beliebige Ausdehnung oder Zusammendrückung hervorgerufen wird. In Ermangelung dieser

Kenntnisse, die man sich nur durch sehr feine Versuche (*expériences délicates*) verschaffen könnte, muß man seine Zuflucht zu Hypothesen nehmen, um wenigstens annähernd richtige Resultate zu erhalten.

§. 113. Die einfachste und im Allgemeinen von der Wahrheit am wenigsten abweichende Hypothese ist die, nach welcher man annimmt, daß die Widerstände der Fasern, welche den Ausdehnungen und Zusammendrückungen derselben proportional sind, so lange die Biegung sehr gering bleibt, dies auch noch in dem Augenblicke seien, in welchem der Bruch erfolgt. In diesem Augenblicke wird daher der Querschnitt des Körpers sich durchaus in demselben Zustande befinden, in welchem er in den §§. 77 u. folg. betrachtet wurde; nur muß man sich vorstellen, daß die am meisten ausge-dehnte Faser an der converen Seite, oder die am meisten zusam-mengebrückte Faser an der concaven Seite in einem solchen Grade aus-gedehnt oder zusammengebrückt werden, daß sie auf dem Punkte stehen, zerrissen oder zerquetscht zu werden.

Die Lage der Gleichgewichtsaxe, in welcher sich die unverän-derlichen (neutralen) Fasern befinden, wird auch hier noch durch dieselbe geometrische Bedingung bestimmt, wie im §. 78. Man nehme daher diese Axc als bestimmt an, und, unter Beibehaltung der sich auf die Fig. 1 beziehenden Benennungen des §. 77, nenne man außerdem

$v$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe von derjenigen Faser an der converen oder concaven Seite des Körpers, welche auf dem Punkte steht, zerrissen oder zerquetscht zu werden;

$R$  die constante Kraft, deren man bedarf, um ein Prisma zu zerreißen, dessen Querschnitt gleich der <sup>2</sup>Flächeneinheit ist.

Beachtet man nun, daß der Widerstand der Fasern in dem Abstand  $v$  von der Axc  $aa'$  gleich  $R\,v\,du$ , und daher der Wider-stand der Fasern in dem Abstände  $v$  von derselben Axc gleich  $\frac{R}{v}\,v\,du$  ist, so erhält man für die Summe der statischen Mo-mente dieser Widerstände, bezogen auf die Axc  $aa'$ , den Aus-druck

$$\frac{R}{v} \left\{ \int_0^b du \int_0^{f_1(u)} v^2 dv + \int_0^b du \int_0^{f_2(u)} v^2 dv \right\}.$$

Wir werden diesen Ausdruck das Bruchmoment des Körpers nennen und ihn durch den Buchstaben  $Q$  bezeichnen.

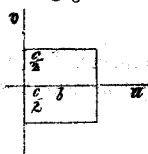
§. 114. Läßt sich der Querschnitt des Körpers in zwei syme-trische Hälften theilen durch eine Linie, die auf der Richtung der von Außen einwirkenden Kraft normal steht, so ist diese Linie die Gleichgewichtsaxe und die beiden Integrale sind einander gleich; man hat also

$$Q = \frac{2R}{v} \int_0^b du \int \frac{f_1(u)}{v^2} dv$$

als Ausdruck für das Bruchmoment.

Vergleicht man diese Formeln mit denen des §. 80 für das Elasticitätsmoment, so wird man erkennen, daß die ersteren aus den letzteren abgeleitet werden können, indem man  $R$  für  $E$  an die Stelle setzt und durch  $v'$  dividirt, d. h. durch den Abstand der Gleichgewichtslaxe, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, von derjenigen Faser, welche ihr am fernsten liegt. Darnach findet man aus den Formeln der §§. 81 und folg. unmittelbar die jetzt aufzuführenden Ausdrücke.

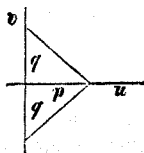
Fig. 9.



§. 115. Ist der Querschnitt ein Rechteck, Fig. 9, dessen Basis und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so ist  $v' = \frac{c}{2}$  und für das Bruchmoment erhält man den Ausdruck

$$Q = \frac{2R}{c} \cdot \frac{bc^3}{12} = R \cdot \frac{bc^2}{6}$$

§. 116. Bilden den Querschnitt zwei congruente rechtwinklige Dreiecke, Fig. 10, deren Seiten durch  $p$  und  $q$  bezeichnet werden, so erhält man für das



Bruchmoment den Ausdruck

$$Q = \frac{R}{q} \cdot \frac{pq^3}{6} = R \cdot \frac{pq^2}{6}$$

§. 117. Ist der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$  in der Lage, daß die Axc, in welcher sich die unveränderlichen (neutralen) Fasern befinden, mit der Seite  $b$  den Winkel  $\varphi$  bildet, so ist das Bruchmoment,

$$Q = R \cdot \frac{b^3 c \sin^2 \varphi + bc^3 \cos^2 \varphi}{6(b \sin \varphi + c \cos \varphi)}$$

Ist der Querschnitt ein Quadrat, so läßt sich dieser Ausdruck reduciren auf

$$Q = R \cdot \frac{b^3}{6(\sin \varphi + \cos \varphi)};$$

und geschieht die Biegung in der Richtung einer der Diagonalen des Quadrats, so hat man

$$Q = R \cdot \frac{b^3}{6\sqrt{2}}.$$

Bei einem Stabe mit quadratischem Querschnitt verhält sich daher der Widerstand gegen den Bruch in der Richtung einer der

Diagonalen zu dem Widerstand gegen den Bruch in der Richtung einer der Seiten des Quadrats, wie  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  zu 1.

§. 118. Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so erhält man für das Bruchmoment den Ausdruck

$$Q = \frac{R}{r} \cdot \frac{r^4 \pi}{4} = R \cdot \frac{r^3 \pi}{4}$$

Die Bruchmomente des Quadrats und des eingeschriebenen Kreises verhalten sich, wie 1 zu  $\frac{3\pi}{16}$ , zu einander; also eben so, wie die respectiven Elasticitätsmomente.

§. 119. Bei einem Rohre, dessen äußerer und innerer Durchmesser mit  $r_1$  und  $r_2$  bezeichnet werden, ist das Bruchmoment des innern, leeren Theils, diesen als ausgefüllt gedacht,

$$\frac{R}{r_1} \cdot \frac{r_1^4 \pi}{4},$$

und daher das Bruchmoment des Rohres,

$$Q = R \cdot \frac{(r_1^4 - r_2^4) \pi}{4r_1}.$$

Die Widerstände, welche ein voller Cylinder und ein Rohr, deren Querschnitte gleichen Inhalt haben, dem Bruche entgegen setzen, verhalten sich zu einander, wie

$$(r_1^2 - r_2^2)^{\frac{3}{2}} \text{ zu } \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1}$$

Sollten aber die Widerstände gleich sein, so müssen sich die Querschnitte verhalten, wie

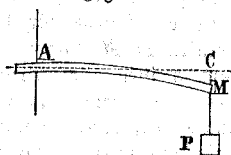
$$\left( \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1} \right)^{\frac{2}{3}} \text{ zu } r_1^2 - r_2^2$$

§. 120. Da der Ausdruck für das Bruchmoment bei einer rechteckigen Bruchfläche bekannt ist, so kann man sich die Aufgabe stellen, in einen Kreis ein Rechteck zu zeichnen, für welches der in Rede stehende Ausdruck ein Maximum werde. Wird der Durchmesser des Kreises gleich 1 gesetzt, so sind die Seiten des verlangten Rechtecks, respective



$$\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ 1).}$$

Fig. 11.



§. 121. Man betrachte jetzt einen prismatischen Stab, Fig. 11, der mit dem einen Ende, bei A, horizontal eingemauert sei, und an dessen andern Ende, bei M, sich ein Gewicht aufgehängt befinde.

Man nenne

- q das Bruchmoment für den Querschnitt des Körpers, wie es sich nach den §§. 113 u. folg. berechnet;
- P das Gewicht, welches an dem Endpunkt M des Körpers aufgehängt wurde;
- a den horizontalen Abstand des Querschnitts A von der Richtung des Gewichtes P;
- s die Länge A M des Körpers;
- f die Durchbiegung oder den Krümmungspfeil C M.

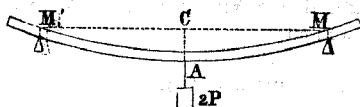
Der Körper ist am meisten zum Bruche in dem Querschnitt A geneigt. Die Gleichgewichtsbedingung für den in Rede stehenden Fall ist

$$q = Pa, \text{ woraus } P = \frac{q}{a},$$

und wenn man annimmt, daß die Curve des Körpers die elastische Linie des §. 86 sei, wo  $s = a + \frac{3f^2}{5a}$ , so hat man

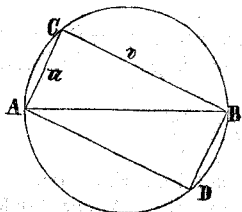
$$P = \frac{q}{s - \frac{3f^2}{5a}}$$

Fig. 13.



§. 122. Man betrachte jetzt einen prismatischen Stab, Fig. 13, welcher auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet worden sei.

1) Fig. 12.



In der nebenstehenden Fig. 12 sei A B C D das verlangte Rechteck und A B ein Durchmesser des Kreises. Die Seiten des Rechtecks sind u und v,  $v = \sqrt{1-u^2}$ ; daher das Bruchmoment  $q = \frac{R}{6} \cdot (uv^2 = u - u^3)$ ; dasselbe wird ein Ma-

ximum für  $\frac{d(u - u^3)}{du} = 1 - 3u^2 = 0$ , woraus folgt

$$u = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } v = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Man nenne

- $2P$  das in der Mitte des Stabes aufgehängte Gewicht;
- $a$  die halbe Entfernung  $CM$  der Stützen von einander;
- $f$  die Durchbiegung oder den Krümmungspfeil  $AC$ ;
- $\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente der Curve für den Punkt  $M$  oder  $M'$  mit der Horizontalen  $MM'$  bildet.

Der Stab ist in der Mitte, bei  $A$ , am meisten zum Bruche geneigt. Der Druck gegen die Stütze  $M$  ist aber (wenn man von der Reibung auf dieser Stütze absieht), eine Kraft, deren Richtung normal zu der Curve ist und deren verticale und horizontale Componente  $P$  und  $P \tan \alpha$  sind. Nimmt man daher an, daß die Curve die elastische Linie des §. 86 sei, wo  $\tan \alpha = \frac{3f}{2a}$ , so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ausdrücken durch die Gleichung

$$Q = Pa + Pf \tan \alpha, \text{ oder } Q = Pa \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right),$$

woraus folgt

$$2P = \frac{2Q}{a + f \tan \alpha} \text{ oder } 2P = \frac{2Q}{a \left(1 + \frac{3f^2}{2a^2}\right)}.$$

Fig. 14.

§. 123. Man betrachte einen prismatischen Stab, Fig. 14, dessen eines Ende eingemauert sei und der mit Gewichten belastet werde, die man auf seiner Länge nach einem willkürlichen Gesetze vertheilt.

Nennt man nun

- $x$  die horizontale Entfernung eines beliebigen Punktes von dem Endpunkte  $A$ ;
- $p$  den als Function von  $x$  ausgedrückten und für die Längeneinheit reducirten Werth des Gewichtes, welches in jenem Punkte zur Wirkung kommt;
- $a$  die Entfernung  $AC$ ;

so hat man, um das Gleichgewicht auszudrücken,

$$Q = \int_0^a p x dx.$$

§. 124. Sind die von allen Längen-Elementen des Stabes getragenen Gewichte einander gleich, so ist  $p$  eine Constante und man hat

$$Q = \frac{pa^2}{2} \text{ und } Pa = \frac{2Q}{a}.$$

Wird daher ein Stab, den man mit dem einen Ende eingemauert hat, von einem gleichförmig auf seiner Länge vertheilten

Gewichte zerbrochen, so geschieht dies ebenfalls durch ein um die Hälfte kleineres Gewicht, wenn man dasselbe an dem andern Ende des Stabes aufhängt.

Fig. 15.

§. 125. Wird, wie im §. 122, ein Stab,

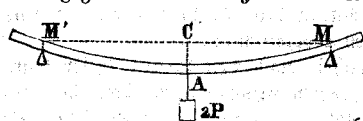


Fig. 15, horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit gleichförmig auf seiner Länge vertheilten Gewichten belastet, wobei durch  $p$  die Belastung  $da$  und  $pa \tan \alpha$

als die verticale und horizontale Componente des Druckes, welchen die Stützen der Längeneinheit bezeichnet wird, so hat man erleiden. Nimmt man daher an, daß die von dem Stabe gebildete Curve die elastische Linie des §. 90 sei, wo  $\tan \alpha = \frac{8f}{5a}$ , so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ausdrücken durch die Gleichung

$$Q = pa \cdot a + pa \tan \alpha \cdot f - pa \cdot \frac{a}{2},$$

$$\text{oder } Q = pa \cdot \left( \frac{a}{2} + f \tan \alpha \right) \text{ oder } \frac{pa^2}{2} \left( 1 + \frac{16f^2}{5a^2} \right);$$

$$\text{woraus } 2pa = \frac{4Q}{a + 2f \tan \alpha}, \text{ oder } 2pa = \frac{4Q}{a \left( 1 + \frac{16f^2}{5a^2} \right)},$$

Bernachlässigt man das Quadrat von  $\frac{f}{a}$ , so folgt, daß ein Stab von einem auf seiner Länge gleichförmig vertheilten Gewichte, so wie von der Hälfte dieses Gewichtes, wenn sie in der Mitte des Stabes wirkt, in gleicher Weise zerbrochen wird.

§. 126. Wenn der horizontal auf zwei Stützen gelegte Stab zugleich mit einem Gewichte  $2P$  in der Mitte und dem constanten Gewichte  $p$  für jede Längeneinheit belastet wird, so läßt sich das Gleichgewicht ausdrücken durch die Gleichung

$$Q = (P + pa) \cdot a + (P + pa) \cdot f \tan \alpha - pa \cdot \frac{a}{2},$$

$$\text{oder } Q = (P + pa) \left( a + f \tan \alpha \right) - \frac{pa^2}{2};$$

woraus folgt

$$2P = \frac{2Q - pa(a + 2f \tan \alpha)}{a + f \tan \alpha}$$

In dem vorliegenden Falle ist, wenn man die Curve des Stabes als die elastische Linie des §. 90 ansieht,

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2pa}{8P + 5pa} \cdot \frac{4f}{a},$$

welcher Werth in die obigen Gleichungen eingesetzt werden muß.

§. 127. Um die vorstehenden Resultate auf einen gegebenen Körper anzuwenden, muß man für  $q$  den Ausdruck für das Bruchmoment substituiren, welches nach §. 113 u. folg. dem Querschnitt des Körpers zukommt. Hierauf hat man der Constanten  $R$  einen Werth beizulegen, welcher der Natur des Körpers entspricht und aus den Beobachtungen gefunden werden muß.

Die Versuche, mittelst welcher man den Werth dieser Constanten bestimmt, bestehen darin, einen prismatischen Stab horizontal auf zwei Stützen zu legen, ihn in der Mitte mit immer größeren Gewichten zu belasten und sowohl das zerbrechende Gewicht, als die Durchbiegung (den Krümmungspfeil) in dem Augenblicke vor dem Bruche zu beobachten. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, dessen Seiten durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, so hat man nach §. 115

$$q = R \cdot \frac{bc^2}{6},$$

und nach §. 122, wenn man von dem eignen Gewichte des Stabes absieht,

$$2P = \frac{2q}{a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}},$$

Daher

$$2P = \frac{R \cdot bc^2}{3a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}},$$

woraus

$$R = 2P \cdot \frac{3a \left\{ 1 + \frac{3f^2}{2a^2} \right\}}{bc^2};$$

wobei  $2a$  die Entfernung der Stützen von einander,  $2P$  das in der Mitte des Stabes wirkende Gewicht und  $f$  die Durchbiegung bezeichnen.

§. 128. Will man auf das eigne Gewicht des Stabes Rücksicht nehmen, so muß man den Ausdruck für  $2P$  im §. 126 anwenden. Bezeichnet man das eigne Gewicht mit  $2\Pi$ , so erhält man aus jenem Ausdruck

$$2P = \frac{R \cdot bc^2 - 3\Pi(a + 2f \tan \alpha)}{3(a + f \tan \alpha)},$$

woraus folgt

$$R = \frac{3[(2P + 2\Pi)(a + f \tan \alpha) - \Pi a]}{bc^2};$$

man hat aber

$$\tan \alpha = \frac{3P + 2\Pi}{8P + 5\Pi} \cdot \frac{4f}{a}.$$

§. 129. Wenn die Stäbe nur eine geringe Länge besitzen, oder in dem Augenblicke des Bruchs nur eine unbedeutende Krümmung zeigen, so darf man die Glieder der zweiten Ordnung, welche bei Berücksichtigung der Krümmung in den obigen Formeln enthalten sind, vernachlässigen.

Man hat alsdann, wenn man von dem eignen Gewichte des Stabes absieht,

$$2P = R \cdot \frac{bc^2}{3a}, \text{ woraus } R = 2P \frac{3a}{bc^2},$$

und mit Berücksichtigung dieses Gewichtes,

$$2P = R \cdot \frac{bc^2}{3a} - \Pi, \text{ woraus } R = (2P + \Pi) \cdot \frac{3a}{bc^2}.$$

Es sollen jetzt die Versuche aufgeführt werden, die in der Absicht angestellt worden sind, den Widerstand der verschiedenen Materialien gegen den Bruch zu ermitteln, und aus denen sich daher der Werth der Constanten  $R$  bestimmen läßt.

### Widerstand der Steine und Ziegel gegen den Bruch.

§. 130. Bei den Versuchen von Gauthery <sup>1)</sup> zerbrach ein Prisma aus hartem Kalkstein von Givry, welches 18 Linien lang und 8 Linien dick war, und auf zwei Stützen gelegt wurde, welche 18 Linien (?) von einander abstanden, unter einer Belastung von 143 Pfund, welche auf die Mitte des Prismas wirkte. Der Widerstand des weichen Kalksteins von Givry war nur  $\frac{1}{8}$  so groß.

§. 131. Nach den Versuchen von Darlow <sup>2)</sup> wird ein Prisma aus Ziegelsteinmasse, welches 4 Zoll engl. lang und 2 Zoll dick ist, und auf zwei Stützen gelegt wird, welche 3 Zoll von einander abstehen, zerbrochen unter einer Belastung in der Mitte von 343 engl. Pfund für gewöhnlichen alten Ziegelstein,

403	"	"	"	"	neuen	"
440	"	"	"	"	sehr guten	"

§. 132. Resultate aus den Versuchen von Tredgold <sup>3)</sup> mit Prismen aus Marmor und Stein, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die folgenden Zahlen sind in englischen Maßen gegeben.

1) Mémoire sur la charge que peuvent porter les pierres. Journ. de physique, 1774.

2) An essay on the strength and stress of timber, pag. 250.

3) The philosophical magazine and journal, vol. 56, pag. 200.

Bezeichnung des Materials.	Entfernung der Stützen von einander	Breite der Prismen	Dicke der Prismen	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund
Weißer Bildsäulenmarmor, sehr rein, specif. Gewicht = 2,706	30	1,075	1,075	50
	15	1,08	1,05	110
	14	1,075	1,076	130
Portlandstein, braun, specif. Ge- wicht = 2,113 . . . . .	24	2	1,45	100
Weißer Sandstein, specif. Ge- wicht = 2,212 . . . . .	18	1,45	1,525	92
Stein von Dundee, specif. Ge- wicht = 2,621 . . . . .	14	1,45	1,5	414
Sandstein von Craigleith, specif. Gewicht = 2,362 . . . . .	14	1,55	1,55	137
Sandstein aus dem Steinbruch von Hales . . . . .	14	1,55	1,5	123
Sandstein von Long-Annet . .	9	1,525	1,45	160
Derselbe Stein . . . . .	7	1,55	1,55	233
Portlandstein . . . . .	12	2,07	1,55	270
Stein von Bath . . . . .	5,5	1	1	58

### Widerstand des Mörtels gegen den Bruch.

§. 133. Die Bestimmung des Widerstandes gegen den Bruch für verschiedene Mörtelarten mag man nachsehen in den Recherches sur les chaux de construction von Vicat.

### Widerstand der Hölzer gegen den Bruch.

134. Ueber den Widerstand der Hölzer gegen den Bruch ist eine Menge von Beobachtungen veröffentlicht worden. Besonders hervorgehoben zu werden verdienen unter ihnen die Versuche von Buffon 1) mit frisch geschlagenem Eichenholze. Die folgende Tabelle enthält die mittleren Resultate dieser Versuche.

Die Entfernung der Stützen von einander, welche oben mit 2 a bezeichnet wurde, war um  $\frac{1}{12}$  kleiner, als die Längen der in der Tabelle angezogenen Stäbe.

1) Histoire naturelle, partie experimentale, XIe Mémoire.

Gevierte der Stäbe	Länge der Stäbe	Gewicht der Stäbe	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Durchbiegung im Augenblicke des Bruchs.	
4	Fuß	Pfund	Pfund	Zoll	Linien
	7	58	5312	4	0
	8	66	4550	4	2
	9	74	4025	5	2
	10	83	3612	6	2
	12	99	2987	7	0
5	7	92	11525	2	6
	8	101	9787	2	9
	9	116	3309	3	3
	10	130	7125	3	10
	12	155	6075	5	8
	14	177	5300	8	1
	16	207	4350	8	1
	18	232	3700	8	1
	20	261	3225	9	5
	22	281	2975	11	3
	24	309	2162	12	3
	28	362	1775	20	0
6	7	127	18950		
	8	148	15525	2	5
	9	165	13150	2	8
	10	187	11250	3	3
	12	223	9100	4	1
	14	255	7475	4	4
	16	293	6362	5	8
	18	333	5562	7	11
	20	376	4950	9	2
7	8	203	26050	2	8
	9	226	22350	3	0
	10	253	19475	2	10
	12	302	16175	3	2
	14	351	13225	3	11
	16	405	11000	5	0
	18	452	9245	5	8
	20	503	8375	8	2
8	10	331	27750	2	8
	12	396	23450	3	0
	14	460	19775	3	6
	16	526	16375	4	6
	18	593	13200	4	3
	20	662	11480	6	3

Sucht man nach der Formel des §. 128 den Werth für  $R$  mittels der Angaben über den Versuch mit einem Stabe von 6 Zoll ins Gevierte und 10 Fuß Länge, so findet man

$$R = 5\,862\,000 \text{ Kil.}$$

Der Versuch mit einem Stabe von 8 Zoll ins Gevierte und 14 Fuß Länge giebt

$$R = 5\,920\,200 \text{ Kil.}$$

Berechnet man die Werthe für  $R$  aus sämmtlichen Versuchen, so wird man nur solche Differenzen finden, die der Verschiedenheit der Güte der Hölzer oder den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können; doch würde man diese Uebereinstimmung nicht erhalten, wenn man nicht auf das eigne Gewicht der Stäbe und auf die Krümmung Rücksicht nähme, wie dies bei der Ableitung der Formel des §. 128 geschehen ist.

§. 135. Versuche von Belidor <sup>1)</sup> mit Stäben von Eichenholz.

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Bemerkungen
1 Zoll	1 Zoll	18 Zoll	406 Pfund	Nicht eingemauert an den Enden
1 "	1 "	18 "	608 "	Eingemauert mit beiden Enden.
2 "	1 "	18 "	805 "	Nicht eingemauert.
1 "	2 "	18 "	1580 "	Desgl.
1 "	1 "	36 "	187 "	Desgl.
1 "	1 "	36 "	283 "	Desgl.
2 "	2 "	36 "	1585 "	Desgl.
20 Linien	28 Linien	36 "	1660 "	Desgl.

§. 136. Versuche von Rondelet <sup>2)</sup> mit Stäben aus Eichen- und Tannenholz.

Bezeichnung der Hölzer.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Entfernung der Stützen von einander	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Durchbiegung im Augenblicke des Bruchs.
Eichenholz . .	Zoll	Zoll	Zoll	Pfund	Linien
	2	2	24	2304	
	2	2	18	3105	
	2	3	24	5123	
	3	2	24	3475	
	1	1	42	312	22
Tannenholz . .	1	1	21	585	7
	1	1	42	281	22

<sup>1)</sup> Science des ingénieurs, pag. 318.

<sup>2)</sup> Art de bâtir, tome I, pag. 236 der sechsten Auflage, oder tome IV, pag. 71 und 514 der fünften Auflage.



§. 137. Mittlere Resultate aus den Versuchen des Obersten Beaufoy <sup>1)</sup>. Die Stäbe hielten 2 Zoll ins Gevierte, die Entfernung der Stützen von einander war 4 Fuß. (Engl. Maße).

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewicht	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Danziger Eichenholz . . . . .	0,854	Pfund 167
Rigaer Fichtenholz . . . . .	0,537	202
Holz der Weibrauchsfichte . . . . .		272
Englisches Eichenholz . . . . .	0,922	258
Desgleichen . . . . .		211

Der in den §§. 122 u. folg. mit  $\alpha$  bezeichnete Winkel hält ungefähr 69.

§. 138. Mittlere Resultate aus den Versuchen von Peake und Bavailler. <sup>2)</sup> Die Stäbe, welche 2 Zoll ins Gevierte hielten, waren mit dem einen Ende eingeklemmt (eingemauert); die Gewichte, durch welche die Stäbe zerbrochen wurden, waren in einem Abstände von 5 Fuß von jenem Ende angebracht. (Englische Maße).

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewicht	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Rigaer Tannenholz, trocken . . . . .	0,633	Pfund 153
Desgl. feucht . . . . .		172
Nothtannenholz aus Virginien . . . . .	0,558	189
Holz der Weibrauchsfichte . . . . .	0,777	256
Weißtannenholz aus Canada . . . . .	0,678	109
Lärchenholz . . . . .	0,540	150
Danziger Lärchenholz . . . . .	0,648	156
Eichenholz . . . . .	0,782	217
Teakholz . . . . .	0,309	264

Die Durchbiegung betrug im Augenblick des Bruchs ungefähr 14 Zoll.

§. 139. Die folgende Tabelle ist ein Auszug einer andern, welche Barlow <sup>3)</sup> gegeben hat. Sie enthält die mittleren Resultate aus mit verschiedenen Holzarten angestellten Versuchen. Sämmtliche Stäbe hielten 2 Zoll ins Gevierte (Englische Maße).

1) An essay on the strength and stress of timber, pag. 47.

2) Dasselbe Werk, pag. 49.

3) Dasselbe Werk, pag. 178.

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewicht	Entfernung der Stützen von einand.	Belastung in d. Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Durchbiegung im Ausglenk des Bruchs	Zahlen, die dem Bruchwiderstande proportional sind.
		Fuß	Pfund	Zoll	
Teakholz . . . . .	0,745	7	938	4,32	2488
Poonholz . . . . .	0,579	7	846	5,92	2266.
Eichenholz, englisch . . . . .	0,969	7	450	5,90	1205
desgl. desgl. . . . .	0,934	7	637	8,10	1736
desgl. aus Canada . . . . .	0,872	7	673	6,00	1803
desgl. aus Danzig . . . . .	0,756	7	560	4,86	1477
desgl. vom Adriat. Meere . . . . .	0,993	7	526	5,73	1409
Eichenholz . . . . .	0,760	7	772	8,92	2124
Buchenholz . . . . .	0,696	7	593	5,73	1586
Ulmenholz . . . . .	0,553	7	386	6,93	1042
Holz der Weibrauchsfichte . . . . .	0,660	7	622	6,00	1666
Rohtannenholz . . . . .	0,657	7	511	5,83	1368
Tannenholz aus Neuengland . . . . .	0,553	7	420	4,66	1116
desgl. aus Riga . . . . .	0,753	7	422	6,00	1131
desgl. desgl. . . . .	0,738	6	467	6,00	1081
desgl. aus dem Marforerf . . . . .	0,696	7	436	6,00	1168
desgl. desgl. . . . .	0,693	6	561	6,42	1310
desgl. desgl. . . . .	0,703	6	561	6,42	1310
Lärchenholz . . . . .	0,531	7	325	8,58	890
desgl. . . . .	0,522	6	370	5,00	850
desgl. . . . .	0,556	6	501	5,00	1149
desgl. . . . .	0,560	6	510	5,00	1172
Sparren aus Norwegen (Tannenholz) . . . . .	0,577	6	655	4,00	1492

Die erste Probe von englischem Eichenholz war von geringerer Qualität.

Multipliziert man die Zahlen der letzten Columne mit 4217, so erhält man sehr nahe die Werthe der Constanten  $R$ , wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Aus den Versuchen mit Eichenholz erhält man im Mittel

$$R = 6\,435\,000 \text{ Kil.},$$

und aus den Versuchen mit Tannenholz

$$R = 5\,111\,000 \text{ Kil.}$$

§. 140. Versuche von Tredgold<sup>1)</sup> und Ebbeles mit Stäben aus verschiedenen Holzarten, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Sämmtliche Stäbe hielten einen Zoll ins Gebierte. (Englische Maße.)

1) Elementary principles of carpentry, pag. 41.

Bezeichnung der Hölzer.	Spezif. Gewicht	Entfer- nung der Stützen von einand.	Bela- stung in d. Mitte, bei wel- cher der Bruch erfolgte	Durch- biegung im Au- genblicke des Bruchs	Zahlen, die dem Bruch- wider- stande propor- tional sind
Englisches Eichenholz, von einem jungen Baume . . . . .	0,863	2	482	1,87	964
Eichenholz, altes Schiffsholz . . . . .	0,872	2,5	264	1,5	660
desgl. v. einem alten Baume . . . . .	0,625	2	218	1,38	436
desgl. von mittlerer Güte . . . . .	0,748	2,5	284		710
desgl. grünes . . . . .	0,763	2,5	219		547
desgl. aus Riga . . . . .	0,688	2	357	1,15	714
Buchenholz, von mittlerer Güte . . . . .	0,690	2,5	271		677
Erlenholz . . . . .	0,555	2,5	212		530
Platanenholz . . . . .	0,648	2,5	243		607
Feigenmaulbeerbaumholz (Syco- more) . . . . .	0,590	2,5	214		535
Kastanienbaumholz, grünes . . . . .	0,875	2,5	180		450
Eichenholz, v. einem jungen Baume . . . . .	0,811	2,5	324	2,5	810
desgl. von mittlerer Güte . . . . .	0,690	2,5	254		635
desgl. . . . .	0,753	2,5	314	2,38	785
Almenholz, gemeines . . . . .	0,544	2,5	216		540
desgl. grünes (wied. gen.) . . . . .	0,763	2,5	192		480
Akazienholz, grünes . . . . .	0,820	2,5	249		622
Mahagoniholz, spanisches, trocken . . . . .	0,852	2,5	170		425
desgl. aus Honduras, trocken . . . . .	0,560	2,5	255		637
Nußbaumholz, grünes . . . . .	0,920	2,5	195		487
Pappelholz von der italienischen Pappel . . . . .	0,374	2,5	131		327
desgl. von der Silberpappel . . . . .	0,511	2,5	228	1,5	570
Weidenholz . . . . .	0,405	2,5	146	3	365
Birkenholz . . . . .	0,720	2,5	207		517
Cedernholz vom Libanon, trocken . . . . .	0,486	2,5	165	2,75	412
Tannenholz aus Riga . . . . .	0,480	2,5	212	1,3	530
desgl. aus Memel . . . . .	0,553	2,5	218	1,15	545
desgl. aus Langesund (Nor- wegen) . . . . .	0,639	2	396	1,125	792
desgl. aus Schottland . . . . .	0,529	2,5	233	1,75	582
desgl. . . . .	0,460	2,5	157		392
Weißtannenholz aus Christiania . . . . .	0,512	2	343	0,937	686
desgl. aus Amerika . . . . .	0,465	2	285	1,312	570
desgl. aus England . . . . .	0,555	2,5	186		465
Fichtenholz aus Amerika, von der Weymouthsfichte . . . . .	0,460	2	329	1,125	658
Lärchenholz, eine ausgesuchte Probe . . . . .	0,640	2,5	253	3	632
desgl. von mittlerer Güte . . . . .	0,622	2,5	223		557
desgl. von einem sehr jungen Baume . . . . .	0,396	2,5	129	1,75	322

Multiplieirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 12651, so erhält man aus jedem Versuche den resultirenden Werth der Constanten  $R$ , wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Doch gelten diese Werthe ohne Berücksichtigung des Gewichtes der Stäbe und der Krümmung.

Aus den Versuchen mit Eichenholz erhält man im Mittel

$$R = 8\,501\,000 \text{ Kil.},$$

und aus den Versuchen mit Tannenholz,

$$R = 7\,097\,000 \text{ Kil.}$$

§. 141. Versuche von George Buchanan <sup>1)</sup> über die Biegung und den Bruch des Fichtenholzes (Memel fir). Die Entfernung der Stützen von einander betrug 5 Fuß. (Englische Maße.)

Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung in der Mitte	Durch- biegung	Bemerkungen.
Zoll 2	Zoll 2	Pfund 170	Zoll 0,5	
		357	1	Ward nach der Entlastung wieder vollkommen grade.
		442	1,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{8}$ Zoll.
		510	1,7	
2	2	595		Brach.
		170	0,5	
		344	1	Wie oben.
		450	1,5	Wie oben.
3	2	510		Brach.
		255	0,5	
		527	1	
		680		Begann zu brechen.
2	3	850		Brach.
		357	0,5	
		722	1	Ward nach der Entlastung wieder vollkommen grade.
		1045	1,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{15}$ Zoll.
4	2	1190	2	Brach.
		340	0,5	
		654	1	
		1037	1,5	Brach.
2	3	1020		Brach.

§. 142. Um die nähern Umstände bei der Biegung und dem Bruch der Hölzer, wie die Ausdehnung und Verkürzung der Fa-

1) The Edinburgh philosophical journal, part XII, 1825.

fern und die Lage der neutralen Faserschicht, zu erforschen, sind von Ch. Dupin Versuche angestellt worden, deren Resultate indeß noch nicht bekannt sind. Barlow theilt über diesen Gegenstand in seinem oben citirten Werke einige Untersuchungen mit, welche zeigen, daß in einem Holzstabe, wenn derselbe immer mehr gebogen wird, die Zusammenrückung der Fasern an der concaven Seite größer ist, als die Ausdehnung der Fasern an der couveren Seite. Beim Beginn der Biegung ist das Verhältniß der Verkürzung der einen zur Verlängerung der andern der Einheit gleich, und es wächst nach und nach, bis es gleich 1,7 wird. Die neutrale Faserschicht nähert sich allmählich der couveren Seite. Barlow beobachtete sie bei den Stäben, mit welchen er seine Versuche anstellte, im Augenblicke des Bruchs gewöhnlich in  $\frac{5}{8}$  der Höhe des Querschnitts, von der concaven Seite aus gezählt.

Diese Eigenschaft des Holzes läßt sich durch einen bemerkenswerthen Versuch darthun, welchen Duhamel erdacht hat. Er besteht darin, einen Holzstab auf der concaven Seite mit der Säge quer einzuschneiden und den Schnitt mit einem Plättchen von hartem Holze auszufüllen. Die Tragkraft des Stabes nimmt etwas zu, wenn die Säge bis auf  $\frac{1}{3}$  der Dicke eindringt; sie bleibt dieselbe, wenn die Säge ungefähr bis auf die Hälfte eindringt, und sie wird etwas geringer, wenn die Säge bis auf  $\frac{3}{4}$  der Dicke eindringt. Dieser Versuch ist von Barlow mit dem nämlichen Erfolge wiederholt worden.

### Widerstand des Gußeisens gegen den Bruch.

§. 143. Die folgende Tabelle enthält die von Banks <sup>1)</sup> angestellten Versuche. Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte. Die Durchbiegung derselben betrug ungefähr einen Zoll im Augenblicke des Bruchs. (Englische Maßr.)

Entfernung der Stützen von einander	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte	Mittlere Belastung
Fuß	Pfund	Pfund
3	756	756
3	756	
2,5	1008	1008
3	735,5	735,5
3	963	
3	958	972
3	994	
3	864	
3	874	869

1) Treatise on the power of machines, pag. 96.

Aus diesen Versuchen findet man im Mittel den Werth der Constanten  $R$  für Gußeisen zu

$$R = 31\,810\,000 \text{ Kil.}$$

wobei stets der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

§. 144. Mittlere Resultate aus den in Creusot von Masmus<sup>1)</sup> angestellten Versuchen. Die Stäbe, welche mit dem einen Ende eingemauert waren, hielten 0,0812 Meter ins Gebierte. Der Hebelarm des zerbrechenden Gewichtes war 2,11 Meter.

Bezeichnung des Gußeisens.	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Kilogramm
Weißes Gußeisen (Roßeisen) von Creusot, nach dem ersten Schmelzen . . . . .	586
Desgl., graues . . . . .	895
Mittel aus Versuchen mit grauem Gußeisen (Roßeisen) aus verschiedenen Gegenden, ungeschmolzen.	873
Graues Gußeisen (Roßeisen) von Creusot, ungeschmolzen . . . . .	911

Um aus diesen Beobachtungen den Werth für  $R$  zu finden, brachte man, daß wenn  $P$  das zerbrechende Gewicht,  $\Pi$  das Gewicht des Stabes und  $a$  den Hebelarm des Gewichtes  $P$  bezeichnen, man nach den §§. 115, 121 und 124 hat

$$(P + \frac{1}{2} \Pi) a = q = R \cdot \frac{bc^2}{6},$$

woraus

$$R = (2P + \Pi) \cdot \frac{3a}{bc^2}.$$

Wendet man diese Formel auf das mittlere Resultat der Versuche mit grauem Roßeisen an, so erhält man

$$R = 22\,460\,000 \text{ Kil.};$$

doch ist dieser Werth etwas unzuverlässig, weil die Versuche nicht präcis genug beschrieben sind, um überzeugt zu sein, daß die Länge  $a$  des Hebelarms genau berechnet sei, und weil der Einfluß der Krümmung des Stabes vernachlässigt wird.

§. 145. Resultate aus verschiedenen Versuchen, welche in der Schule für Brücken- und Wegbau (Ecole des ponts et chaussées) zu Paris angestellt und von Gauthen<sup>2)</sup> mitgetheilt wurden.

1) La Sidérotechnie, par M. Hassenfratz, tome I, pag. 47.

2) Traité de la construction des ponts, tome II, page 150.

Gebirte der Stäbe	Entfernung der Stützen von ein- ander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Zahlen, die dem Bruchwider- stande proportional sind
Meter	Meter	Kilogramm	
0,0271	0,122	3143	19,3
0,0271	0,244	1943	23,9
0,0541	0,244	9178	14,1
0,0541	0,353	5752	12,8
0,0541	0,244	13006	20,0
0,0541	0,487	7250	21,2

Multiplacirt man die Zahlen der letzten Columnne mit 1 500 000, so erhält man die Werthe der Constanten  $R$ ; als Mittelwerth folgt aus diesen Versuchen

$$R = 28\ 100\ 000\ \text{Kil.}$$

§. 146. Versuche von Rondelet. 1) Die Stäbe hielten einen Zoll ins Gebirte.

Bezeich- nung des Eisens.	Entfernung der Stützen von einander	Belastung in der Mitte, bei welcher der Bruch erfolgte	Mittlere Belastung	Durchbiegung im Augenblicke des Bruchs
	Zoll	Pfund	Pfund	Linien
Graues Roheisen .	42	450	450	6,25
Desgl. . . . .		450		6,75
Weiches Roheisen .	42	650		15,75
Desgl. . . . .		1062	656	14,25
Desgl. . . . .		350		4
Desgl. . . . .		561		10,5
Graues Roheisen .	21	540	795	1
Desgl. . . . .		1050		2
Weiches Roheisen .	21	1650		5,25
Desgl. . . . .		1272	1461	2

Aus dem mittleren Resultate der Versuche mit dem grauen Roheisen findet man für die Constante  $R$  den Werth

$$R = 17\ 973\ 000\ \text{Kil.}$$

Das mittlere Resultat der Versuche mit dem weichen Roheisen giebt für dieselbe Constante den Werth

$$R = 29\ 420\ 000\ \text{Kil.}$$

§. 147. Versuche von G. Rennie<sup>2)</sup> mit Stäben aus Guß-

1) Art de bâtir, tome IV, page 514.

2) Philosophical Transactions, 1818; oder Annales de chimie et de physique, septembre 1818.

eisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Der Flächeninhalt des Querschnitts betrug bei sämtlichen Stäben, mit Ausnahme der beiden letzten, einen Quadrat Zoll. (Engl. Maße.)

Bezeichnung des Eisens.	Gewicht der Stäbe		Entfernung der Stützen von einander		Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Pfd.	Unz.	Fuß	Zoll	Pfund
Stab von einem Zoll ins Gevierte	10	9	3		897
Desgl. . . . .	9	8	2	8	1086
Die Hälfte dieses Stabes . . . . .			1	4	2380
Stab von einem Zoll ins Gevierte, auf eine Kante gelegt . . . . .	9	8	2	8	851
Die Hälfte dieses Stabes . . . . .			1	4	1587
Stab von 2 Zoll Höhe bei $\frac{1}{2}$ Zoll Breite . . . . .	9	5	2	8	2185
Die Hälfte dieses Stabes . . . . .			1	4	4508
Stab von 3 Zoll Höhe bei $\frac{1}{3}$ Zoll Breite . . . . .	9	15	2	8	3588
Die Hälfte dieses Stabes . . . . .			1	4	6854
Stab von 4 Zoll Höhe bei $\frac{1}{4}$ Zoll Breite . . . . .	9	7	2	8	3979
Ein gleichseitiges Prisma, eine Kante nach oben . . . . .	9	11	2	8	1437
Desgl., eine Kante nach unten . . . . .	9	7	2	8	840
Die Hälfte des ersten Stabes . . . . .			1	4	3059
Die Hälfte des zweiten Stabes . . . . .			1	4	1656
Stab, dessen Querschnitt ein 1, welches sich in ein Quadrat von 2 Zoll Seite zeichnen läßt	10	0	2	8	3105
Stab, dessen Querschnitt eine halbe Ellipse, die sich in ein Rechteck zeichnen läßt, welches 4 Zoll hoch und $\frac{1}{4}$ Zoll breit ist . . . . .	7	0	2	8	4000
Stab, dessen Querschnitt eine halbe Parabel, gezeichnet in ein gleiches Rechteck, den Scheitel nach unten			2	8	3860

Nach andern Versuchen, welche mit Stäben angestellt wurden, die man an dem einen Ende horizontal einmauerte und am andern, 2 Fuß 8 Zoll davon entfernten, Ende mit Gewichten belastete, war das zerbrechende Gewicht für

einen Stab von 1 Zoll ins Gevierte . . . 280 Pfd.  
einen Stab von 2 Zoll Höhe bei  $\frac{1}{2}$  Zoll Breite 539 "

Das Resultat für den Stab mit quadratischem Querschnitt, welcher auf eine Kante gelegt wurde, entspricht ganz dem, was im §. 117 über diesen Fall gesagt wurde. Aus den Versuchen mit



Stäben quadratischen und rechteckigen Querschnitts folgt für die Konstante  $R$  im Mittel der Werth

$$R = 38\,580\,000 \text{ Kil.}$$

§. 148. Die folgende Tabelle enthält die Resultate von einigen neueren, von Tredgold<sup>1)</sup> veröffentlichten Versuchen mit gußeisernen Stäben, welche an dem einen Ende horizontal gehalten wurden. Die zerbrechenden Gewichte wirkten an einem mechanischen Hebelarm von 2 engl. Fuß.

Bezeichnung des Eisens.	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Altes Eisen von Park . . . . .	3 Zoll	3 Zoll	Pfund
Eisen von Adelpsi . . . . .	1,3	0,65	184
Eisen von Alfreton . . . . .	1,3	0,65	173
Stab aus alten Gußstücken (Rammeisen) . . . . .	1,3	0,65	153
Legirung aus gleichen Theilen von altem Eisen von Park und gutem altem Gußeisen . . . . .	1,3	0,65	168
Legirung von Eisen mit $\frac{1}{16}$ Kupfer	1,25	0,675	174
			194

Die fünf ersten Versuche geben im Mittel für Gußeisen

$$R = 31\,740\,000 \text{ Kil.}$$

§. 149. Versuche von George Buchanan<sup>2)</sup> mit Stäben aus Gußeisen, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden. Die Entfernung der Stützen betrug 32 Zoll. (Englische Maße.)

Breite der Stäbe	Höhe der Stäbe	Belastung in der Mitte	Durchbie- gung	Bemerkungen.
3 Zoll	3 Zoll	Pfund	3 Zoll	
1	1	357	0,25	
		765	0,5	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{16}$ Zoll. Bruch.
		770		
2	1	714	0,25	
		1062	0,37	Nach der Entlastung blieb eine Durchbiegung von $\frac{1}{16}$ Zoll. Bruch.
		1530		

1) A practical essay on the strength of cast iron, pag. 80 u. folge, der zweiten Ausgabe.

2) The Edinburgh philosophical journal, part XII, 1825.

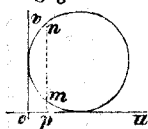
Aus diesen Resultaten läßt sich erkennen, daß der Widerstand gegen den Bruch beim Gußeisen ungefähr fünf Mal so groß ist, wie beim Eichenholze.

Ueber den Widerstand des Schmiedeeisens gegen den Bruch, wenn die Richtung der brechenden Kraft rechtwinklig auf der Länge des Körpers steht, fehlt es noch an guten Versuchen.

### Theorie des Widerstandes gegen den Bruch nach Galilei und nach Mariotte und Leibniz.

§. 150. Nach der Theorie von Galilei legte man die horizontale Gleichgewichtsscheibe durch den tiefsten Punkt

Fig. 16. des Bruchquerschnitts, Fig. 16, und betrachtete die innere Kraft, welche in jedem Punkte dieses Querschnitts hervorgerufen wird, als constant für alle Punkte.



Bennt man nun

$R$  den Widerstand der Flächeneinheit;

$b$  die Breite des Querschnitts;

$f_1(u)$  und  $f_2(u)$  die Werthe  $pm$  und  $pn$  der Ordinate der Begrenzungscurve des Schnitts für dieselbe Abscisse  $u$ ;

$c$  die Höhe des Querschnitts;

so hat man

$$R \int_0^b du \int_{f_1(u)}^{f_2(u)} v dv,$$

als Ausdruck des Widerstandsmomentes gegen den Bruch. Für den Fall, in welchem der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten  $b$  und  $c$  ist, wird aus dem vorstehenden Ausdrucke

$$R \cdot \frac{bc^2}{2}.$$

Nach der Theorie, welche gewöhnlich Mariotte und Leibniz zugeschrieben wird, legte man ebenfalls die horizontale Gleichgewichtsscheibe durch den tiefsten Punkt des Querschnitts, nahm jedoch die innere Kraft, welche in jedem Punkte dieses Schnitts hervorgerufen wird, als proportional dem Abstände dieses Punktes von der Gleichgewichtsscheibe an. Das Widerstandsmoment gegen den Bruch war alsdann

$$\frac{R}{c} \int_0^b du \int_{f_1(u)}^{f_2(u)} v^2 dv;$$

aus demselben wurde für den Fall eines rechteckigen Querschnitts

$$R \cdot \frac{bc^2}{3}.$$

## Bemerkung über die Theorie des Widerstandes gegen den Bruch.

§. 151. Der im §. 112 und folgd. vorgetragenen Theorie liegt die Hypothese zum Grunde, daß die Längen-Elemente im Augenblicke des Bruchs Widerstände leisten, welche der Ausdehnung und Zusammendrückung dieser Elemente proportional sind und die daher für gleiche Ausdehnungen und Zusammendrückungen auch gleich groß sind. Die Lage der Gleichgewichtsaare, welche die unveränderlichen (neutralen) Fasern enthält, wird durch die in den §§. 77 und 78 enthaltene Bedingungsgleichung bestimmt, in der Weise, daß diese Aare sich in der halben Höhe des Querschnitts befindet, wenn der Schnitt in seiner Höhe in zwei symmetrische Hälften sich theilen läßt, wie dies beim Rechteck und beim Kreise der Fall ist.

Stimmte diese Hypothese mit der wirklichen Natur genau überein, so würden die Werthe, welche man für die Constante  $R$  aus den in den §§. 94 und folgd. mitgetheilten Versuchen über den Bruch mittelst der vorhergehenden Formeln findet, durchaus nicht verschieden sein von den Resultaten, die man durch directe Versuche über das Zerreißen oder Zerdrücken (Zerquetschen) der Körper erhält. Findet diese Uebereinstimmung nicht statt, so hat man dies dem Umstande zuzuschreiben, daß die Fasern in dem Augenblicke, welcher dem Bruche eben vorhergeht, der Ausdehnung und Zusammendrückung nicht gleichen Widerstand leisten, weshalb die Gleichgewichtsaare ihre ursprüngliche Lage verläßt, so daß die Ausdrücke für das Bruchmoment nicht dem Zustande des Körpers entsprechen.

Man muß indessen beachten, 1) daß die wichtigsten, vorhin erhaltenen Ergebnisse nichts desto weniger wahr bleiben, so daß die Widerstände für rechteckige Querschnitte stets der Breite und dem Quadrat der Höhe, ebenso, wie für ähnliche Figuren überhaupt stets dem Würfel der homologen Dimensionen proportional sind. Nur bei Querschnitten von verschiedener Gestalt ändern sich die Verhältnisse der Widerstände. 2) In der Praxis wird durchaus nicht gefordert, die respectiven Widerstände der Materialien für denjenigen Zustand zu berechnen, in welchem sie sich kurz vor dem Bruche befinden; im Gegentheil wird, wie man in der Folge sehen wird, nur der Fall in Betracht gezogen, wo die Materialien erst sehr wenig gebogen worden sind und die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wurde, und alsdann zeigt sich der Widerstand in einer Weise, die augenscheinlich den vorhin gegebenen Resultaten gemäß ist.

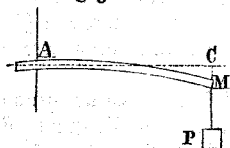
### Bruch eines prismatischen Stabes von sehr geringer Länge.

§. 152. Die obigen Betrachtungen können zufolge dem, was im §. 79 bemerkt wurde, nur so lange ihre volle Anwendung

finden, wie die Länge des prismatischen Stabes die Dimensionen des Querschnitts bedeutend übertrifft; und dies findet in den meisten und wichtigsten Fällen wirklich statt.

Was diejenigen Fälle anlangt, in denen die Länge des prismatischen Körpers die Dimensionen des Querschnitts nur wenig übertrifft, oder gar von diesen übertroffen wird, so beschränken wir uns darauf eine kurze Uebersicht dieses Stoffes zu geben, da noch keine genügende Versuche zur Ergründung desselben angestellt worden sind.

Man betrachte den Stab  $AM$  (Fig. 17) als mit dem einen Ende horizontal eingemauert, und nehme



zuerst an, daß der Faden, an welchem das Gewicht  $P$  hängt, in der Ebene des Querschnitts  $A$  befestigt sei, d. h. in dem Schnitte, mit welchem die Einmauerung des Stabes beginnt. Das Gewicht  $P$  wird alsdann

nicht den Theil  $AM$  des Stabes zu biegen suchen, sondern es wird suchen, diesen Theil von dem eingemauerten zu trennen, und die Fäsern, welche diese beiden Theile vereinigen, werden um eine gewisse Größe ausgedehnt werden, bevor jene Trennung eintritt. In der Natur der Sache liegt es, die zur Hervorbringung dieser Ausdehnung erforderliche Kraft 1) den Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes und 2) der Größe der in Rede stehenden Ausdehnung proportional anzunehmen. Ist daher der Querschnitt ein Rechteck, dessen horizontale und verticale Seite respective mit  $b$  und  $c$  bezeichnet werden, und nennt man ferner

$\delta$  die (als sehr gering vorausgesetzte) verticale Ausdehnung der Theile des Stabes, welche sich in dem Querschnitt  $A$  befinden;

$D$  einen eigenen, constanten Coefficienten für den Widerstand des Stabes gegen das Hinweggleiten eines Theiles über den andern in der Ebene des Querschnitts;

so wird die in Rede stehende Kraft ausgedrückt durch  $D\delta bc$ . Man hat also für das Gleichgewicht die Gleichung

$$P = D\delta \cdot bc$$

zu schreiben, und man wird einsehen, daß der Bruch erfolgen muß, sobald die Ausdehnung  $\delta$  weit genug vorgeschritten ist, um die Trennung der beiden Theile des Stabes zu veranlassen. Das zerbrechende Gewicht würde demnach dem Inhalt der Querschnittsfläche proportional sein.

§. 153. Man kehre jetzt zu der Betrachtung des Stabes zurück, dessen einer, links von  $A$  befindlicher Theil eingemauert ist, während hingegen der andere, rechts von  $A$  befindliche Theil frei ist und an seinem Endpunkte  $M$  ein Gewicht  $P$  vertical abwärts wirkt. Zufolge dem, was in §. 77 bemerkt wurde, befindet sich

der Theil  $AM$  im Gleichgewicht, wenn die innern, in dem Querschnitt  $A$  durch die Wirkung des Gewichtes  $P$  hervorgerufenen Kräfte verticale Componenten haben, deren Summe gleich  $P$  ist, und wenn ferner die horizontalen Componenten dieser Kräfte dem Drehvermögen des Gewichtes  $P$ , bezogen auf die horizontale Arc, welche den Querschnitt der neutralen Faserschicht bildet, das Gleichgewicht halten. Bisher wurde nur dieses letztere Gleichgewicht betrachtet, in dem vorliegenden Falle aber wird es nothwendig, das Gleichgewicht der verticalen Kräfte ebenfalls in Betracht zu ziehen. Nimmt man nun an, daß diese verticalen Kräfte in dem Querschnitte so hervorgerufen werden, wie es dem, was oben darüber gesagt wurde, gemäß ist (worin man sich nicht sehr von der Wahrheit entfernen kann, besonders so lange die Länge des Stabes sehr gering ist), so hat man zuerst die Gleichung

$$P = D\delta \cdot bc.$$

Was das Gleichgewicht gegen Drehung anlangt, so nenne man  $q$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $A$  der Curve, welche die Längencurve des Stabes bildet; man hat alsdann, um dieses Gleichgewicht auszudrücken, da nach §. 86 ja  $P(a - x) = \frac{E}{q}$  ist, hier die Gleichung

$$Pa = \frac{E}{q} \cdot \frac{bc^3}{12},$$

wobei  $a$  die Länge  $AM$  bezeichnet und  $E$  die Bedeutung hat, welche dafür im §. 77 angegeben wurde.

Erträgt der Stab die Wirkung des Gewichtes  $P$  ohne zu brechen, so hat man das Gleichgewicht in dem Querschnitt  $A$  als durch die beiden obigen Gleichungen ausgedrückt anzusehen. Ist die Länge des Stabes fast gleich Null, so ist nur die erste in Betracht zu ziehen; ist hingegen diese Länge sehr groß, so ist nur die zweite in Betracht zu ziehen. In den Fällen, welche zwischen diesen Extremen liegen, muß man auf beide Gleichungen Rücksicht nehmen, und man wird aus ihnen respective die Werthe der Größen  $\delta$  und  $q$  erhalten, welche für den Befestigungspunkt  $A$  respective den Grad der Ausdehnung der Molecüle in verticaler Richtung, sowie den Grad der Biegung angeben.

§. 154. Was den Bruch anlangt, so beachte man, daß wir denselben, in Gemäßheit der Betrachtungen in §. 112, als bedingt ansehen durch einen gewissen Grad von Ausdehnung derjenigen Theile des Stabes, deren Spannung am größten geworden ist. Setzen wir nun den Gleichgewichtszustand des Querschnitts  $A$  als mit den früheren Betrachtungen übereinstimmend voraus, so ist klar, daß, als Folge der verticalen Senkung des Theils  $AM$ , so wie der Biegung desselben, die Fasern an der obern Seite des Stabes in dem Querschnitt  $A$  um einen Bruch ihrer ursprünglichen

Länge ausgedehnt sein werden, welcher sich ausdrücken läßt durch <sup>1)</sup>

$$\sqrt{\delta^2 + \left(\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{2} c\right)^2};$$

oder, wenn man für  $\delta$  und  $q$  ihre Werthe aus den obigen Gleichungen einführt, durch

$$\frac{P}{bc} \sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2 c^2}}.$$

Da nun die Größe dieser Ausdehnung den Bruch bedingt, so folgt daraus, daß das Gewicht, welches den Stab zerbrechen würde, dem Ausdrücke

$$\frac{bc}{\sqrt{\frac{1}{D^2} + \frac{36a^2}{E^2 c^2}}}$$

proportional sein muß.

An den Grenzen ist diese Formel vollkommen gültig: ist die Länge des Stabes sehr gering, so kann man das Glied, welches mit dem Verhältnisse  $\frac{a^2}{c^2}$  behaftet ist, vernachlässigen, und der Bruchwiderstand ist dann dem Ausdrücke  $bc$  proportional; ist die Länge sehr groß im Verhältniß zur Höhe  $c$ , so kann man hingegen das Glied  $\frac{1}{D^2}$  vernachlässigen, und der Bruchwiderstand ist dann dem

Ausdrücke  $\frac{bc^2}{a}$  proportional, wie in diesem Falle die Erfahrung lehrt. In den mittleren Fällen wird die in Rede stehende Formel wahrscheinlich sehr nahe mit dem Naturgesetze übereinstimmen, vorausgesetzt, daß es gelänge, die Constanten  $\frac{1}{D^2}$  und  $\frac{36}{E^2}$  so zu bestimmen, daß sie den Resultaten entsprechen, welche man durch Versuche auf directem Wege erhält.

§. 155. Untersucht man statt eines mit dem einen Ende eingemauerten Stabes, ein Prisma, welches horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird, so lassen sich die obigen Betrachtungen auch hier anwenden, wenn man mit  $a$  die Hälfte der Entfernung der Stützen von einander und mit  $P$  die Hälfte des in der Mitte des Stabes wirkenden Gewichtes bezeichnet.

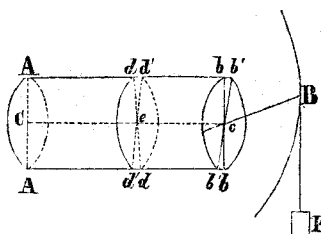
1) Nach §. 77 beträgt die Ausdehnung der Längeneinheit durch die Biegung  $\frac{v}{q}$ ; diese Ausdehnung wird als horizontal angenommen und giebt daher mit der verticalen Ausdehnung  $\delta$  componirt die folgende resultirende Ausdehnung, wobei im vorliegenden Falle noch  $\frac{c}{2}$  statt  $v$  zu setzen ist.

Fünftes Kapitel.

Widerstand eines prismatischen Körpers gegen die Torsion.

§. 156. Um die Theorie dieser Art des Widerstandes aufzustellen, wird man sich ähnlicher Betrachtungen bedienen können, wie bei der Theorie des Widerstandes gegen Biegung.

Es sei Fig. 18 ein prismatischer, mit dem einen Ende horizontal eingemauerter Stab, an dessen anderem Ende eine Kraft  $P$  mit dem Hebelarm  $Bc$  wirkt, welche den Stab um die Ase  $Cc$  zu drehen sucht. Man nehme an, daß durch die Wirkung der Torsion ein Durchmesser  $bb'$  des Endquerschnitts, auf welchen die Kraft  $P$  zunächst wirkt, nach  $b'b'$  gekommen sei; der zu  $bb$  parallele Durchmesser  $AA$  des eingemauerten Endes wird keine



Verdrehung erlitten haben, und man wird einsehen, daß alle Durchmesser der zwischenliegenden Querschnitte, wie z. B.  $dd$ , eine Verdrehung erlitten haben werden, welche ihrer Entfernung von dem eingemauerten Ende proportional ist. Durch diese Verdrehungen werden die Molecüle, welche in zwei auf einander folgenden Querschnitten vor der Torsion sich berührten, um eine gewisse Größe von einander entfernt worden sein, die man proportional annehmen kann: 1) der Entfernung dieser Molecüle von der Ase  $Cc$  und 2) der Differenz der von jedem Halbmesser in den zwei auf einander folgenden Querschnitten durchlaufenen Winkel, welche Differenz im geraden Verhältniß zu dem Winkel  $beb'$  und im umgekehrten Verhältniß zu der Länge  $Cc$  des Stabes steht. Setzt man die Torsion als sehr gering voraus, so kann man die Widerstände, welche durch diese Verdrehungen hervorgerufen werden, den Verdrehungen selbst proportional annehmen. Uebrigens muß das Moment des Widerstandes in jedem Querschnitte des Stabes dem Momente des Gewichtes  $P$  gleich sein. Man betrachte jetzt einen beliebigen Querschnitt und nenne

- $a$  die Länge des Stabes von dem festen Querschnitt  $AA$  bis zu dem Querschnitt  $bb$ , in welchem die Kraft  $P$  wirkt;
- $\theta$  den, als sehr klein vorausgesetzten, Winkel  $beb'$ , welchen die Durchmesser dieses Endquerschnitts durchlaufen;
- $r$  die Entfernung eines beliebigen Punktes in einem Querschnitte von dem Mittelpunkte  $e$  dieses Schnitts;

$\varphi$  den Winkel, welchen die Linie  $r$  mit dem Durchmesser dieses Querschnitts bildet;

$r=f(\varphi)$  die Gleichung der Curve, welche den Umfang des Schnittes bildet;

$R$  den Hebelarm  $BC$ , an welchem das Gewicht  $P$  wirkt um die Torsion hervorzubringen;

$G$  einen constanten, jedem Materiale eigenthümlichen Coefficienten für den Widerstand gegen die Torsion.

Da der Inhalt des Flächenelementes an dem Endpunkte des Halbmessers  $r$  in dem in Rede stehenden Querschnitt gleich  $rd\varphi dr$  oder  $d\varphi \cdot r \cdot dr$  ist, so hat man

$$G \cdot \frac{\theta}{a} d\varphi \cdot r^2 dr$$

als Ausdruck für den Widerstand dieses Elementes gegen die Torsion; und um das Gleichgewicht zwischen der Summe der Momente aller ähnlichen Widerstände und dem Momente der Kraft  $P$  auszudrücken hat man die Gleichung

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r^3 dr,$$

oder

$$PR = \frac{G\theta}{a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot [f(\varphi)]^4 d\varphi.$$

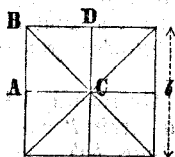
§. 157. Ist der Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser  $r$ , so hat man  $f(\varphi) = r$ , und die vorstehende Formel giebt

$$PR = \frac{G\theta}{a} \cdot \frac{r^4}{4} \cdot 2\pi = G \cdot \frac{r^4 \pi}{2a} \cdot \theta,$$

woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{2aR}{r^4 \pi}.$$

Fig. 19.



§. 158. Bei einem quadratischen Querschnitt (Fig. 19), dessen Seite gleich  $b$  ist, hat man für eins der acht gleichen Dreiecke den Ausdruck für den Widerstand gegen die Torsion zu suchen. Die Gleichung der Geraden  $AB$  ist  $r = \frac{b}{2} \cos \varphi$ . Es ist übrigens

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$



und daher

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{3}.$$

Das Widerstandsmoment (Torsionsmoment) des Dreiecks *ABC* ist also

$$\frac{G \cdot \theta}{a} \cdot \frac{b^4}{4 \cdot 16} \cdot \frac{1}{3},$$

und daher das Torsionsmoment des Quadrats

$$PR = G \cdot \frac{b^4}{6a} \cdot \theta,$$

woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{6aR}{b^4}.$$

Es verhält sich demnach der Widerstand des Quadrats zu dem des eingeschriebenen Kreises wie  $1 : \frac{3\pi}{16}$ .

§. 159. Für den Fall eines rechteckigen Querschnitts haben Untersuchungen, die sich auf Betrachtungen stützen, welche hier nicht wiedergegeben werden können, gelehrt, daß die obige Hypothese, nach welcher der Widerstand jedes Flächenelementes des Querschnitts der Entfernung dieses Elementes von dem Mittelpunkte des Schnitts proportional angenommen wurde, nicht genau mit der Wahrheit übereinstimmt. Man muß sich für diesen Fall einer genaueren Methode bedienen, nach welcher man für das Torsionsmoment eines homogenen Stabes mit rechteckigem Querschnitt, dessen Breite und Höhe respective durch *b* und *c* bezeichnet werden, den Ausdruck 1)

- 1) Diesen Ausdruck giebt Cauchy in den Exercices de mathématiques, 4e année, pag. 59.

Die Differentialgleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung fester Körper ausdrücken und die Grundlage der in Rede stehenden Untersuchungen abgeben, hat, für den Fall eines homogenen Körpers, zuerst der Verfasser gegeben in einer Abhandlung, die der Akademie der Wissenschaften zu Paris im Jahre 1821 vorgelegt und in dem Bande VII ihrer Memoiren abgedruckt wurde. Diese Materie ist später der Gegenstand sehr ausgedehnter Untersuchungen geworden, die man hauptsächlich in einer Abhandlung von Lamé und Clapeyron findet, die der Akademie der Wissenschaften im Jahre 1828 vorgelegt und im Journal für Mathematik von Crelle (Bd. 7) abgedruckt wurde; man findet diese Untersuchungen ferner in einer Abhandlung von Poisson, abgedruckt in dem Bande VIII der Memoiren der Akademie, und in den Exercices de mathématiques von Cauchy.

Wir müssen bemerken, daß alle in den vorhergehenden Kapiteln gegebenen Formeln durchaus mit den Resultaten übereinstimmen, die man durch diese neuen Untersuchungen erhalten hat. Sind die Körper homogen und kann man den Druck der atmosphärischen Luft in Bezug auf die übrige Belastung vernachlässigen, so wird man für die Constante, welche im §. 77 durch *E* bezeichnet wurde, stets denselben numerischen Werth erhalten, man mag diese nun durch directe Versuche zu bestimmen suchen, indem man einen prismatischen Stab in der Richtung seiner Länge ausdehnt

(in welchem Falle man  $E = \frac{P\delta}{\Omega}$  hat, wenn *P* das ausdehnende Gewicht,  $\Omega$  den

$$PR = G \cdot \frac{b^3 c^3 \cdot \theta}{3(b^2 + c^2)a}$$

findet, woraus

$$\theta = \frac{P}{G} \cdot \frac{3(b^2 + c^2)aR}{b^3 c^3}.$$

§. 160. Aus den Resultaten in den vorhergehenden Paragraphen läßt sich der Torsionswinkel eines prismatischen Stabes für eine gegebene Kraft berechnen, wenn der Werth der Constanten  $G$  aus vorher angestellten Versuchen ermittelt worden ist. Bei diesen Versuchen hat man den Torsionswinkel eines Körpers, das Gewicht, welches die Torsion hervorbringt, und dem Hebelarm dieses Gewichtes zu gleicher Zeit zu beobachten. Für  $G$  findet man aus den Formeln in §. 156 u. folgde. 1) bei einem kreisförmigen Querschnitt des Stabes

$$G = P \cdot \frac{2aR}{r^4 \pi \cdot \theta};$$

bei einem quadratischen Querschnitt

$$G = P \cdot \frac{baR}{b^4 \theta};$$

und bei einem rechteckigen Querschnitt

$$G = P \cdot \frac{3(b^2 + c^2)aR}{b^3 c^3 \cdot \theta}$$

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen die Torsion.

§. 161. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von DuLcau über die Torsionsfestigkeit des Schmiedeeisens angestellten Versuche. 2) Das Gewicht, welches die Torsion hervorbringt, ist 10 Kilogramm und es wirkt an einem Hebelarm von 0,32 Meter.

Inhalt der Querschnittsfläche und  $\delta$  die Ausdehnung der Längeneinheit bezeichnen); oder man mag die Constante  $E$  nach §. 91 und folg. zu bestimmen suchen, indem man einen Stab mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt sich biegen läßt.

Was die Constante  $G$  anlangt, welche in den Formeln über die Torsion vorkommt, so ist sie mit der Constante  $E$  durch die Beziehung  $G = \frac{2}{5} \cdot E$  verbunden, wenn man die Körper als homogen voraussetzen und die Wirkung des atmosphärischen Druckes vernachlässigen darf.

- 1) Es ist ohne Zweifel überflüssig, zu bemerken, daß man in allen diesen Formeln für  $\theta$  die Zahl zu setzen hat, welche für den Halbmesser = 1 die Länge des Bogens anzeigt, welche dem Torsionswinkel entspricht. Ist daher der in Rede stehende Winkel in Graden angegeben, so ist die Zahl der Grade mit  $\frac{\pi}{180}$  oder mit  $\frac{\pi}{200}$  zu multipliciren, je nachdem es Gradesimal- oder Centesimalgrade sind.

- 2) Essai théorique et expérimental sur la resistance du fer forgé, pag. 49.

Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Dimensionen des Querschnitts	Torsions- winkel	Zahlen, die dem Wider- stande propor- tional sind
	Meter	Met. Durchm.	Sevag. Grd.	
Rundeisen von Perigord	2,81	0,0142	13,4	12,57
Desgl. . . . .	3,17	0,0197	6	11,47
Englisches Rundeisen mit der Marke Dowlais	2,40	0,0198	4	12,41
Rundeisen aus dem De- partement de l'Ar- riège . . . . .	3,57	0,0215	4,8	11,16
Desgl. . . . .	2,89	0,0215	4,5	9,6
Rundeisen von Perigord	3,19	0,0221	3,32	11,99
Desgl. . . . .	2,89	0,0230	3	10,96
Englisches Rundeisen .	3,24	0,0235	2,34	14,48
Rundeisen von Perigord	2,94	0,0265	1,82	10,48
Desgl. . . . .	3,35	0,0267	1,87	11,23
Desgl. . . . .	2,92	0,0357	0,625	9,19
Rundeisen aus dem De- partement de l'Ar- riège . . . . .	2,77	0,0268	1,65	10,39
Seiten				
Englisches Quadrateisen mit der Marke C 2	4,12	0,0200	6,5	17,46
Desgl. . . . .	2,52	0,0200	4	17,36
Rundeisen von Perigord	2,52	0,0204	3,08	15,27
Desgl. . . . .	3,39	0,0326	0,62	15,40
Englisches Flacheisen .	2,91	0,0340	11,4	
		0,0086		
Desgl. . . . .	1,55	0,0340	5,62	
		0,0086		
Flacheisen von Perigord	2,91	0,0340	7,2	
		0,0105		
Englisches Flacheisen mit der Marke B. . . .	1,45	0,0678	0,85	
		0,0147		

Um aus jedem Versuche den Werth der Constanten  $G$  zu erhalten, hat man die Zahlen der letzten Columnne mit 583 600 000 bei den Versuchen mit Rundeisen, und mit 343 770 000 bei den Versuchen mit Quadrateisen zu multipliciren, wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden. Das Mittel aus den Zahlen der letzten Columnne bei den Versuchen mit Rundeisen ist 11,33, woraus für  $G$  folgt

$$G = 6\,612\,300\,000 \text{ Kil.}$$

Das Mittel aus den Zahlen der letzten Columnne bei den Versuchen mit den Quadrateisen ist 16,03, woraus für  $G$  folgt

$$G = 5\,510\,600\,000 \text{ Kil.}$$

Die Verschiedenheit dieser beiden Resultate hat sicher zum großen Theile in der abweichenden Güte des Eisens ihren Grund.<sup>1)</sup>

### Widerstand verschiedener Materialien gegen die Torsion.

§. 162. Versuche von Savart über den Widerstand verschiedener Materialien gegen die Torsion.<sup>2)</sup> Der Hebelarm der Kräfte, welche die Torsion bewirkten und deren Werth unten aufgeführt ist, war stets 0,111 Meter. Der Kreisbogen, auf welchem die Torsionswinkel gemessen wurden, war in Centesimalgrade eingetheilt, so daß der Bogen, welcher zu einem Torsionswinkel von 1° gehört, gleich  $\frac{3,416}{200}$  ist.

Da aus den Versuchen hervorging: 1) daß die Torsionsbogen (innerhalb solcher Grenzen, daß der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder annahm, sobald die drehenden Kräfte aufhörten, auf ihn einzuwirken) genau den drehenden Kräften proportional waren; und 2) daß bei gleichen Kräften die Torsionsbogen genau der Länge der Stäbe proportional waren; so sind hier nur die mittleren Resultate aus den Beobachtungen aufgeführt, welche dazu dienen können, diese beiden Sätze zu erweisen.

Bezeichnung des Materials.	Querschnitt	Länge der Stäbe	Gewicht, welches eine Torsion von 1° hervor- bringt
	Millimeter	Meter	Kilogramm
Gyps . . . . .	Rechteck, Seiten 27,1 u. 6,98 17,21 u. 5,19	0,3743	0,120 0,0303
Eichenholz . . . . .	Rechteck, Seit. 46,63 u. 10,59 23,32 u. 5,295	0,5235	0,355 0,022
	96 u. 5,37	0,5764	0,105
	96 u. 2,54		0,0114
	96 u. 1,7		0,00393
Gußstahl zu Drath aus- zogen . . . . .	Quadrat, Seite 5,72	1,0000	0,1584
	Rechteck, Seite 15, 6 u. 5, 6	1,4000	0,2752
Kupfer, gewalztes Blech	Rechteck, Seiten 51,87 u. 1,17	0,2194	0,098

1) Nach dem, was am Ende der Note zu §. 159 gesagt ist, müßte, wenn man nach §. 102 für die Constante  $E$  den Werth 20 000 000 000 Kil. annimmt, der Werth der Constanten  $G$   $\frac{2}{3}$  dieser Zahl, oder 8 000 000 000 Kil., sein. Dieses Resultat fügt sich übrigens auf die Voraussetzung, daß das Eisen homogen sei, d. h. in jedem Sinne einen gleichen Widerstand leiste. Nach den Versuchen von Dureau über die Torsion müßte man der Constanten  $G$  einen geringeren Werth beilegen: wir wollen nicht entscheiden, ob für diesen Mangel an Uebereinstimmung der Grund in der qualitativen Verschiedenheit des Eisens, in der fehlenden Gleichartigkeit desselben, oder in der Beobachtungsweise des Experimentators zu suchen ist.

2) Annales de chimie et de physique, août 1829.

Bezeichnung des Materials.	Querschnitt	Länge der Stäbe	Gewicht, welches eine Torsion von 1° hervor- bringt
	Millimeter	Meter	Kilogramm
Deßgl. Drath . . .	Kreis, Durchmesser 2,4	0,694	0,00297
	4,58		0,04117
	6,91		0,207
	9,04		0,580
	Quadrat, Seite 4,68	0,649	0,0595
	5,66		0,1275
	9,18		0,880
	5,66	0,6567	0,126
	Gleichseitiges Dreieck.		
	Seite 4,35	0,6383	0,00835
Messingdrath . . .	7,8		0,086
	8,8		0,1415
	Kreis, Durchmesser 6,72	0,649	0,160
	Rechteck, Seiten 3,56 u. 9,2	0,997	0,0555
	Quadrat, Seite 5,72	1,302	0,101
Glas . . . . .	Rechteck, Seiten 5,4 u. 1,516	0,63	0,07
		0,315	0,140
	25,46 u. 1,516	0,315	0,034

Der erste Versuch mit dem Stahl giebt für die Constante  $G$  den Werth 6 273 400 000 Kilogramme, und der zweite den Werth  $G = 5\,490\,000\,000$  Kil. Diese Resultate bestätigen übrigens die Genauigkeit der Formeln, welche in §. 157 u. fgd. gegeben sind.

§. 163. Einige Versuche über die Torsion, welche De v a n veröffentlicht hat, findet man noch in den Philosophical Transactions, 1829, Theil I.

### Sechstes Kapitel.

## Widerstand eines prismatischen Körpers gegen den Bruch durch die Torsion.

§. 164. Die Torsion eines Stabes muß den Bruch desselben nach sich ziehen, wenn die Molecüle, welche am weitesten von einander entfernt worden sind, dies nicht noch weiter werden können, ohne ihren Zusammenhang zu verlieren. Nimmt man nun an,

daß bis zu dem Augenblicke, in welchem der Bruch erfolgt, die Widerstände der Elemente des Stabes in denjenigen Beziehungen zu einander stehen, welche in §. 156 angenommen wurden, so läßt sich für das Moment des Widerstandes gegen den Bruch der folgende Ausdruck ableiten. Behält man die Benennungen des §. 156 bei, und nennt man außerdem

$r'$  den größten Werth für  $r$  in dem Querschnitte des Stabes ;

$\tau$  ein Gewicht, welches für die Flächeneinheit den Widerstand gegen die Torsion im Augenblicke des Bruchs ausdrückt ;

so ist  $\frac{T\tau}{r}$  der Widerstand gegen die Torsion im Augenblicke des Bruchs für die Punkte eines Querschnitts, welche in der Entfernung  $r$  von der Ase des Stabes liegen. Man hat also

$$\frac{T}{r} \tau \cdot d\varphi \cdot r^2 dr$$

als Widerstand eines Flächenelements des Querschnitts und daher für das Gleichgewicht die Gleichung

$$PR = \frac{T}{r'} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{f(\varphi)} r^3 dr = \frac{T}{r'} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} [f(\varphi)]^4 d\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für  $PR$  mit demjenigen in §. 156, so erkennt man, daß die Werthe des Bruchmomentes sich von den Werthen, welche wir in §. 157 u. flgde. fanden, werden ableiten lassen, indem man  $T$  für  $\frac{G\theta}{a}$  schreibt und mit  $r'$  dividirt.

§. 165. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, so findet man den Werth des Bruchmomentes zu

$$PR = T \frac{r'^2 \pi}{2}.$$

§. 166. Ist der Querschnitt ein Quadrat mit der Seite  $b$ , so ist  $r' = \frac{b}{\sqrt{2}}$  und daher das Bruchmoment

$$PR = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}}.$$

Das Bruchmoment des Quadrates verhält sich zu dem des eingeschriebenen Kreises, wie  $1 : \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$ .

§. 167. Was den Fall eines rechteckigen Querschnitts anlangt, so folgt aus den Untersuchungen, welche im §. 159 erwähnt wurden, daß, wenn man mit  $b$  und  $c$  die Seiten des Querschnitts bezeichnet, man für das Bruchmoment den Ausdruck

$$PR = T \frac{b^2 c^2}{3 \sqrt{b^2 + c^2}}$$

erhält. 1)

§. 168. Die Länge des Stabes hat durchaus keinen Einfluß auf den Widerstand gegen den Bruch durch die Torsion; je länger der Stab ist, desto größer wird nur der Torsionswinkel im Augenblicke des Bruchs geworden sein. Aus den vorhergehenden Formeln lassen sich die Kräfte berechnen, deren man bedarf, um einen prismatischen Stab durch Torsion zu zerbrechen, wenn man den Werth der Constanten  $T$  aus früheren Beobachtungen bestimmt hat. Dieser Werth läßt sich aus den gegebenen Größen eines jeden Versuches ableiten, und zwar, wenn der Querschnitt ein Kreis ist, nach der Formel

$$T = P \cdot \frac{2R}{r^3 \pi},$$

wobei  $P$  das zerdrehende Gewicht,  $R$  den Hebelarm dieses Gewichtes und  $r$  den Halbmesser des zerdrehten Cylinders bezeichnen; ist hingegen der Querschnitt ein Quadrat oder ein Rechteck, so sind die Formeln

$$T = P \frac{6R}{b^3 \sqrt{2}}, \text{ oder } T = P \frac{3R \sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 c^2},$$

anzuwenden, wobei  $b$  und  $c$  die Seiten des Querschnitts bezeichnen.

Es sollen jetzt die Erfahrungsergebnisse aufgeführt werden, aus denen sich der Werth der Constante  $T$  ableiten läßt.

- 1) Diesen Ausdruck hat Cauchy nicht gegeben; er läßt sich indeß ableiten mit Hülfe derselben Analyse, deren er sich bediente, um den Fall zu behandeln, in welchem ein Stab mit rechteckigem Querschnitt eine Torsion erleidet. Die Formeln, welche hier für den Fall, in welchem der Querschnitt kreisförmig oder quadratisch ist, gegeben werden, sind durchaus genau.

Wir sehen in allen Fällen den Bruch als dadurch bestimmt an, daß ein Längenelement des Körpers in einem größern Grade ausgedehnt oder zusammengedrückt worden ist, als es die Natur des Körpers leidet und zufolge dessen ein Trennen oder ein Zerquetschen der Theile eintritt. Hiernach muß, wenn man homogene und in jedem Sinne gleichen Widerstand leistende Körper voraussetzt, nothwendig ein bestimmtes Verhältniß zwischen den beiden Constanten  $T$  und  $R$  (in §. 113 u. f. gbe.) bestehen; dieses Verhältniß ist  $T = \frac{4R}{5}$ . Doch darf man nicht erwarten, daß Verhältnisse dieser

Art stets durch die Versuche bestätigt werden, liege dies nun an der fehlenden Gleichartigkeit der Körper, oder daran, daß im Augenblicke des Bruchs die innern Widerstände sich nicht so verhalten, wie es bei den analytischen Aufösungen vorausgesetzt wurde, welche Aufösungen sich wesentlich auf die Annahme stützen, daß die Gestalt der Körper nur sehr wenig verändert worden sei.

## Widerstand des Gußeisens gegen den Bruch durch die Torsion.

§. 169. Nach einem Resultate, welches Banks <sup>1)</sup> als das Mittel aus mehreren Versuchen angiebt, wird ein gußeiserner Stab von 1 engl. Zoll ins Gevierte durch ein Gewicht von 631 engl. Pfund zerdreht, wenn dieses an einem Hebelarm von 2 engl. Fuß wirkt.

Aus diesem Resultate findet man nach der zweiten Formel in dem vorhergehenden Paragraphen den Werth der Constanten  $T$  zu

$$T = 45\,060\,000 \text{ Kil.},$$

wenn der Meter als Längen- und das Kilogramm als Gewichtseinheit angenommen werden.

§. 170. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von Dunlop <sup>2)</sup> in Glasgow mit cylindrischen Stäben angestellten Versuche. Die Länge des Hebelarmes, an welchem die Gewichte wirkten, betrug 14 Fuß 2 Zoll. (Engl. Maße.)

Länge der Stäbe.	Durchmesser der Stäbe.	Zerdrehendes Gewicht.
3 Zoll	3 Zoll	Pfund
2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	2	250
2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	2 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	384
3	2 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	408
3	2 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	700
4	3 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	1170
5	3 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	1240
5	3 <sup>3</sup> / <sub>4</sub>	1662
5	4	1938
6	4 <sup>1</sup> / <sub>4</sub>	2158

Den Werth der Constanten  $T$  findet man aus diesen Versuchen zu

$$T = 20\,305\,000 \text{ Kil.}$$

§. 171. In der folgenden Tabelle findet man die Resultate der von G. Rennie <sup>3)</sup> über die Torsion des Gußeisens und verschiedener anderer Metalle angestellten Versuche. Die Länge des Hebelarmes, an welchem die Gewichte wirkten, betrug 2 Fuß. (Englische Maße.)

1) A Treatise on the power of machines.

2) Dr. Thomson's Annals of philosophy, Thell XIII., pag. 200.

3) Philosophical Transactions, 1818; oder auch Annales de chimie et de physique septembre 1818.



Bezeichnung des Materials.	Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnitts	Drehendes Gewicht	
	Zoll	Zoll	Pfd.	Unzen
Gusseisen, horizontal gegossen . .		$\frac{1}{4}$	9	15
desgl., vertical gegossen . .		$\frac{1}{4}$	10	10
desgl., horizontal gegossen . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	7	3
desgl., desgl. . .	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	1
desgl., desgl. . .	1	$\frac{1}{4}$	8	8
desgl., vertical gegossen . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	10	1
desgl., desgl. . .	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	8	9
desgl., desgl. . .	1	$\frac{1}{4}$	8	5
desgl., desgl. . .	6	$\frac{1}{4}$	9	12
desgl., horizontal gegossen . .		$\frac{1}{2}$	93	12
desgl., desgl. . .		$\frac{1}{2}$	74	0
desgl., desgl. . .	10	$\frac{1}{2}$	52	0
Stahl. . . . .		$\frac{1}{4}$	17	1
Schmiedeeisen, englisches . . .		$\frac{1}{4}$	10	2
desgl., schwedisches . . . .		$\frac{1}{4}$	9	8
Kanonenmetall, hartes . . . .		$\frac{1}{4}$	5	0
Gelbguß (Messing), feines . .		$\frac{1}{4}$	4	11
Kupfer, gegossen . . . . .		$\frac{1}{4}$	4	5
Zinn . . . . .		$\frac{1}{4}$	1	7
Blei . . . . .		$\frac{1}{4}$	1	0

Aus den Versuchen mit Gusseisen folgt im Mittel für die Constante  $T$  der Werth

$$T = 41\,360\,000 \text{ Kil.}$$

§. 172. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Versuche, welche Bramah mit gußeisernen Stäben quadratischen Querschnitts anstellte. Diese Stäbe waren an dem einen Ende befestigt und an dem andern Ende wirkten die drehenden Gewichte an einem Hebelarm, dessen Länge 3 Fuß betrug<sup>1)</sup>. (Engl. Maße.)

Bezeichnung des Materials.	Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnitts	Drehendes Gewicht
	Fuß	Zoll	Pfund
1) Gusseisen mit $\frac{1}{16}$ Kupfer . .	1	$1\frac{1}{16}$	215
2) desgl. . . . .	2	$1\frac{1}{16}$	213
3) Legirung aus gleichen Theilen von altem Eisen von Adelpsi und von Alfreton . . . .	1	$1\frac{1}{16}$	330
4) desgl. . . . .	1	$1\frac{1}{16}$	310
5) desgl. . . . .	2	$1\frac{1}{16}$	280
6) Gusseisen . . . . .	1	1	238
7) desgl. . . . .	2	1	218

1) A practical Essay on the strength of cast iron, pag. 97.

Aus den Versuchen 3, 4, 6 und 7 erhält man für die Constante  $T$  im Mittel

$$T = 25\,860\,000 \text{ Kil.}$$

### Siebentes Kapitel.

#### **Maximum des Widerstandes, welchen man in der Praxis von den Materialien mit Sicherheit erwarten darf. <sup>1)</sup>**

§. 173. Aus den Untersuchungen in den vorhergehenden Paragraphen kennt man die Gesetze, nach welchen die Biegung und der Bruch der Materialien erfolgen, d. h. den Grad der Krümmung und der Torsion, welchen ein prismatischer Stab durch die Wirkung einer gegebenen Kraft erleidet, so wie die Kraft, deren man bedarf, um den Stab zu zerbrechen. Dies genügt indeß noch nicht, um die Dimensionen der Theile einer Construction bestimmen zu können; denn man muß in der That versichert sein können, daß die Kräfte, welche auf die einzelnen Theile wirken, nicht allein nicht unmittelbar den Bruch derselben veranlassen, sondern daß selbst die fortwährende oder häufig wiederkehrende Wirkung dieser Kräfte in den Theilen der Construction keine solche nachtheilige Veränderungen hervorbringen wird, welche mit der Zeit zunehmen und die Zerstörung des Ganzen herbeiführen können. Man muß, wo möglich, die Construction so anlegen, daß keine anderen Ursachen der Vergänglichkeit übrig bleiben, als diejenigen, welche von den chemischen Veränderungen der Materialien abhängen, und die man durch conservirende Mittel zu beseitigen suchen muß. Die in Rede stehenden Rechnungen werden freilich keine so große Genauigkeit darbieten können, als diejenigen, mit welchen wir uns bisher beschäftigt haben.

Wir werden jetzt die wichtigsten Erfahrungsergebnisse über diesen Gegenstand aufführen.

#### **Widerstand der Steine gegen Zerdrücken.**

§. 174. Steine in kleinen Würfeln fangen an, sich zu spalten, bei Belastungen, welche etwas mehr als die Hälfte derjenigen betragen, die in den obigen Tabellen als die zerdrückenden Gewichte angegeben sind. Zum Zerdrücken reicht übrigens schon eine geringere Kraft hin, wenn diese Kraft lange Zeit hindurch wirkt <sup>1)</sup>. Es folgen hier die Angaben von Rondelet <sup>2)</sup> über den Druck,

1) Ardant, Sprengwerke S. 111, Nr. 20.

2) Rondelet, Art de bâtir, tome IV., pag. 151.

3) Art de bâtir, tome IV. pag. 133.

welcher eine Fläche von 25 Quadratcentimeter bei denjenigen Bauwerken erleidet, die für die kühnsten gehalten werden.

Pfeiler (der Kuppel) der Peterskirche in Rom . . . . .	409 Kil.
Pfeiler der Paulskirche in London . . . . .	484 "
Pfeiler des Invalidenhauses in Paris . . . . .	369 "
Pfeiler des Pantheons (Genovesakirche) in Paris . . . . .	736 "
Säulen der Paulskirche, extra muros in Rom . . . . .	494 "
Pfeiler des Thurms der Kirche zu Saint-Méry . . . . .	735 "
Säulen der Allerheiligenkirche in Angers <sup>1)</sup> . . . . .	1107 "

§. 175. Nach Perronet <sup>2)</sup> sind die oberen Schichten der Pfeiler der Neuilly-Brücke mit einem Gewichte von ungefähr 20 000 Pfund für den Quadratfuß belastet, und nach den Versuchen von Soufflot müßte der Druck 240 000 Pfund betragen, um die Steine zu zerdrücken.

§. 176. Nach Telford und Nimmo <sup>3)</sup> tragen Bausteine 250 000 bis 850 000 Pfund und Ziegelsteine 300 000 Pfund für den Quadratfuß. (Engl. Maße.) In der Praxis belastet man sie mit  $\frac{1}{8}$  dieses Gewichtes und darüber. Der Pfeiler in der Mitte des Kapitelsaals zu Elgin ist mit mehr als 40 000 Pfund für den Quadratfuß belastet und hat außerdem mehrere Jahrhunderte hindurch einen schweren, mit Blei gedeckten Dachstuhl getragen. Die Gewölbesteine eines Bogens können ohne Gefahr einen Druck von 50 000 Pfund für den Quadratfuß ertragen. (610 Kil. für eine Fläche von 25 Quadratcentimeter.)

§. 177. Die Pfeiler, welche die Ketten der Hängebrücke zu Argentat tragen, bestehen aus Mauerwerk von Schiefersteinen von mittlerer Härte. Bei der Prüfung der Brücke wurden sie mit 4,5 Kil. für den Quadratcentimeter belastet; die bleibende Belastung beträgt 3,78 Kil. <sup>4)</sup>.

§. 178. Nach den Erfahrungen, welche man bei ausgeführten Werken gemacht hat, darf man die Bausteine mit keinem größeren Gewichte belasten, als  $\frac{1}{10}$  desjenigen, wodurch kleine Würfel bei angestellten Versuchen zerdrückt werden. Selbst diese Annahme würde keine gänzliche Sicherheit gewähren, wenn die Steine nicht so behauen und gelagert würden, daß sie auf der ganzen Oberfläche der Fugen einen sehr gleichmäßigen Druck erfahren, oder, wenn sie, je nach ihrer Art, geneigt wären, sich zu spalten und in Trümmer zu zerspringen. In diesem letzteren Falle müßte der Druck geringer sein.

Die Belastung muß ebenfalls geringer sein, wenn es sich um Säulen oder Pfeiler handelt, deren Höhe im Verhältniß zu den

1) Diese Säulen sind aus sehr hartem Kalkstein von röthlich grauer Farbe und muschligem Bruch aufgeführt. Ein Würfel, dessen Kante gleich 5 Centimeter ist, wird durch ein Gewicht von 10 940 Kil. zerdrückt.

2) Mémoire sur la réduction de l'épaisseur des piles in den Mémoires de l'Académie des sciences 1777.

3) The Edinburgh Cyclopaedia, Art. Bridge.

4) Description du pont suspendu d'Argentat par Mr. Vicat, pag. 9.

Dimensionen des Querschnitts bedeutend ist, und die leicht eine etwas schiefe Stellung annehmen können, in Folge dessen die Last auf die oberen Kanten wirkt. Man sehe hierüber die in §. 8 aufgeführten Versuche.

### **Widerstand der Hölzer gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung.**

§. 179. Nach den in den §§. 12 und 13 aufgeführten Erfahrungsergebnissen ist der Widerstand der Fasern der Hölzer gegen Zerdrücken ganz verschieden von dem Widerstande derselben gegen Ausdehnung; indem der erstere nicht die Hälfte des letzteren beträgt. Dieser Umstand steht in Uebereinstimmung mit dem in §. 142 Gesagten. Bei Eichen- oder Tannenholz (Fichtenholz) kann man den Widerstand gegen Zerdrücken ungefähr zu 4 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts annehmen; der Widerstand gegen Ausdehnung beträgt ungefähr 8 Kil. In der Praxis darf jedoch der Druck nicht über  $\frac{1}{10}$  desjenigen betragen, durch welchen die Materialien zerdrückt werden. Nach dieser Regel lassen sich die Dimensionen der Grundpfähle, so wie die Entfernung derselben von einander berechnen: sie stimmt mit den Angaben überein, welche Perronet <sup>1)</sup>, auf Erfahrungen gestützt, gemacht hat.

§. 180. Bei der von Emmeron ausgeführten Seinebrücke zu Jbrn, mit hölzernen Bogen auf Steinpfählen, so wie bei den vom Verfasser ausgeführten Brücken derselben Art zu Asnières und Argenteuil tragen die gebogenen Stücke, welche den Haupttheil der Gespärre bilden, allein durch die Wirkung des eigenen Gewichtes der Construction, an den Anfängen einen Druck von 0,1 Kil. für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts. Da bekannt ist, daß diese Brücken in der Regel sich schon zu senken anfangen, bevor die Holzstücke gänzlich verdorben sind, so wird man die in Rede stehenden Stücke keiner größeren Belastung aussetzen dürfen.

Bei einer zufälligen Vermehrung der Belastung um 200 Kil. für den Quadratmeter der Fläche der Brückenbahn, nimmt der eben angegebene Druck um die Hälfte zu.

### **Widerstand der Hölzer gegen Biegung, durch eine rechtwinklig gegen die Längsaxe gerichtete Kraft.**

§. 181. Der Maximalwerth der zulässigen Belastung eines Stabes muß hier bestimmt werden durch die Bedingung, daß die Biegung, welche die Belastung verursacht, so wie die daher

<sup>1)</sup> Oeuvres de Perronet, Mémoire sur les pieux et pilotis. Pfähle von 0,25 und 0,32 Meter im Durchmesser dürfen mit nicht mehr als 25 000 und 50 000 Kil. belastet werden.

entstehenden Ausdehnungen und Verkürzungen der Längensfasern nicht im Stande sein dürfen, die physische Beschaffenheit der Hölzer nachtheilig zu verändern; es darf demnach die Krümmung des Stabes nicht mit der Zeit zunehmen, und nach der Entlastung muß der Stab seine natürliche Gestalt wieder gewinnen. Spezielle Versuche, nach denen sich die in Rede stehende Grenze für die Hölzer mit Sicherheit bestimmen ließe, giebt es nicht.

Nach den in §. 134 u. folgd. aufgeführten Resultaten hat man für Eichenholz den Werth der Constanten  $R$  im Mittel zu  $R = 6\,000\,000$  Kil. Die Erfahrung an ausgeführten Bauwerken lehrt, daß bei den Hölzern die Belastung nicht über  $\frac{1}{10}$  derjenigen betragen darf, welche den Bruch verursachen würde <sup>1)</sup>. Bezeichnet man nun mit  $R'$  den größten Werth der zulässigen Belastung der Längensfasern eines Stabes, für die Flächeneinheit, so erhält man für Eichenholz  $R' = 600\,000$  Kil. In jedem einzelnen Falle wird man das Maximum der für ein Stück zulässigen Belastung finden, indem man  $R'$  für  $R$  in die Formeln in §. 113 u. folgd. einsetzt.

Nimmt man, in Uebereinstimmung mit den in §. 95 u. folgd. aufgeführten Versuchen, den Werth der Constanten  $E$  für Eichenholz zu  $E = 1\,000\,000\,000$  Kil. an, so erhält man für eine Belastung von  $600\,000$  Kil. eine Ausdehnung oder Verkürzung der Längensfasern  $0,0006$ . Diese Längenveränderung muß als die größte angesehen werden, welche man ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze hervorbringen kann. Nach Treb gold <sup>2)</sup> ist für Eichenholz eine Belastung von  $3960$  Pfund engl. für den engl. Quadrat Zoll ( $2\,780\,000$  Kil. für den Quadratmeter) und eine Ausdehnung um  $\frac{1}{430} = 0,0023$  noch zulässig; doch scheinen diese Werthe nicht auf Constructionen anwendbar, bei denen große Dauerhaftigkeit gefordert wird.

Die Tragfähigkeit des Rothtannen- und Fichtenholzes ist mindestens eben so groß, wie die des Eichenholzes; die des Weistannenholzes ist etwas geringer.

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Ausdehnung.

§. 182. Aus den im §. 38 u. folgd. aufgeführten Versuchen folgt, daß schmiedeeiserne Stäbe, welche in ihrer Längenrichtung ausgedehnt werden, durch eine Kraft zerrissen werden, welche im Mittel  $40$  Kil. für den Quadratmillimeter des Querschnitts beträgt. Nach einer aufmerksamen Prüfung der Versuchsergebnisse und nach dem Beispiele ausgeführter Werke ist für diese Stäbe keine größere bleibende Belastung zulässig, als  $6$  bis  $7$  Kil. für den Quadratmillimeter; besteht die Totalbelastung aus einem bleibenden und

1) Rondelet, Art de bâtir, tome IV., pag. 83.

2) A practical Essay on the strength of cast iron, pag. 279 der zweiten Ausgabe.

einem vorübergehend hinzukommenden Theile, so darf die Totalbelastung nicht über 8 bis 10 Kil. für den Quadratmillimeter betragen.

### Widerstand des Schmiedeeisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längensaxe gerichtete Kraft.

§. 183. Nimmt man, in Uebereinstimmung mit dem eben Gesagten, die Grenze der Biegung prismatischer Stäbe dadurch bestimmt an, daß die Längensfasern höchstens einen Zug von 6 Kil. für den Quadratmillimeter erleiden, so hat man für Schmiedeeisen der Constanten  $K$  den Werth 6 000 000 Kil. beizulegen (s. §. 181), und darnach die größten zulässigen Belastungen vermittelst der Formeln in §. 113 u. folgd. zu berechnen, indem man  $K$  für  $R$  an die Stelle setzt.

Nach §. 102 hat man für Schmiedeeisen  $E = 20\,000\,000\,000$  Kil.; folglich wird eine Belastung von 6 000 000 Kil. in den Fasern eine Längenveränderung um 0,0003 hervorbringen, und diese ist als die größte anzusehen, welche man noch hervorbringen kann, ohne die Elasticität des Eisens nachtheilig anzugreifen. Der Werth, welchen Duleau als die größte zulässige Belastung für Schmiedeeisen angiebt, folgt, indem man ebenfalls die Grenze zu 0,0003 annimmt <sup>1)</sup>. Dieser Bruch entspricht den kleinsten Resultaten, welche der genannte Ingenieur aus seinen Versuchen erhielt, und deren Mittel ungefähr 0,00065 ist. Diese letztere Ausdehnung wird durch eine Kraft von 13 Kil. für den Quadratmillimeter hervorgebracht, d. h. von einem Drittel derjenigen Kraft, durch welche der Stab zerrissen werden würde. Nach Tredgold erträgt das Eisen ohne nachtheilige Veränderung einen Zug von 17 800 engl. Pfund für den engl. Quadratzoll (12,4 Kil. für den Quadratmillimeter) und eine Ausdehnung um  $\frac{1}{1400} = 0,00071$  <sup>2)</sup>.

### Widerstand des Gußeisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung. <sup>3)</sup>

§. 184. Das Gußeisen leistet dem Zerdrücken einen sehr großen Widerstand, wenn die Stücke zu kurz sind, um sich biegen zu können. Nach den in §. 18 u. folgd. aufgeführten Versuchen beträgt das zerdrückende Gewicht ungefähr 100 Kil. für jeden Quadratmillimeter. Versuche, nach denen man die Grenze der in der Praxis zulässigen Belastungen des Gußeisens mit Sicherheit bestimmen könnte, giebt es nicht; aber es ist sehr wahrscheinlich, daß man bis zu einem Viertel des zerdrückenden Gewichtes hinaufgehen darf.

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 79.

2) A practical Essay on the strength of cast iron, pag. 104 der zweiten Ausgabe.

3) Man sehe auch die neuesten Versuche von Hodgkinson im Anhange.

§. 185. Nach den in §. 61 u. folgd. aufgeführten Versuchen beträgt der Widerstand des Gußeisens gegen Ausdehnung 13 bis 14 Kil. für jeden Quadratmillimeter. Dieser Widerstand ist also bedeutend geringer, als der gegen Zerdrücken. In der Praxis sind Belastungen zulässig, welche ebenfalls ein Viertel des eben angegebenen Gewichts betragen; doch werden auf solche Weise angewandte Gußstücke wenig Sicherheit gewähren, wenn die Construction heftigen Stößen ausgesetzt sein sollte.

### Widerstand des Gußeisens gegen Biegung durch eine rechtwinklig gegen die Längsaxe gerichtete Kraft.

§. 186. Nach den in §. 143 u. folgd. aufgeführten Versuchen hat man für den Werth der Constanten  $R$  bei Gußeisen von guter Qualität im Mittel  $R = 30\,000\,000$  Kil. Man kann Gußstücke mit ein Viertel des Gewichts belasten, welches den Bruch hervorbringen würde, und also  $R = 7\,500\,000$  Kil. annehmen. Die größten zulässigen Belastungen sind dann nach den Formeln in §. 113 u. folgd. zu berechnen, indem man  $R$  für  $R$  an die Stelle setzt.

Nimmt man, in Uebereinstimmung mit den in §§. 109 und 110 aufgeführten Versuchen, für weiches Gußeisen  $E = 11\,000\,000\,000$  Kil., so entspricht einer Kraft von  $7\,500\,000$  Kil. eine Ausdehnung um  $0,00068$  und diese wird hier als die Grenze angesehen, bis zu welcher man gehen darf, ohne das Gußeisen nachtheilig zu verändern. Nach Tredgold <sup>1)</sup> ist diese Grenze  $\frac{1}{1204} = 0,00083$  und die größte Kraft, welche das Gußeisen ohne nachtheilige Veränderung ertragen kann, gleich  $15\,300$  engl. Pfund für den engl. Quadratzoll ( $10,7$  Kil. für den Quadratmillimeter).

Alle bisherigen Untersuchungen gelten nur unter der Voraussetzung, daß die auf die Materialien wirkenden Kräfte durch Druck und nicht durch Stoß wirken. Die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen über den Widerstand der Materialien gegen den Stoß findet man im Anhange.

1) A practical Essay on the strength of cast iron, pag. 151.

## Zweiter Abschnitt.

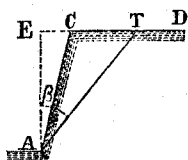
### Gleichgewicht und Widerstand der Körper, welche aus adhärirenden Materien bestehen. Construction der Futtermauern.

§. 187. Die Körper, welche wir hier betrachten, bestehen aus Erde, Sand oder Mauerwerk. Um die Gesetze für das Gleichgewicht und den Widerstand dieser Körper aufzustellen, betrachtet man sie zunächst als homogene Massen, deren Theile durch Adhärenz aneinander haften und einer Trennung derselben in jeder Richtung einen gleichen Widerstand entgegensetzen. Sodann wird die Untersuchung auf Körper ausgedehnt, deren Theile eine regelmäßige Form besitzen und schichtenweise gelagert sind.

#### Erstes Kapitel.

### Gleichgewicht eines Erdkörpers, der nach einer Seite hin ohne Stützfläche ist und von einer Ebene begrenzt wird.

§. 188. Der zu untersuchende Körper, Fig. 20, sei oben durch eine Horizontalebene  $CD$  und vorne durch eine schiefe Ebene  $AC$  begrenzt; man betrachte ihn in dem Augenblicke, in welchem ein Theil  $ACT$  auf dem Punkte steht, sich von dem Ganzen in der Ebene  $AT$ , durch ein Herabgleiten auf dieser Ebene, zu trennen. Es handelt sich darum, die Neigung der Ebene  $AC$  so zu bestimmen, daß keine Lostrennung eines Theils von dem Ganzen statt finden kann. Man nenne nun



$h$  die Höhe  $AE$  des durch  $AC$  begrenzten Theils;  
 $m$  die Tangente des Winkels  $EAC$ ;  
 $\beta$  den Winkel  $EAT$ ;  
 $\Pi$  das Gewicht einer Volumeneinheit der Materie, aus welcher der Körper besteht;



$\gamma$  die Kraft, deren man für jede Flächeneinheit bedarf, um zwei Theile des Körpers durch Hineinwegrutschen über einander zu trennen (die Cohäsion);

$f$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten eines Theils auf dem andern.

Es folgt jetzt für das Gewicht des Prisma's *CAT*

$$\frac{\Pi \cdot h^2}{2} (\tan \beta - m);$$

für die Kraft, welche dasselbe längs *AT* hinab zu schieben sucht,

$$\frac{\Pi \cdot h^2}{2} (\tan \beta - m) \cos \beta;$$

und für die Kraft, welche diesem Gleiten widerstrebt,

$$\frac{f \cdot \Pi \cdot h^2}{2} (\tan \beta - m) \sin \beta + \frac{\gamma h}{\cos \beta}$$

Das Gleichgewicht wird daher ausgedrückt durch die Gleichung

$$(\tan \beta - m) (1 - f \tan \beta) = \frac{2\gamma}{\Pi h} (1 + \tan^2 \beta),$$

woraus

$$m = \tan \beta - \frac{2\gamma}{\Pi h} \cdot \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 - f \tan \beta}$$

§. 189. Bestimmt man den Werth von  $\beta$ , für welchen der vorstehende Ausdruck ein Maximum wird, so erhält man den kleinsten möglichen Werth für  $m$  und zugleich die Richtung, nach welcher eine Lostrennung erfolgen würde, wenn man für  $m$  einen geringern Werth annähme, als denjenigen, für welchen Gleichgewicht besteht.

Dieser Werth von  $\beta$  bestimmt sich durch die Gleichung

$$\tan \beta = \frac{1}{f} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\Pi h} (1 + f^2)}{\frac{2\gamma}{\Pi h} + f}} \right\};$$

und setzt man diesen Werth in den Ausdruck für  $m$ , so erhält man

$$m = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2} \frac{\frac{2\gamma}{\Pi h}}{\frac{2\gamma}{\Pi h} + f} - \sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\Pi h} \left( \frac{2\gamma}{\Pi h} + f \right) (1 + f^2)}{\frac{2\gamma}{\Pi h} + f}}$$

als die Grenze der Neigung, welcher man der begrenzenden Ebene *AC* ertheilen darf, ohne das Herabgleiten eines Theils zu befürchten.

Löst man die Gleichung für  $h$  auf, so erhält man die größte Höhe, auf welcher sich der Körper bei der Böschung  $m$  erhalten kann.

§. 190. Ist  $h$  sehr klein, so erhält man für  $m$  einen nega-

tiven Werth; man könnte also dem Körper eine entgegengesetzte Böschung geben, ohne ein Zusammenstürzen zu befürchten; um so mehr wird man den Körper durch eine verticale Ebene begrenzen können. Setzt man nun  $m = 0$ , so erhält man

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right)$$

welcher Ausdruck die Höhe angiebt, auf welche der Körper, vertical abgestochen, sich noch im Gleichgewichte halten würde. Setzt man für  $h$  größere Werthe, so erhält man für  $m$  wachsende positive Werthe bis zu einer bestimmten Grenze, welche man erhält, wenn man  $h$  unendlich groß annimmt; diese Grenze ist

$$m = \frac{1}{f}.$$

Sie giebt die Böschung, welche die Materie von selbst annehmen würde, wenn man die Cohäsion der Theile vernichtet und das Gleichgewicht nur durch die Reibung erhalten denkt.

§. 191. Vernachlässigt man die Cohäsion der Theile und setzt daher  $\gamma = 0$ , so erhält man

$$\tan \beta = \frac{1}{f}, \quad m = \frac{1}{f},$$

so daß der Körper nach dem Winkel der natürlichen Böschung abgestochen werden muß.

Setzt man  $f = 0$ , oder nimmt man die Kraft, mit welcher zwei Theile eines Körpers an einander haften als von dem Drucke unabhängig und nur dem Inhalt der Berührungsfläche proportional an, so erhält man

$$\tan \beta = \frac{\Pi h}{4\gamma}, \quad m = \frac{\Pi^2 h^2 - 16\gamma^2}{8\Pi\gamma h}$$

§. 192. Nennt man  $\tau$  den Winkel, dessen Tangente  $\frac{1}{f}$  ist, so läßt sich der Ausdruck für  $h$  in §. 190 schreiben

$$h = \frac{4\gamma}{\Pi \tan \tau/2},$$

woraus

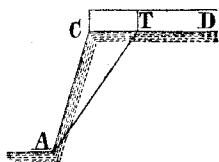
$$\gamma = \frac{1}{4} \Pi h \tan \tau/2.$$

Es giebt  $h$  die größte Höhe an, auf welcher die Masse, vertical abgestochen, sich noch im Gleichgewichte erhält. Ist  $\gamma = 0$ , so ist auch diese Höhe gleich Null; ist  $f = 0$ , so ist sie gleich  $\frac{4\gamma}{\Pi}$ .

Den Werth  $f$  erhält man, indem man die Böschung beobachtet, welche die Materie des Körpers nach überwundener Cohäsion

von selbst annimmt:  $f$  ist die Tangente des Winkels, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet und  $\tau$  ist der Winkel, welchen dieselbe Ebene mit den Verticalen bildet. Beobachtet man sodann die Höhe, bis zu welcher der Körper sich vertical absteigen läßt, ohne zusammen zu stürzen, so erhält man das Gewicht  $\gamma$  vermittelst der obigen Gleichung.

§. 193. Kehrt man zu der Entwicklung in §. 188 zurück, und nimmt man, unter Beibehaltung der früheren Benennungen, die Oberfläche  $CD$  des Körpers (Fig. 21) als gleichmäßig mit Materie belastet an,



als gleichmäßig mit Materie belastet an, die sich durch verticale Ebenen trennen läßt, welche durch die oberen Grenzlinien  $T$  der Bruchebenen gehen, und nennt man den Druck, welcher sich daraus für die Flächeneinheit der Ebene  $CD$  ergibt,  $p$ , so erhält man für die Kraft, welche das Herabgleiten eines Theils

längs  $AT$  zu bewirken sucht,

$$(ph + \frac{1}{2} \Pi h^2) (\tan \beta - m) \cos \beta;$$

für diejenige Kraft aber, welcher das Gleiten zu verhindern sucht,

$$f(ph + \frac{1}{2} \Pi h^2) (\tan \beta - m) \sin \beta + \frac{\gamma h}{\cos \beta};$$

setzt man diese beiden Größen einander gleich, so erhält man

$$(\tan \beta - m) (1 - f \tan \beta) = \frac{2\gamma(1 + \tan^2 \beta)}{2p + \Pi h}.$$

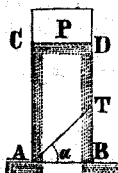
Vergleicht man diesen Ausdruck mit demjenigen, welcher in §. 188 gefunden wurde, so sieht man, daß die Formeln in §. 189 sich auch auf den vorliegenden Fall anwenden lassen, sobald man  $2p + \Pi h$  für  $\Pi h$  schreibt.

## Zweites Kapitel.

**Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, der von zwei Seitenebenen begrenzt wird und auf dessen horizontaler Oberfläche eine Last gleichförmig vertheilt ist.**

§. 194. Wir wollen, der größeren Einfachheit wegen, einen zwischen zwei parallelen Verticalebenen eingeschlossenen Körper

Fig. 22.



(Fig. 22) betrachten, und annehmen, daß der Bruch dieses Körpers nach der Richtung  $AT$  erfolgen müsse.

Man nenne:

$h$  die Höhe  $AC$  des Körpers;

$a$  die Dicke  $AB$  oder  $CD$ ;

$\alpha$  die Neigung der Bruchebene  $AT$  gegen den Horizont;

$P$  ein über die Oberfläche  $CD$  gleichmäßig vertheiltes Gewicht, bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

$\Pi$ ,  $f$  und  $\gamma$  behalten die in §. 188 angegebenen Bedeutungen.

Die Kraft, welche ein Herabgleiten des obern Theils längs  $AT$  zu bewirken sucht, ist

$$(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha) \sin \alpha;$$

diejenige Kraft, welche diesem Gleiten entgegenwirkt, ist

$$f(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha) \cos \alpha + \frac{\gamma a}{\cos \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so findet man

$$(P + \Pi ah - \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha)(\tan \alpha - f) = \gamma a(1 + \tan^2 \alpha),$$

woraus man erhält:

$$P + \Pi ah = \frac{\Pi a^2}{2} \tan \alpha + \gamma a \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan \alpha - f}.$$

§. 195. Sieht man  $\alpha$  als veränderlich an und bestimmt darnach den Minimalwerth für  $P + \Pi ah$ , so erfährt man daraus zugleich die Richtung, in welcher der Bruch des Körpers erfolgen würde, wenn die Belastung diejenige, für welche Gleichgewicht statt findet, etwas überträfe, so wie die größte Höhe, welche man dem Körper geben, und das größte Gewicht, womit man ihn belasten darf.

Der Werth von  $\tan \alpha$ , für den die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ein Minimum wird, ist

$$\tan \alpha = f + \sqrt{\frac{2\gamma(1+f^2)}{\Pi a + 2\gamma}},$$

und dieser Werth in die Gleichung substituirt giebt:

$$P + \Pi ah = f\left(\frac{\Pi a^2}{2} + 2\gamma a\right) + \sqrt{2\gamma a(\Pi a^2 + 2\gamma a)(1+f^2)}$$

als Ausdruck des größten Werthes, den man  $P + \Pi ah$  belegen darf, ohne den Bruch des Körpers herbeizuführen.

§. 196. Sieht man von dem Gewichte des oberen Theils des Körpers  $ACDT$  des Körpers ab, so wird aus diesen Formeln

$$\tan \alpha = f + \sqrt{1 + f^2}; \quad P = 2\gamma a (f + \sqrt{1 + f^2}).$$

§. 197. Nimmt man ferner  $f = 0$ , oder den Widerstand von dem Drucke unabhängig und nur dem Inhalt der Bruchfläche proportional an, so hat man

$$\tan \alpha = 1; \quad P = 2\gamma a,$$

welche Resultate Coulomb 1) gegeben hat. Der Bruch erfolgt demnach in einer unter einem halben rechten Winkel gegen den Horizont geneigten Ebene und der Werth von  $P$  ist der Dicke des Körpers proportional. In diesen Formeln sind die Gesetze für das Zerdrücken eines Steinprisma's enthalten, wenn die zerdrückende Kraft auf die obere Seite des Prisma's wirkt.

§. 198. Die bisherigen Resultate setzen eine gleichmäßige Zusammensetzung des Körpers voraus, wie sie sich bei einer Masse findet, welche aus Erde, Beton oder kleinen unregelmäßig gelagerten und durch Mörtel verbundenen Bruchsteinen findet. In diesem letzteren Falle hat man für  $f$  und  $\gamma$  die Werthe in die Formel einzusetzen, welche der Mörtelmasse entsprechen. Besteht indeß der Körper aus größeren, regelmäßig behauenen und in horizontalen Schichten gelagerten Steinen, so muß die Bruchfuge durch diese Steine selbst hindurch gehen und daher müssen hier für  $f$  und  $\gamma$  die Werthe genommen werden, welche der Masse der Steine selbst entsprechen; es liegt hierin der Grund für die größere Festigkeit, die man erlangt, wenn man die in Rede stehende Construction anwendet.

### Drittes Kapitel.

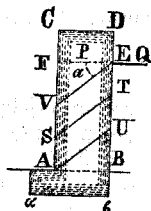
#### Gleichgewicht eines Erd- oder Steinkörpers, gegen dessen eine Seitenfläche eine Kraft wirkt

§. 199. Man betrachte den von zwei parallelen Seiten eingefassten Körper  $ABCD$  (Fig. 23 auf folgender Seite), auf welchen eine in  $E$  angreifende Horizontalkraft wirkt. Diese Kraft kann den Bruch des Körpers auf zweifache Weise verursachen, indem sie entweder den obern Theil über den untern hinweggleiten läßt, oder den ersteren umstürzt. Diese beiden Fälle des Bruchs müssen einzeln untersucht werden.

1) Mémoires des savans étrangers, 1773.

# **Erster Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Gleiten erfolgt.**

§. 200. Der Bruch muß nach einer bliebenen schrägen Richtung innerhalb des Theiles *ABEF* erfolgen, und es handelt sich darum, für die in *E* angreifende Horizontalkraft den kleinsten Werth zu ermitteln, unter der Bedingung, daß diese Kraft den Bruch bewirken soll. Man nenne



*a* die Dicke *AB* des Körpers;  
*h* die Höhe *AF* oder *BE* des Angriffspunktes der Horizontalkraft;  
*P* das Gewicht des oberen Theils *CDEF*, bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

*Q* den Werth der in *E* angreifenden Horizontalkraft, bezogen auf die Längeneinheit des Körpers;

*α* den Winkel, welchen die Bruchfuge mit dem Horizonte bildet;

*h* den Abstand *SF*;

*Π* das Gewicht einer Volumeneinheit der Materie des Körpers;

*γ* die Kraft, deren man für jede Flächeneinheit bedarf, um zwei Theile durch Hinweggleiten über einander zu trennen (die Cohäsion);

*f* den Reibungscoefficienten für zwei Theile des Körpers, welche über einander hinweggleiten;

*σ* den Winkel, dessen Tangente *f* ist (den Reibungswinkel).

Die Kraft, welche das Gleiten auf *ST* hervorzubringen sucht, ist

$$Q \cos \alpha + (P + \Pi a h - \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \sin \alpha;$$

die Kraft, welche dem Gleiten widerstrebt, ist

$$-f Q \sin \alpha + f(P + \Pi a h - \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \cos \alpha + \gamma \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich und sucht *Q*, so erhält man

$$Q = \frac{1}{2} \frac{(2P + 2\Pi a h - \Pi a^2 \tan \alpha)(f - \tan \alpha) + 2\gamma a \cdot (1 + \tan^2 \alpha)}{1 + f \tan \alpha} \quad (1)$$

Dieser Ausdruck gibt den Werth der Kraft *Q* für den Fall, daß die Kräfte, welche den Bruch des Körpers zu bewirken suchen, und die geleisteten Widerstände sich im Gleichgewicht halten sollen. Die Größen *h* und *α* sind unbestimmt: man darf den Körper keiner größern Horizontalkraft aussetzen, als der, welche der Minimalwerth von *Q* in der Gleichung (1) angiebt, wenn man darin *h* und *α* veränderlich setzt.

§. 201. Wenn man *γ* gleich Null hätte, so würde es genügen  $\tan \alpha = f$  zu nehmen, um den Werth von *Q* gleich Null zu

machen. Ist also die Cohäsion gleich Null, so kann der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft nicht ertragen.

§. 202. Man wird übrigens bemerken, daß das Glied, welches  $h$  enthält in der Gleichung (1), positiv oder negativ wird, je nachdem  $\tan \alpha$  kleiner oder größer als  $f$  wird. Ist daher die Neigung der Bruchfuge  $ST$  gegen den Horizont geringer, als die Neigung der Ebene, auf welcher die Theile des Körpers sich vermöge der Reibung allein im Gleichgewichte halten (welche Neigung durch  $\sigma$  bezeichnet wurde und gewöhnlich der Reibungswinkel genannt wird), so hat man für  $h$  den größten möglichen Werth zu nehmen. Ist hingegen die Neigung der Bruchfuge gegen den Horizont größer als der Reibungswinkel, so hat man für  $h$  den kleinsten möglichen Werth zu nehmen. Man muß daher annehmen, daß die Bruchfuge entweder durch den Punkt  $E$ , oder durch den Punkt  $A$  geht; und diese beiden Fälle müssen jeder für sich betrachtet werden. Was die Neigung der Bruchfuge anlangt, so wird man sogleich sehen, auf welche Weise sich dieselbe bestimmen läßt.

§. 203. Man nehme zunächst an, der Bruch erfolge in der Richtung  $AU$ , indem er bei  $A$  zuerst eintritt. Man setze  $h = H$  in der Gleichung (1) und setze, der Kürze wegen,

$$A = 2(fP + f\Pi aH + \gamma a)$$

$$B = f\Pi a^2 + 2P + 2\Pi aH,$$

$$C = \Pi a^2 + 2\gamma a.$$

Man erhält dadurch

$$Q + \frac{1}{2} \frac{A - B \tan \alpha + C \tan^2 \alpha}{1 + f \tan \alpha} \quad (m)$$

Setzt man für die Cohäsion zuerst Null, sodann allmählich wachsende Werthe, so giebt es anfangs Werthe für  $\tan \alpha$ , welche  $Q = 0$  machen. Diese Werthe sind in der Formel

$$\tan \alpha = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (n)$$

enthalten.

Ist  $\gamma$  nicht groß genug, um diese Werthe imaginär zu machen, so sind stets beide Werthe positiv, und jede Annahme für  $\tan \alpha$ , welche zwischen denselben liegt, giebt für  $Q$  ein negatives Resultat. Es kann also der Körper nur dann die Wirkung einer Horizontalkraft ertragen, wenn die durch den Ausdruck (n) gegebenen Werthe imaginär sind, oder wenn, wofern sie reell sein sollten, der kleinste derselben größer als  $\frac{H}{a}$  ist, d. h. eine Bruchfuge andeutet, welche über  $AE$  hinaus liegt. Es ist in der That jede innerhalb

des Winkels  $BAE$  angenommene Bruchfuge zulässig; aber man darf nicht annehmen, daß der Bruch jenseit dieser Linie  $AE$  eintrete. Sind die aus der Formel (n) erhaltenen Ausdrücke reell, und der kleinste derselben größer als  $\frac{H}{a}$ , so substituirt man  $\tan \alpha = \frac{H}{a}$  in die Gleichung (m), wodurch man in diesem Falle den größten Horizontalschub erhalten wird, welchen der Körper ertragen kann.

§. 204. Werden beide Werthe, welche man aus der Formel (n) erhält, imaginär, so hat man daraus zu schließen, daß es ein positives Minimum für  $Q$  giebt, welches aufgesucht werden muß. Der Werth von  $\tan \alpha$ , für welchen der Ausdruck (m) ein Minimum wird, ist

$$\tan \alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f} \sqrt{\frac{f^2 \cdot A + f \cdot B + C}{C}} \quad (o)$$

der für  $\tan \alpha$  desto kleinere Werthe giebt, je größer  $\gamma$  wird. Wird der Werth, welchen man für  $\tan \alpha$  erhält, größer als  $\frac{H}{a}$ , so zeigt dies an, daß die Bruchfuge über  $AE$  hinaus liegt und man müßte offenbar in der Formel (m)  $\tan \alpha = \frac{H}{a}$  setzen, woraus man den gesuchten Werth für  $H$  erhalten würde. Wenn aber der aus der Formel (o) erhaltene Werth für  $\tan \alpha$  kleiner als  $\frac{H}{a}$  ist, so muß man diesen Werth in die Gleichung (m) substituiren.

§. 205. Man muß indeß bemerken, daß der Werth für  $\tan \alpha$ , da derselbe abnimmt, wenn  $\gamma$  mehr und mehr zunimmt, kleiner als  $f$  werden kann. Setzt man  $\gamma$  unendlich groß, so giebt die Formel (o) in der That

$$\tan \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + f^2}}{f} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{2} \sigma;$$

so daß dann die Bruchfuge den Reibungswinkel halbt. Nach dem aber, was in §. 202 gesagt ist, muß dies letzte Resultat verworfen werden: denn wenn  $\tan \alpha < f$  ist, so muß die Bruchfuge so hoch, wie möglich, d. h. vom Punkte  $E$  ausgehend, angenommen werden: für einen gleichen Werth von  $\alpha$  erhält man alsdann einen geringeren Werth für  $Q$ . Man muß daher, wenn die Formel (o) für  $\tan \alpha$  einen kleineren Werth als  $f$  giebt, zu anderen Formeln greifen, die bei der Voraussetzung, die Bruchebene gehe vom Punkte  $E$  aus, bestehen.

§. 206. Man nehme jetzt an, der Bruch erfolge nach der Richtung  $EV$ , indem er bei  $E$  zuerst eintritt.

Die Kraft, welche das Gleiten hervorzubringen sucht, ist

$$Q \cos \alpha + (P + \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \sin \alpha,$$



und die Kraft, welche dem entgegenstrebt, ist

$$-fQ \sin \alpha + f(P + \frac{1}{2} \Pi a^2 \tan \alpha) \cos \alpha.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich, und sucht daraus den Werth für  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{1}{2} \frac{(2P + \Pi a^2 \tan \alpha)(f - \tan \alpha) + 2\gamma a(1 + \tan^2 \alpha)}{1 + f \tan \alpha} \quad (p)$$

Setzt man der Kürze wegen

$$A = 2(fP + \gamma a),$$

$$B = f\Pi a^2 - 2P,$$

$$C = \Pi a^2 - 2\gamma a,$$

so reducirt sich diese Formel auf

$$Q = \frac{A + B \tan \alpha - C \tan^2 \alpha}{1 + f \tan \alpha}.$$

§. 207. Setzt man  $\gamma$  zuerst gleich Null oder verschwindend klein, so giebt es einen Werth von  $\tan \alpha$ , für welchen  $Q$  gleich Null wird. Diesen Werth giebt der Ausdruck

$$\tan \alpha = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2C}, \quad (q)$$

woraus man  $f$  für  $\tan \alpha$  erhält, wenn  $\gamma = 0$  ist, so wie immer größere Werthe in dem Maße, in welchem  $\gamma$  größer wird. Ist der aus der Formel (q) erhaltene Werth kleiner als  $\frac{H}{a}$ , d. h. zeigt er eine Bruchfuge innerhalb des Winkels  $BEF$  an, so folgt daraus offenbar, daß der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft nicht ertragen kann. Wird aber der Ausdruck (q) größer als  $\frac{H}{a}$  oder imaginär, so kann der Körper einer solchen Wirkung widerstehen. Damit also überhaupt der Körper der Wirkung einer Horizontalkraft widerstehen kann, ist es nöthig und genügt es auch, daß der aus der Formel (q) gefundene Werth und der kleinste der in der Formel (n) enthaltenen Werthe beide größer als  $\frac{H}{a}$  sind. Da aber hier die Werthe von  $\tan \alpha$ , welche nothwendig kleiner als  $f$  sind, in Frage kommen, so entspricht der Ausdruck (n), dem für den Widerstand des Körpers ungünstigsten Fall und man braucht daher nur den kleinsten Werth, welchen man aus der Formel (n) erhält, auf die angegebene Bedingung zu prüfen.

§. 208. Nachdem man ermittelt hat, daß der Körper die Wirkung einer Horizontalkraft ertragen kann, handelt es sich darum, den Werth von  $\tan \alpha$  zu bestimmen, für welchen jene Kraft ein Minimum wird. Diesen Werth giebt die Formel

$$\tan \alpha = -\frac{1}{f} + \frac{1}{f} \sqrt{\frac{-f^2 A + fB + C}{c}}, \quad (r)$$

aus welcher man desto kleinere Werthe erhält, je größer  $\gamma$  ist. So lange diese Werthe größer als  $\frac{H}{a}$  sind, müßte man daraus folgern, daß die Bruchfuge jenseit der Linie  $AE$  läge, was unzulässig ist; man muß dann  $\tan \alpha = \frac{H}{a}$  in die Gleichung (p) substituiren, und dadurch den gesuchten Werth für  $Q$  finden. Wird aber der Werth kleiner als  $\frac{H}{a}$ , so giebt dies die Bruchfuge  $EV$  innerhalb des Winkels  $AEF$  an und man muß dann diesen Werth in die Gleichung (p) substituiren.

Man muß indeß beachten, daß die Gleichung (r), welche, wenn  $\gamma$  unendlich wird, eben so wie die Gleichung (o),  $\tan \alpha = \tan \frac{1}{2} \sigma$  giebt, Werthe für  $\tan \alpha$  geben kann, welche zugleich kleiner als  $\frac{H}{a}$  und größer als  $f$  sind. Sollte dieser Fall eintreten, so darf man, in Uebereinstimmung mit dem oben Gesagten, nicht mehr die Formel (p) anwenden, sondern man muß auf die Formel (l) zurückkommen, in welche man für  $\tan \alpha$  den aus der Formel (o) erhaltenen Werth substituirt und dadurch den kleinsten möglichen Werth für  $Q$  erhält, welcher in der Anwendung zulässig ist.

§. 209. Fassen wir das Vorhergehende kurz zusammen! Ist der Bruch eines Körpers durch das Herabgleiten eines Theils zu untersuchen, und will man die größte Horizontalkraft  $Q$  bestimmen, der dieser Körper widerstehen kann, so prüfe man die aus der Formel (n) erhaltenen Werthe von  $\tan \alpha$ . 1) Sind diese Werthe reell und kleiner als  $\frac{H}{a}$ , so kann der Körper keiner Kraft widerstehen. 2) Sind diese Werthe reell und größer als  $\frac{H}{a}$ , so setze man  $\tan \alpha = \frac{H}{a}$  in die Formel (m), aus welcher man für  $Q$  den gesuchten Werth findet. 3) Sind die genannten Werthe imaginär, so berechne man den Werth von  $\tan \alpha$  nach der Formel (o) und substituire diesen in die Formel (m); man berechne gleichfalls den Werth von  $\tan \alpha$  nach der Formel (r) und substituire diesen in die Formel (p): von den beiden Werthen für  $Q$ , welche man auf diese Weise erhält, wähle man nachher den kleinsten.

§. 210. Die vorhergehenden Resultate setzen eine gleichmäßige Zusammensetzung des Körpers voraus. Sie gelten also für Körper aus Erde, Beton, oder kleinen unregelmäßig gelagerten Bruchsteinen, wobei man für  $f$  und  $\gamma$  die dem Mörtel entsprechenden Werthe zu nehmen hat.

Bei einem Körper, der aus großen und regelmäßig behauenen Steinen besteht, welche in geordneten Schichten gelagert sind, giebt es zuweilen gewisse Richtungen, in denen der Bruch des Körpers leichter erfolgt, als in andern. Wenn z. B. der Körper aus horizontalen Schichten besteht, so wird der Bruch in der Fuge eintreten, welche unmittelbar unter dem Angriffspunkte  $E$  der Kraft  $Q$  liegt. Das Gleichgewicht wird stattfinden, wenn

$$Q = fP + \gamma a$$

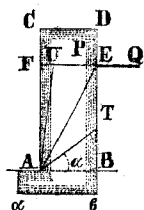
ist, wobei man für  $\gamma$  den Werth zu setzen hat, welcher dem Mortel entspricht.

Wenn die Steine so gelagert sind, daß es in den Richtungen, in welchen das Gleiten eintreten kann, keine zusammenhängenden Fugen giebt, so untersuche man die Größe der Oberfläche der Steine, welche zerbrochen werden müssen, damit ein Gleiten eintreten kann und berechne hieraus den Widerstand der Cohäsion.

### Zweiter Fall, in welchem der Bruch des Körpers durch Umsturz erfolgt.

§. 211. Man nehme an, daß der Bruch des Körpers nach einer schiefen Richtung  $AT$ , (Fig. 24), erfolge, und der obere

Fig. 24. Theil  $ACDT$  umstürze, indem er sich um die Kante  $A$  dreht. Man behalte die Benennungen des §. 202 bei und bezeichne ferner mit



$R$  die absolute Cohäsion der Materie des Körpers oder die Kraft, deren man bedarf, um zwei Theile des Körpers durch einen Zug, rechtwinklig zur Bruchfuge, zu trennen; man erhält alsdann für das Moment der Kraft, welche den Umsturz des oberen Theils zu bewirken sucht,

$QH$ .

Nimmt man für das Moment des Widerstandes gegen den Bruch in  $AT$  einen Ausdruck an, welcher mit dem in §. 150 nach der Hypothese Mariotte's gefundenen übereinstimmt, so erhält man für das Moment der Kräfte, welche dem Umsturze widerstreben,

$$\frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \tan \alpha + \frac{Ra^2}{3 \cos^2 \alpha}.$$

Setzt man diese beiden Momente einander gleich, so erhält man

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi a^3}{3} \tan \alpha + \frac{Ra^2}{3 \cos^2 \alpha}.$$

§. 212. Sucht man den Werth von  $\tan \alpha$ , für welchen die rechte Seite der Gleichung ein Minimum wird, so erhält man zugleich die Richtung, in welcher der Bruch erfolgen würde, wenn

das Moment  $QH$  etwas größer würde, als dasjenige, für welches Gleichgewicht besteht, so wie den größten Werth, welchen man diesem Momente beilegen darf. Der aus dieser Bedingung folgende Werth von  $\tan \alpha$  ist,

$$\tan \alpha = \frac{\Pi a}{2R};$$

substituirt man denselben in die vorstehende Gleichung, so erhält man für die gesuchte Grenze

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} - \frac{\Pi^2 a^4}{12R} + \frac{Ra^2}{3}.$$

Löst man diese Gleichung für  $a$  auf, so erhält man die geringste Dicke, welche eine Mauer haben darf, um der Wirkung der Kraft  $Q$  widerstehen zu können.

§. 213. Ist die Cohäsion sehr groß, so hat man offenbar

$$\tan \alpha = 0, \quad QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} + \frac{Ra^2}{3}.$$

Der Bruch tritt dann in der Basis  $AB$  ein. Man nimmt an, daß der Körper an dieser Basis mit der durch  $R$  ausgedrückten Kraft hafte.

§. 214. Je mehr  $R$  abnimmt, desto mehr nimmt  $\alpha$  zu und die Bruchebene entfernt sich mehr und mehr von  $AB$ . Wird aber der Werth von  $\tan \alpha$  aus §. 212 größer als  $\frac{H}{a}$ , d. h. müßte die Bruchebene jenseit  $AE$  liegen, so darf man die bisherige Formel nicht mehr anwenden, da die Kraft  $Q$  keine Trennung in dem obern Theile  $CDEF$  des Körpers bewirken kann.

§. 215. Wird der Werth von  $\tan \alpha$  aus §. 212 größer als  $\frac{H}{a}$ , so folgert man daraus, daß die Richtung des Bruches eine gebrochene, wie  $AUE$  sein wird. Gleichzeitig ergiebt sich der Widerstand gegen den Bruch aus der Cohäsion, welche in den beiden Theilen der Bruchebene statt findet. Setzt man die Cohäsion gleich Null, wie es in der Praxis in den meisten Fällen geschehen muß, so ist  $AU$  fast als zusammenfallend mit  $AF$  anzunehmen und daher der Werth, welchen man der Kraft  $Q$  beilegen kann, aus der Gleichung

$$QH = \frac{Pa}{2},$$

zu bestimmen. Die letzte Gleichung giebt die Grenze für den geringsten Widerstand des Körpers, wenigstens, wenn man annimmt, daß die Theile des Körpers nicht zerdrückt werden sollen.

§. 216. Haftet der Körper an seiner Basis nicht mit derselben Kraft, mit welcher die Theile desselben zusammenhalten, so daß

man für die Cohäsion in der Ebene  $AB$  einen Werth  $R'$  hat, welcher kleiner als  $R$  ist, so erhält man durch die Gleichung

$$QH = \frac{Pa}{2} + \frac{\Pi a^2 H}{2} + \frac{R'a^2}{2}$$

eine neue Grenze, welche das Moment  $QH$  nicht überschreiten darf, ohne den Körper umzustürzen.

§. 217. Ist der Körper aus regelmäßig behauenen und in horizontalen Schichten gelagerten Steinen aufgeführt, so lassen sich die bisherigen Resultate anwenden, ohne merklich modificirt zu werden, wenn man für  $R$  den Werth nimmt, welcher dem Mörtel zugehört, der das Bindemittel der Steine abgiebt.

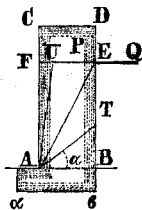
Die Art des Bruches, welche so eben untersucht worden ist, kommt in den meisten Fällen vor, da der Bruch durch Gleiten, durch verschiedene Constructionen verhindert werden kann und im Allgemeinen eine größere Kraft erfordert, als der Bruch durch Umsturz 1).

§. 218. Sind die Seiten des Körpers gegen den Horizont geneigt, oder discontinuirlich und greifen mehrere Kräfte in verschiedenen Punkten an, so wäre es unzweckmäßig, den Widerstand durch allgemeine Formeln ausdrücken zu wollen, um darauf die Lehre vom Größten und Kleinsten anzuwenden. Man müßte alsdann, von den vorhergehenden Erörterungen geleitet, den Widerstand für verschiedene hypothetische Bruchflächen berechnen, aus diesen den ungünstigsten Fall auswählen und sich vergewissern, daß selbst in diesem Falle der Körper den nöthigen Widerstand leisten würde.

### Ueber den Druck, den die Theile des Körpers erleiden und den Widerstand, welchen diese leisten müssen, um nicht zerdrückt zu werden.

§. 219. Man betrachte den in §. 211 u. folgd. behandelten Fall, in welchem der Bruch des Körpers als durch Umsturz geschehend angenommen wird, und nehme an, die Construction sei so entworfen, daß einfaches Gleichgewicht zwischen der Horizontalkraft  $Q$  und dem Widerstande besteht, welcher von dem Gewichte

Fig. 25. des umzustürzenden Theils und von der Cohäsion herrührt. Die Richtung der einzigen Resultante aller dieser Kräfte, wird durch die Kante  $AG$  gehen, (Fig. 25), da dies die feste Axe ist, um welche die Drehung vor sich gehen würde. Allein dann könnte diese Kante zerdrückt werden; und damit das Zerdrücken nicht erfolgen kann, müssen die Kräfte, die auf diesen Theil des Körpers, als auf den am meisten exponirten, wirkten, auf eine Fläche von einiger Ausdehnung vertheilt werden.



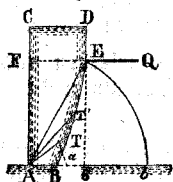
Aus dieser Bedingung folgt, daß von Seiten

1) Man sehe im Anhange die Tabelle über das Verhältniß der zum Fortschieben oder Umwerfen einer Mauer erforderlichen Kräfte.

des Körpers ein Ueberschuß an Widerstand existiren muß, damit die Richtung der Resultante aus der Horizontalkraft  $Q$  und den dieser Kraft entgegengesetzten Widerständen durch einen Punkt  $b$  gehe, welcher innerhalb der Basis des Körpers in einer endlichen Entfernung  $Ab$  von der Kante  $A$  liegt<sup>1)</sup>. Gesezt, man habe die Construction so bestimmt, daß man einen Ueberschuß an Widerstand erhält, und man wolle ermitteln, ob der Stein die nöthige Festigkeit besitze; so wird man die Richtung der gemeinschaftlichen Resultante auffuchen aus den Kräften, welche den Körper umzustürzen suchen und den Kräften, welche dem widerstreben, so wie den Punkt  $b$ , in welchem die Richtung der Resultante die Basis  $AB$  trifft. Man wird hierauf untersuchen, ob die von der Basis des Körpers aufgenommene Kraft auf einem größern Theil dieser Basis als  $Ab$  vertheilt werden muß. Nimmt man daher an, daß auf diesen Theil  $Ab$  eine Kraft wirke, welche der in Rede stehenden Resultante gleich ist, so erhält man dadurch eine Grenze für den auf den Stein ausgeübten Druck, über welche man nicht hinausgehen darf.

### Körper von gleichem Widerstande gegen den Bruch durch Umsturz.

Fig. 26.



§. 220. Man sucht die Curve  $DE$ , (Fig. 26), nach welcher der Körper profilirt sein muß, wenn der Widerstand gegen den Bruch in einer beliebigen Richtung  $AT$  innerhalb des Winkels  $BAE$  überall derselbe sein soll. Man nenne  $M$  das Moment der Kraft  $Q$ , weniger das Moment des Theils  $ACDE$  des Körpers, diese Momente in Bezug auf den Punkt  $A$  genommen;

$H$  die Höhe  $BE$  des Angriffspunktes der Kraft  $Q$ ;

$c$  die Länge der Linie  $AE$ ;

$A$  den Winkel  $BAE$ ;

$\alpha$  den Winkel  $BAT$ ;

$q$  den Halbmesser  $AT$ ;

$\Pi$  und  $R$  behalten die oben angegebenen Bedeutungen.

Sieht man  $\alpha$  und  $q$  als die Polarcoordinaten der Curve  $BE$  an und nennt man  $\alpha'$  und  $q'$  die Coordinaten eines beliebigen Punktes, welche höher als  $T$  liegt, so hat man

$$\frac{1}{3} \Pi q'^3 \cos \alpha' d\alpha'$$

als das Moment des Gewichtes eines dreieckigen Elementes der Fläche  $ATE$ . Bei der Voraussetzung, daß der Bruch in  $AT$  eintrete, hat man daher die Gleichgewichtsgleichung

1) Ist  $M$  das Moment der Kraft  $Q$  und  $M'$  das Widerstandsmoment des Körpers, so muß  $M = 8M'$  sein; Français findet aus den Bauhan'schen Profilen  $\delta = 1,8$ .

$$M \rightarrow \frac{1}{3} \Pi \int_a^A q'^3 \cos \alpha' d\alpha' = \frac{R q^3}{3}.$$

Differentiirt man nach  $\alpha$ , so erhält man

$$\Pi q^3 \cos \alpha d\alpha = 2 R q dq, ^1)$$

woraus

$$\frac{\Pi}{2R} \sin \alpha = -\frac{1}{q} + \text{Const.};$$

oder weil für  $\alpha = A$ ,  $q = c$  wird,

$$q = \frac{2 R c}{2R + \Pi(\sin A - \sin \alpha) c},$$

oder

$$q = \frac{2 R c}{2R + \Pi(H - c \sin \alpha)},$$

und dies ist die Gleichung der gesuchten Curve.

§. 221. Nimmt man die Cohäsion sehr groß an, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$q = c,$$

d. h. die Curve wird zum Kreisbogen  $Eb$  mit dem Mittelpunkt  $A$ .

§. 222. Nimmt man die Cohäsion sehr klein an, so wird offenbar die Curve sich von der Geraden  $EA$  nicht merklich unterscheiden. Hätte man in diesem Falle dem Körper ein rechteckiges Profil gegeben, so würde der Theil  $EAB$  zu der Solidität des Ganzen nichts beitragen.

Die eben entwickelte Theorie findet besonders Anwendung bei der Construction der Strebe Pfeiler, deren man sich bei den Gebäuden des gothischen Styls bedient.

### Versuche über den Widerstand des Mauerwerkes gegen den Bruch durch Umsturz.

§. 223. Séguin der Ältere <sup>2)</sup> und besonders Vicat <sup>3)</sup> haben über diesen Widerstand einige Versuche angestellt. Die des Letzteren beziehen sich hauptsächlich auf den Fall, in welchem die Kraft an einer Kette wirkt, welche einen Mauerkörper umfaßt, wobei die Kraft den Körper in eine schiefe Lage zu bringen strebt. Die oben entwickelte Theorie stimmt mit den Resultaten dieser Versuche überein.

1) Es sei  $\int_a^A q'^3 \cos \alpha' d\alpha' = b + f(\alpha)$ , so ist

$$\int_a^A q'^3 \cos \alpha' d\alpha' = f(A) - f(\alpha) \text{ und (weil } f(A) \text{ eine Constante)}$$

$$d. \int_a^A q'^3 \cos \alpha' d\alpha' = -d. f(\alpha) = -q^3 \cos \alpha d\alpha.$$

2) Des ponts en fil de fer, pag. 110 der zweiten Ausgabe.

3) Influence du mode d'attache des chaînes, sur la résistance des piliers des ponts suspendus. Annales des ponts et chaussées, tome III.

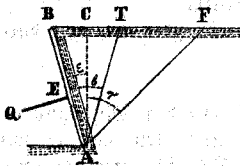
Viertes Kapitel.

Berechnung der Futtermauern, welche dem Erd- und Wasserdrucke widerstehen.

§. 224. Die vorliegende Frage umfaßt zwei Theile: 1) die Untersuchung des Druckes, welchen eine Erdmasse (oder das Wasser) gegen eine ebene Wand ausübt; 2) die Bestimmung der Dimensionen, welche man für die Mauern annehmen muß, welche diesem Drucke widerstehen sollen.

Druck der Erde gegen eine ebene Wand.

Fig. 27.



§. 225. Es sei AB (Fig. 27) eine ebene Wand oder feste Ebene, gegen welche eine Erdmasse drückt und die durch eine normal gegen dieselbe wirkende Kraft Q aufrecht erhalten wird; man sucht den Werth der Kraft Q und den Angriffspunkt E derselben. Nimmt man nun an, daß die Erde in AT sich trenne, und nennt man

$h$  die verticale Höhe der Wand oder AC;

$\varepsilon$  den Winkel BAC, welchen die Wand mit der Verticalen bildet;

$\beta$  den Winkel BAT, welchen die Bruchfläche mit der Wand bildet;

$\tau$  den Winkel CAF, welchen die Verticale mit der Ebene bildet, auf welcher die Erde allein durch die Wirkung der Reibung sich im Gleichgewicht hält, so daß  $f = \frac{\cos \tau}{\sin \tau}$ ;

wo  $f$  und  $\gamma$  behalten die in §. 188 angegebenen Bedeutungen.

Die Kraft, welche das Gleiten des Prisma's BAT längs AT zu bewirken sucht, ist

$$\frac{\omega h^2}{2} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \cdot \cos(\beta - \varepsilon);$$

die Kraft, welche dieses Gleiten zu verhindern sucht, ist

$$Q \sin \beta + f Q \cos \beta + \frac{f \omega h^2}{2} \left\{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \right\} \sin(\beta - \varepsilon) + \frac{\gamma h}{\cos(\beta - \varepsilon)}.$$

Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich und sucht den Werth von Q, so erhält man

1)  $\omega$  in der Bedeutung des II in §. 183.



$$Q = \frac{\frac{\omega h^2}{2} \{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \} \{ \cos(\beta - \varepsilon) - f \sin(\beta - \varepsilon) \} - \frac{\gamma h}{\cos(\beta - \varepsilon)}}{\sin \beta + f \cos \beta}$$

oder, wenn man für  $f$  seinen Werth  $\frac{\cos \tau}{\sin \tau}$  setzt

$$Q = \frac{\frac{\omega h^2}{2} \{ \tan(\tau - \beta) + \tan \varepsilon \} \{ \tan(\beta - \varepsilon) + \tan \varepsilon \} \cos \varepsilon - \frac{\gamma h \sin \tau}{\cos(\tau - \beta) \cos(\beta - \varepsilon)}}{\sin \tau}$$

Sucht man den Werth von  $\beta$ , für welchen die rechte Seite der Gleichung ein Maximum wird, so erfährt man zugleich die Richtung, nach welcher die Erde sich trennen würde, wenn die Kraft  $Q$  etwas zu klein wäre; so wie den geringsten Werth, welchen man dieser Kraft beilegen darf. Das Maximum findet statt, wenn

$$\tau - \beta = \beta - \varepsilon \text{ oder } 2\beta = \tau + \varepsilon$$

ist, woraus folgt, daß die Ebene, in welcher die Trennung erfolgen würde, den Winkel  $BAF$  halbirt, den die Wand mit der natürlichen Böschung der Erde einschließt.

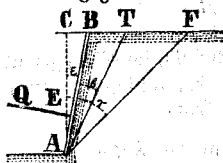
Das auf diese Weise bestimmte Prisma nennt man das Prisma des größten Druckes 1).

§. 226. Substituirt man den Ausdruck für  $\beta$  in den für  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{\frac{\omega h^2}{2} \{ \tan \frac{1}{2}(\tau - \varepsilon) + \tan \varepsilon \}^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{\cos^2 \frac{1}{2}(\tau - \varepsilon)}}{\sin \tau}$$

als den gesuchten Werth des Erddruckes.

Fig. 28.



§. 227. Ist die Wand  $AB$  (Fig. 28) nach der Seite des Körpers geneigt, so muß der Winkel  $\varepsilon$  mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden. Das Prisma des größten Druckes wird durch die Gleichung

$$2\beta = \tau - \varepsilon$$

bestimmt, und der Werth des Erddruckes ist

$$Q = \frac{\frac{\omega h^2}{2} \{ \tan \frac{1}{2}(\tau + \varepsilon) - \tan \varepsilon \}^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{\cos^2(\tau + \varepsilon)}}{\sin \tau}$$

§. 228. Ist die Wand vertical, also  $\varepsilon = 0$ , so hat man, um das Prisma des größten Druckes zu bestimmen

\*) Das Princip, nach welchem das Prisma des größten Druckes bestimmt wird, verdanken wir Coulomb (*Mémoires des savans étrangers*, 1773). Das obige Theorem hat Prony für den Fall einer verticalen Wand (in den *Recherches sur la poussée des terres*, 1812) und Français für den Fall einer geneigten Wand (in den *Mémoires de l'officier du génie*, Nr. 4, 1820) gegeben.

$$2\beta = \tau;$$

der Werth des Erddruckes ist

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} \tan^2 \frac{\tau}{2} - 2\gamma h \tan \frac{\tau}{2}.$$

§. 229. Setzt man zur Abkürzung

$$t = \tan \frac{1}{2} (\tau \mp \varepsilon) \pm \tan \varepsilon,$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$t = \tan \frac{1}{2} \tau,$$

so daß  $t$  das Verhältniß der Basis des Prisma's des größten Druckes zu der Höhe desselben ausdrückt, so erhält man für den Erddruck

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{\cos^2 \frac{1}{2} (\tau \mp \varepsilon)},$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$Q = \frac{\omega h^2}{2} t^2 - 2\gamma h t.$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn  $h = 0$  wird; nimmt  $h$  zu, so wird er anfänglich negativ, darauf wieder Null, wenn  $h$  einen Werth erreicht, welchen wir  $h'$  nennen wollen; dieser ist

$$h' = \frac{2\gamma}{\omega t^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\tau \mp \varepsilon) \cos \varepsilon};$$

und wenn die Wand vertical ist,

$$h' = \frac{4\gamma}{\omega t}, \text{ woraus } \gamma = \frac{1}{4} \omega h' t.$$

Die Erde kann also bei der Höhe  $h'$  sich selbst im Gleichgewicht halten, was mit dem Resultate des §. 192 übereinstimmt. Jenseit dieser Grenze wächst  $Q$  mit  $h$  zugleich ohne Ende.

§. 230. Der Ausdruck für  $Q$  kann auf die Form

$$Q = \frac{\omega h}{2} t^2 (h - h') \cos \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist, auf die Form

$$Q = \frac{\omega h}{2} t^2 (h - h')$$

gebracht werden.

1) Man sehe hier im Anhange die Formel von Français und die danach berechnete Tabelle von Martony für Erdaushebungen und Erdausträge.

§. 231. Um nun in der Wand den Angriffspunkt der Kraft  $Q$  zu finden, beachte man, daß auf einen Theil der Wand, zu dem der Theil  $z$  der Höhe  $h$  gehört, der Druck ist

$$\frac{wz}{2} t^2 (z-h') \cos \varepsilon.$$

Differentiirt man nach  $z$ , so erhält man

$$\frac{w dz}{2} t^2 (2z-h') \cos \varepsilon.$$

für den Druck auf den Theil der Wand, zu welchem der Theil  $dz$  der Höhe  $h$  gehört. Das Moment dieses Druck-Elementes in Bezug auf die Kante  $A$  (Fig. 27 und 28) erhält man, indem man mit  $\frac{h-z}{\cos \varepsilon}$  multiplicirt.

Nimmt man die Summe der Momente dieser Druck-Elemente und dividirt dieselbe durch den Totaldruck, so erhält man

$$\frac{\int_0^h \{-2z^2 + (2h+h')z - hh'\} dz}{h(h-h') \cos \varepsilon} = \frac{h}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{h - \frac{1}{2}h'}{h-h'}.$$

für die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft  $Q$  von dem untern Punkte  $A$  der Wand.<sup>1)</sup>

Ist die Wand vertical, so ist diese Entfernung

$$\frac{1}{3} h \cdot \frac{h - \frac{1}{2}h'}{h-h'}.$$

§. 232. Die Neigung der Ebene, welche das Prisma des größten Druckes begrenzt, ist von der Cohäsion unabhängig. Setzt man die Cohäsion gleich Null, also  $h' = 0$ , so wird der Druck

$$Q = \frac{wh^2}{2} t^2 \cos \varepsilon;$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$Q = \frac{wh^2}{2} t^2.$$

Die Entfernung des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand ist

1) Navier bemerkt hier Folgendes: Diese Formel weicht von der von Prony und Français in den oben citirten Memoiren gegebenen insofern ab, als diese Gelehrten das Integral für das Moment des Druckes zwischen den Grenzen  $h'$  und  $h$  nehmen. Man beachte, daß, wenn auch die Summe der Druck-Elemente für die Höhe  $h$  gleich Null ist, doch daraus nicht folgt, daß auch die Summe der Momente dieser Drücke gleich Null sein müsse. Man wird also das Integral, nach dem Vorgange von Coulomb in seinem Memoire von 1773, zwischen den Grenzen 0 und  $h$  nehmen müssen. Verfäht man auf diese Weise, so verschwindet die Anomalie, welche Prony in Nr. 28 seiner Recherches sur la poussée des terres findet.

Man sehe über diese Frage den Anhang.

und, wenn die Wand vertical ist,

$$\frac{1}{3} h,$$

wie bei den tropfbar-flüssigen Materien.

§. 233. Setzt man zugleich Cohäsion und Reibung gleich Null,  $k' = 0$ ,  $\tau = 90^\circ$ , so ist

$$t = \tan(45^\circ \mp \frac{1}{2} \varepsilon) \pm \tan \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist,

$$t = 1.$$

In diesem Falle ist der Druck

$$Q = \frac{\omega h^2}{2},$$

was mit den bekannten Eigenschaften der tropfbar-flüssigen Materien übereinstimmt.

**Druck der Erde gegen eine ebene Wand, wenn dieselbe eine auf ihrer Oberfläche gleichförmig vertheilte Last trägt.**

§. 234. Kehrt man zu der Rechnung des §. 225 zurück und nimmt an, daß der Erbkörper auf seiner oberen horizontalen Endfläche gleichförmig mit Materien belastet sei, welche sich in Verticalebenen ablösen, die durch die oberen Grenzen  $T$  der Bruchflächen (Fig. 27 u. 28) gehen, und nennt man ferner

$p$  das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht; so hat man in den Formeln des genannten Paragraphen  $ph + \frac{1}{2} \omega h^2$  für  $\frac{1}{2} \omega h^2$  zu setzen. Der Winkel für das Prisma des größten Druckes wird stets derselbe bleiben. Für den Druck wird man aus §. 229 erhalten

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 \cos \varepsilon - \gamma h \frac{\sin \tau}{\cos^2 \frac{1}{2} (\tau \mp \varepsilon)};$$

und für den Fall, in welchem die Wand vertical ist,

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 - 2\gamma ht.$$

§. 235. Nennt man  $h''$  den Werth von  $h$ , für welchen  $Q=0$  wird, so hat man

$$h'' = h' - \frac{2p}{\omega},$$

und die Formeln, welche in §. 230 für  $Q$  und in §. 231 für die Entfernung des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand gefunden wurden, werden auf den vorliegenden Fall Anwendung finden können, sobald man  $h''$  für  $h'$  schreibt.

§. 236. Setzt man, wie in §. 232, die Cohäsion der Erdmasse gleich Null, so erhält man für den Druck

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2 \cos \varepsilon,$$

und, wenn die Wand vertical ist

$$Q = (ph + \frac{1}{2} \omega h^2) t^2.$$

Der Abstand des Angriffspunktes von  $Q$  von der untern Grenze der Wand ist

$$\frac{h}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{\omega h + 3p}{\omega h + 2p},$$

und bei einer verticalen Wand

$$\frac{1}{3} h \cdot \frac{\omega h + 3p}{\omega h + 2p}.$$

§. 237. Hat man statt der Erde eine Flüssigkeit, so kann man auf diesen Fall die obigen Ausdrücke für  $Q$  anwenden, wenn man  $\varepsilon = 90^\circ$  setzt, woraus für eine vertical Wand  $t = 1$  folgt. Der obige Werth für die Entfernung des Angriffspunktes des Druckes entspricht in gleicher Weise den Erdmassen, deren Cohäsion gleich Null gesetzt wird, wie den flüssigen Materien.

### Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke widersteht.

Fig. 29.

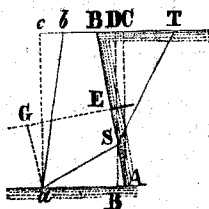
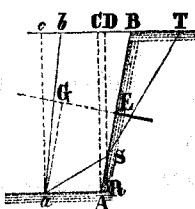


Fig. 30.



§. 238. Man nehme an, der Bruch der Mauer ABba (Fig. 29 und 30) könne in der schiefen Richtung  $aS$  erfolgen. Der Bruch kann eintreten, indem entweder der Theil SBba auf der Bruchfläche herabgleitet, oder, indem dieser obere Theil durch eine Drehung um die Kante  $a$  umgestürzt wird. Der Bruch durch das Herabgleiten auf einer geneigten Ebene,

welche durch die Dicke der Mauer geht, läßt sich durch verschiedene Constructionen verhindern, und auch abgesehen hiervon, wird doch diese Art des Bruches im Allgemeinen nicht eintreten, wenn die Mauer die erforderliche Dicke besitzt, um dem Bruche durch Umsturz zu widerstehen.<sup>1)</sup> Es soll hier nur die letztere Art des Bruches untersucht werden.

Man behalte die Bezeichnungen aus §. 225 u. folgd. bei und nenne ferner

1) Man vergleiche §. 217.

- a* die Breite *Aa* der Basis der Mauer;  
*h* die verticale Höhe *AC*;  
*m* das Verhältniß der Basis zur Höhe für die Böschung der äußern Seite der Mauer;  
*Π* das Gewicht einer Volumeneinheit der Mauermasse;  
*k* die Cohäsion der Mauermasse für die Flächeneinheit (siehe §. 211);  
*F* den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Erde an der innern Fläche der Mauer;  
*ε* den Winkel, welchen die innere Fläche *AB* mit der Verticalen einschließt;  
*z* die unbestimmte Höhe *SD*.

Denkt man sich nun den Erddruck gegen *BS* als eine in *E* angreifende, rechtwinklig gegen die Mauer gerichtete Kraft, so ist nach §. 230 der Werth desselben

$$\frac{1}{2} \omega z l^2 (z - k') \cos \varepsilon.$$

Die Entfernung *SE* ist nach §. 231

$$\frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{1}{2} k'}{z - k'},$$

woraus für den Hebelarm *aG* der in Rede stehenden Kraft folgt

$$\frac{h - z}{\cos \varepsilon} + \frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{1}{2} k'}{z - k'} \mp a \sin \varepsilon.$$

Der Ausdruck für das Moment des Erddruckes ist demnach

$$\frac{1}{2} \omega z l^2 (z - k') \cos \varepsilon \left\{ \frac{h - z}{\cos \varepsilon} + \frac{z}{3 \cos \varepsilon} \cdot \frac{z - \frac{1}{2} k'}{z - k'} \mp a \sin \varepsilon \right\},$$

wobei die oberen und die unteren Zeichen beziehlich für die Fälle gelten, welche durch Fig. 29 und 30 dargestellt werden. Der obige Ausdruck gilt auch für den Fall, in welchem die Erdmasse gleichmäßig belastet ist, wenn man nach §. 235 *k''* für *k'* schreibt.

§. 239. Das Moment der Kräfte, welche dem Umsturz widerstreben, bezogen auf die Kante *a*, besteht aus folgenden Theilen:

1. das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Rechteck *ACca* darstellt, nämlich

$$\frac{1}{2} \Pi a^2 h;$$

2. minus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck *abc* darstellt, nämlich

$$\frac{1}{6} \Pi m^2 h^3;$$

3. minus oder plus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck *ACB* darstellt,

$$\frac{1}{2} \Pi h^2 \tan \varepsilon (a \mp \frac{1}{2} h \tan \varepsilon);$$

4. minus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $aRS$  darstellt,

$$\frac{1}{3} \Pi (h-z) \left\{ a \mp (h-z) \tan \varepsilon \right\}^2;$$

5. minus oder plus das Moment des Gewichtes des Prisma's, dessen Querschnitt das Dreieck  $ARS$  darstellt,

$$\frac{1}{2} \Pi (h-z)^2 \tan \varepsilon \left\{ a \mp \frac{2}{3} (h-z) \tan \varepsilon \right\};$$

6. das Moment des Widerstandes gegen den Bruch in  $aS$ ,

$$\frac{1}{3} R \left\{ (h-z)^2 + [a \mp (h-z) \tan \varepsilon]^2 \right\}$$

7. das Moment der Reibung und Adhärenz der Erde an der innern Seitenfläche der Mauer,

$$\frac{1}{2} F \omega z^2 (z-h') \cos \varepsilon \cdot a \cos \varepsilon.$$

§. 240. Das Gleichgewicht der Mauer wird für einen gegebenen Werth von  $z$  sich dadurch ausdrücken lassen, daß man diese Momentensumme dem Momente des Erddruckes gegen  $RS$  gleichsetzt. Löset man darauf diese Gleichung für  $a$  auf und bestimmt den Werth von  $z$ , für welchen  $a$  ein Maximum wird, so erfährt man zugleich die Richtung, in welcher der Bruch der Mauer erfolgen würde, wenn die Dicke  $a$  etwas zu klein wäre, so wie den kleinsten Werth, welchen man dieser Dicke beilegen darf.

§. 241. Wir wollen annehmen, die innere Seitenfläche der Mauer sei vertical, und die Cohäsion der Erde, so wie der Mauer-  
masse sei Null; daraus folgt  $s=0$ ,  $h'=0$ ,  $R=0$ . Ferner wollen wir die Reibung der Erde an der innern Seite der Mauer gleich Null, also  $F=0$ , setzen. Giebt es in diesem Falle keine Belastung auf der horizontalen Oberfläche der Erdmasse, so ist das Moment des Erddruckes, bezogen auf die Kante  $A$ ,

$$\frac{1}{2} \omega z^2 h^2 (h - \frac{2}{3} z);$$

und das Moment der Stabilität der Mauer ist

$$\frac{1}{2} \Pi a^2 h - \frac{1}{3} \Pi a^2 (h-z) - \frac{1}{6} \Pi m^2 h^3.$$

Setzt man diese beiden Größen einander gleich und sucht  $a$ , so findet man

$$a = \sqrt{\frac{\omega z^2 h^2 (3h-2z) + \Pi m^2 h^3}{\Pi (h+2z)}}$$

Differentiirt man und setzt man den ersten Differentialquotienten gleich Null, so erhält man, um den Werth von  $z$  zu bestimmen, für welchen  $a$  ein Maximum wird, die Gleichung

$$8 \omega t^2 \Pi z^3 - 6 \omega t^2 \cdot \Pi h^2 z + 2 \Pi^2 m^2 h^3 = 0.$$

Der hieraus gefundene Werth, in die vorhergehende Gleichung gesetzt, giebt die kleinste mögliche Dicke für die Basis der Mauer.

§. 242. Ist die äußere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so reducirt sich der vorstehende Ausdruck für  $a$  auf

$$a = \sqrt{\frac{\omega z^2 t^2 (3h - 2z)}{\Pi(h + 2z)}}.$$

Der Werth von  $z$ , für welchen  $a$  ein Maximum wird, ist

$$z = \frac{1}{2} \sqrt{3h},$$

und die kleinste Dicke, welche man der Mauer geben darf, ist

$$a = ht \sqrt{\frac{9\omega}{(12 + 8\sqrt{3})\Pi}}.$$

Es ist also die Höhe  $RS$  ungefähr  $\frac{1}{8}$  der Höhe der Mauer und die kleinste Dicke ist nahe gleich  $0,59 \cdot ht \sqrt{\frac{\omega}{\Pi}}$ .

**Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, daß eine Drehung der ganzen Mauer um die äußere Kante ihrer Basis erfolgen könne.**

§. 243. Wir betrachten jetzt die Mauer als einen Körper, der auf einer Basis steht, zu welcher er keine Adhärenz besitzt, während die Cohäsion der Mauermasse groß genug angenommen wird, um eine Trennung der Masse verhindern zu können, im Falle der Erddruck die Mauer, durch eine Drehung um die äußere Kante ihrer Basis, umstürzen würde. Behält man die Benennungen des §. 238, welche sich auf Fig. 29 und 30 beziehen, bei, so findet man das Moment des Erddruckes gegen  $AB$  aus dem in dem genannten Paragraphen entwickelten Ausdrücke, wenn man  $z = h$  setzt, nämlich

$$\frac{1}{2} \omega t^2 \left\{ \frac{1}{3} h^2 (h - \frac{3}{2} h') \mp ah(h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}.$$

Das Moment der Kräfte, welche den Umsturz zu verhindern suchen, findet man ebenfalls aus den in §. 239 entwickelten Ausdrücke, wenn man  $z = h$ ,  $R = 0$ ,  $F = 0$  setzt, nämlich

$$\frac{1}{2} \Pi h \left\{ a^2 \mp ah \tan \varepsilon + \frac{1}{3} h^2 (\tan^2 \varepsilon - m^2) \right\}.$$

Setzt man diese beiden Werthe einander gleich und löset die Gleichung für  $a$  auf, so erhält man



$$a = \pm \frac{1}{2} \left\{ h \tan \varepsilon - \frac{\omega}{\Pi} t^2 (h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\} \\ + \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ h \tan \varepsilon - \frac{\omega}{\Pi} t^2 (h - h') \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}^2} \\ + \frac{\omega}{3\Pi} t^2 h (h - \frac{3}{2} h') - \frac{1}{3} h^2 (\tan^2 \varepsilon - m^2) \Big\}$$

als die Breite, welche man der Basis der Mauer zu geben hat.

Dieser Ausdruck wird auch in dem Falle gelten, daß die horizontale Oberfläche der Erdmasse belastet ist, wenn man nur  $h'$  für  $h'$  schreibt und für  $h'$  den in §. 235 angegebenen Werth nimmt.

§. 244. Ist die innere Seitenfläche der Mauer vertical,  $\varepsilon=0$ , so erhält man für  $a$

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2\Pi} t^2 h (h - \frac{3}{2} h') + \frac{1}{3} m^2 h^2}$$

wo  $t = \tan \frac{1}{2} \tau$  ist, in Uebereinstimmung mit §. 229.

§. 245. Ist die äußere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so hat man

$$a = t \sqrt{\frac{\omega}{3\Pi} \cdot h (h - \frac{3}{2} h')}$$

§. 246. Wird die Cohäsion der Erdmasse gleich Null angenommen, so muß man, wenn die horizontale Oberfläche der Erde belastet ist, nach §. 235,  $-\frac{2p}{\omega}$  für  $h'$  in den allgemeinen Ausdruck für  $a$  in §. 243 setzen. Giebt es aber keine Belastung, so hat man  $h' = 0$  zu setzen. Aus dem Ausdrucke in §. 243 wird alsdann

$$a = \pm \frac{1}{2} h \left\{ \tan \varepsilon - \frac{\omega}{\Pi} t^2 \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\} \\ + h \cdot \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \tan \varepsilon - \frac{\omega}{\Pi} t^2 \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon \right\}^2 + \frac{\omega}{3\Pi} t^2 - \frac{1}{3} (\tan^2 \varepsilon - m^2)}.$$

§. 247. Ist die innere Seite der Mauer vertical, während die Cohäsion der Erde gleich Null angenommen wird, so hat man

$$a = h \sqrt{\frac{\omega}{3\Pi} t^2 + \frac{1}{3} m^2}.$$

§. 248. Sind endlich beide Seiten der Mauer vertical, während, die Cohäsion der Erde gleich Null angenommen wird, so hat man

$$a = ht \sqrt{\frac{\omega}{3\Pi}};$$

so daß die geringste Dicke, welche man der Mauer geben darf, nahe gleich  $0,577 \cdot h\sqrt{\frac{\omega}{\Pi}}$  ist, ein Resultat, welches von dem des §. 242 nicht merklich verschieden ist.

§. 249. Die in den drei vorhergehenden Paragraphen gefundenen Formeln lassen sich auf den Fall, in welchem man statt der Erde eine Flüssigkeit hat, anwenden, wenn man  $\tau = 90^\circ$  setzt, woraus  $\epsilon = 1$  folgt, wenn die innere Seite der Mauer vertical ist.

**Gleichgewicht einer Mauer, welche dem Erddrucke zu widerstehen hat, unter der Voraussetzung, daß ein Fortgleiten der Mauer auf ihrem Fundamente erfolgen könne.**

§. 250. Man kann die Mauer auch als einen Körper betrachten, der auf einer horizontalen Basis steht und mit dieser durch eine schwache Adhärenz verbunden ist, während der Erddruck ihn auf derselben fortzuschieben sucht, ohne eine Trennung in der Mauermaße zu bewirken. Unter Beibehaltung der in §. 238 angenommenen Benennungen, welche sich auf Fig. 29 und 30 beziehen, nenne man

$\Phi$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Mauer auf der Basis  $Aa$ ;

$\Gamma$  die zwischen dieser Basis und der Mauermaße bestehende Adhärenz.

Die Kraft, welche das Gleiten hervorzubringen sucht, ist die horizontale Componente des Erddruckes  $Q$ , dessen Werth in §. 230 angegeben wurde, d. h.

$$\frac{1}{2} \omega h t^2 (h - h') \cos^2 \epsilon.$$

Das Gewicht der Mauer ist

$$\Pi \left\{ ah - \frac{1}{2} h^2 (m \pm \tan \epsilon) \right\},$$

und daher die Kraft, welche das Gleiten zu verhindern sucht,

$$\pm \frac{1}{2} \Phi \omega h t^2 (h - h') \sin \epsilon \cos \epsilon + \Phi \Pi \left\{ ah - \frac{1}{2} h^2 (m \pm \tan \epsilon) \right\} + \Gamma a$$

Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich, so drückt man damit die Bedingung für das Gleichgewicht dieses Systemes aus; löset man die Gleichung für  $a$  auf, so erhält man

$$a = \frac{h \omega t^2 (h - h') \cos^2 \epsilon (1 \mp \Phi \tan \epsilon) + \Phi \Pi h (m \pm \tan \epsilon)}{2 \Phi \Pi h + \Gamma}$$

als den Ausdruck für die geringste Breite, welche man der Basis der Mauer geben darf.

Dieser Ausdruck wird auch für den Fall gelten, daß die hori-

izontale Oberfläche der Erdmasse belastet ist, wenn man  $k'$  für  $k$  schreibt, und für  $k'$  den in §. 235 angegebenen Werth nimmt.

§. 251. Ist die innere Seitenfläche der Mauer vertical,  $\varepsilon = 0$ , so ist der Werth von  $a$

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\omega t^2(h-k') + \Phi \Pi m h}{\Phi \Pi h + \Gamma},$$

in welcher Formel  $t = \tan \frac{1}{2} \tau$  ist, zufolge §. 229.

§. 252. Ist die äußere Seitenfläche der Mauer ebenfalls vertical,  $m = 0$ , so hat man

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\omega t^2(h-k)}{\Phi \Pi h + \Gamma}.$$

§. 253. Wird die Cohäsion der Erdmasse gleich Null angenommen, so muß man, wenn die horizontale Oberfläche der Erde belastet ist, nach §. 235, —  $\frac{2p}{\omega}$  für  $k$  in die beiden vorhergehenden Ausdrücke setzen. Giebt es aber keine Belastung, so hat man  $k = 0$  zu setzen. Nimmt man zugleich die Cohäsion (die Abhängenz) zwischen der Mauer und der Basis gleich Null an, so wird aus dem Ausdrucke in §. 250

$$a = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\omega}{\Phi \Pi} t^2 \cos^2 \varepsilon (1 \mp \Phi \tan \varepsilon) + m \pm \tan \varepsilon \right\}.$$

§. 254. Ist die innere Seite der Mauer vertical, während die Cohäsion Null ist, so hat man

$$a = \frac{h}{2} \left\{ \frac{\omega}{\Phi \Pi} t^2 + m \right\}.$$

§. 255. Sind endlich beide Seiten der Mauer vertical, während die Cohäsion Null ist, so hat man

$$a = \frac{h}{2} \cdot \frac{\omega}{\Phi \Pi}.$$

§. 256. Die Formeln in den drei vorhergehenden Paragraphen werden auch für den Fall gelten, daß statt der Erde das Wasser den Druck ausübt, wenn man  $\tau = 90^\circ$  setzt, woraus  $t = 1$  folgt, wenn die innere Seite der Mauer vertical ist.

Alle seit §. 238 gefundenen Resultate gelten sowohl für eine Mauer, die aus einer homogenen Masse besteht, als für eine Mauer, die aus Steinen aufgeführt ist, welche in horizontalen Schichten gelegt sind.

Fünftes Kapitel.

**Berechnung der Fundamente, wenn die Mauern auf einem zusammendrückbaren Grunde stehen.**

§. 257. Wenn man das Fundament einer Mauer nicht auf einem festen Boden, der sich nicht merklich zusammendrücken läßt, hat legen können, so wird der daraus sich ergebende Nachtheil weniger bedeutend sein, wenn die Mauer, vermöge der Zusammendrückbarkeit des Baugrundes, sich in verticaler Richtung senkt, ohne sich nach der einen oder andern Seite zu neigen. Das Fundament muß daher so angelegt werden, daß die Mauer kein Bestreben haben kann, sich schief zu stellen. Wir gehen dabei von der Voraussetzung aus, daß der Baugrund, so weit derselbe von dem Fundamente bedeckt wird, überall gleich stark zusammendrückbar sei.

Wirken auf die Mauer nur vertical gerichtete Kräfte, so wird der genannten Bedingung Genüge geleistet, wenn der Schwerpunkt des Gewichtes der Mauer und der Gewichte, womit diese belastet ist, sich in der Verticallinie befindet, welche durch den Schwerpunkt der Grundfläche des Fundamentes geht.

§. 258. Allgemein: wirken auf die Mauer vertical und horizontal gerichtete Kräfte, so ist kein Bestreben zu einer Drehbewegung vorhanden, wenn die Resultante dieser Kräfte durch den Schwerpunkt der Grundfläche des Fundamentes geht, d. h. wenn die Summe der Momente dieser Kräfte, bezogen auf diesen Schwerpunkt, gleich Null ist <sup>1)</sup>.

Fig. 31.

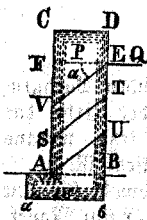
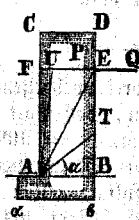


Fig. 32.



§. 259. Als Beispiel nehmen wir die durch Fig. 31 und 32 dargestellte Mauer, deren Gleichgewicht in §. 200 u. folgd. untersucht wurde, wobei wir ein rechteckiges Profil des Fundamentes voraussetzen. Wenn man unter Beibehaltung der früheren Benennungen

$a'$  die Breite  $a\beta$  des Fundamentes;

$h'$  die Höhe  $B\beta$  desselben

nennt, so erhält man für das Moment des Gewichtes der Mauer und des Fundamentes, bezogen auf die Mitte der Basis  $a\beta$ ,

$$\frac{1}{2}(P + \omega ah)(a' - a),$$

1) Diese Theorie wird in einem von Gambel, französischer Festungsbaudirector (directeur des fortifications), im Jahre 1816 abgefaßten und 1822 veröffentlichten Memoire vorgetragen. Ebenso in dem Memoire von François im Mémorial de l'officier du génie, Nr. 4.

und für das Moment der Horizontalkraft  $Q$ , bezogen auf denselben Punkt

$$Q(h+k).$$

Die Breite  $a'$  muß daher aus der Gleichung

$$Q(h+k) = \frac{1}{2}(P + w a h)(a' - a)$$

bestimmt werden; es folgt

$$a' = a + \frac{2Q(h+k)}{P + w a h}.$$

§. 260. In jedem andern Falle, und besonders, wenn die Mauern dem Erd- und Wasserdrucke zu begegnen haben, wird man keine Schwierigkeit darin finden, die Breite der Fundamente so zu bestimmen, daß der in Rede stehenden Bedingung Genüge geschieht, da die in dem vorhergehenden Kapitel gefundenen Resultate die Größe und Richtung des Druckes angeben. Man wird es so anordnen, daß das Moment dieses Druckes, bezogen auf den Mittelpunkt der Grundfläche des Fundamentes, gleich sein wird dem Momente des Gewichtes der Mauer, bezogen auf denselben Punkt.

## Sechstes Kapitel.

### Verschiedene Eigenschaften der Erdbarten.

Bestimmung des spezifischen Gewichtes, der Reibung und der Cohäsion.

§. 261. Die Eigenschaften der Erdbarten, deren Natur und Beschaffenheit sehr veränderlich sind, lassen sich von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachten. Wir unterscheiden hier 1) aufgelockerte Erde, deren kleine Theilchen keinen merklichen Zusammenhang mehr besitzen; 2) Erde in ihrem natürlichen Zustande, wobei diese als trocken oder nur wenig angefeuchtet gedacht wird; 3) Erde, welche stark von Wasser durchdrungen ist.

Das spezifische Gewicht der Erdbarten und des Mauerwerkes läßt sich mit Genauigkeit nur durch spezielle Versuche ermitteln. Die folgende Tabelle giebt die Mittelwerthe.

Dammerde (Terre végétale) . . . . .	1,4
Lehm (T. franche) . . . . .	1,5
Magerer Thon (T. argileuse) . . . . .	1,6
Töpferthon (Glaise). . . . .	1,9
Erdbiger Sand . . . . .	1,7
Reiner Sand . . . . .	1,9

Mauertwerk mit Kalk- und Kieselsteinen, von	1,7
	bis 2,3
Mauertwerk mit Granit	2,3
Mauertwerk mit Basalt	2,3

Durch Multiplication dieser Zahlen mit 1000 erhält man das Gewicht eines Kubikmeters in Kilogrammen.

### Aufgelockerte Erde, deren kleine Theilchen keinen Zusammenhang mehr besitzen.

§. 262. Wir betrachten hier die Erde als in einem Zustande befindlich, wo die Theile derselben allen Zusammenhang verloren haben. Bei der Anwendung der in den vorhergehenden Kapiteln enthaltenen Formeln muß man daher die Cohäsion gleich Null setzen. Zu bestimmen bleibt uns noch das Verhältniß der Reibung zum Drucke (der Reibungscoefficient), oder, was dasselbe ist, die Böschung, welche die Erde von selbst annimmt, wenn man eine Aufschüttung bildet. (Man sehe die §§. 192 und 225.)

§. 263. Unter allen Erdbarten nimmt feiner, trockener Sand die größte Böschung an. Nach einem Versuche von Gadyon <sup>1)</sup> ist diese Böschung  $\frac{2}{3}$ , woraus  $f = 0,6$  und  $\tau = 59^\circ$  folgt.

§. 264. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>2)</sup> beträgt der Winkel, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet, bei feinem, sehr trockenem Sande und pulverisirtem Sandstein  $34^\circ,5$  woraus  $f = 0,69$  und  $\tau = 55^\circ,5$  folgt.

Nach den nämlichen Versuchen <sup>3)</sup> beträgt der Winkel, welchen die Böschungsebene mit dem Horizonte bildet, bei gewöhnlicher, gut getrockneter und pulverisirter Erde wenigstens  $46^\circ 50'$ , woraus  $f = 0,94$  und  $\tau = 43^\circ 10'$  folgt. Feuchtet man dieselbe Erde etwas an, so wird dieser Winkel höchstens gleich  $54^\circ$ , woraus  $f = 1,38$  und  $\tau = 36^\circ$  folgt.

§. 265. Nach Barlow <sup>4)</sup> ist die Böschung des leichtesten Sandes  $\frac{3}{4}$ , woraus  $f = 0,8$  und  $\tau = 51^\circ$  folgt. Nach demselben Experimentator ist die Böschung der dichtesten und festesten Dammerde  $\frac{5}{6}$ , woraus  $f = 1,4$  und  $\tau = 35^\circ$ .

§. 266. Nach Colonel Pasley <sup>5)</sup> ist die Böschung der nicht cohärenten Erde (loose shingle, aufgelöster Schiefer genannt),

1) *Traité expérimental et analytique de la poussée des terres*, par M. Mayniel, pag. 1.

2) *Art de bâtir*, tome IV., pag. 174.

3) *Idem*, pag. 178, 179.

4) *An Essay on the strength and stress of timber*, pag. 219.

5) *A Course of military instruction*, vol. III. pag. 562. Dieses Werk enthält eine Reihe von Versuchen über die Wirkung der Erde gegen die Belästigungen. Im Kleinen angestellte Versuche sind offenbar nicht geeignet, von dieser Wirkung eine klare Vorstellung zu verschaffen, da die einzelnen Elemente dieser Wirkung sich mit der Größe der Belästigungen in verschiedenen Verhältnissen ändern. Indessen tritt keines der von dem Experimentator erhaltenen Resultate mit der in den vorherge-

deren er sich bei seinen Versuchen bediente und welche vollkommen trocken war, gleich  $\frac{6,25}{5}$ , woraus  $f = 0,8$  und  $\tau = 51^\circ$  folgt.

§. 267. Wir werden jetzt die Versuche aufführen, welche in der Absicht angestellt wurden, direct den Druck zu messen, welche Sand und andere nicht cohärirende Materien (welche zuweilen halbflüssige Materien genannt werden) gegen den Boden oder die Seitenwände der sie enthaltenden Gefäße ausüben.

Nach den Beobachtungen von Delanges<sup>1)</sup> ist der Winkel, welchen die natürliche Böschung mit dem Horizonte bildet, für

sehr feinen Flußsand . . . . .	33°
Hirsekörner . . . . .	23°
Vogeldunst . . . . .	22° 30'
Bleischrot, dreimal so dick . . . . .	25°

Das Gewicht eines Kubikzoll's ist für

Sand . . . . .	7,3 Drachm.
Hirse . . . . .	4,2 "
Vogeldunst . . . . .	39,3 "

§. 268. Druck der halbflüssigen Körper auf den Boden eines cylindrischen Gefäßes mit verticaler Axe. Der Boden war beweglich und der von demselben getragene Druck wurde durch eine Wage gemessen.

Dimensionen der Gefäße.	Höhe der halbflüssigen Körper	Druck auf den Boden der Gefäße für					
		Sand		Hirse		Vogeldunst	
	Zoll	Drachm.	Gr.	Drachm.	Gr.	Drachm.	Gr.
Höhe: 6 Zoll, Durchmesser: 2 Zoll.	2	21	15	18	0	177	0
	4	28	0	26	30	220	0
	6	35	0	33	45		
Höhe: 6 Zoll, Durchmesser: 3 Zoll.	2	76	39	49	0		
	6	139	0	88	0		

Der Druck ist geringer als das Gewicht der in dem Gefäße enthaltenen Materie (für Sand ungefähr  $\frac{1}{3}$ , für Hirse und Vo-

henden Kapiteln aufgestellten Theorie in Widerspruch. Diese Resultate zeigen nur, daß die Reibung und Adhärenz der Erde an der innern Seitenfläche der Mauern, welche bei den Rechnungen in §. 238 u. folg. vernachlässigt wurden, merkliche Wirkungen hervorbringen, wenn die Höhe der Bekleidungen sehr klein ist, wie sie dies bei jenen Versuchen war. Die von Mairan in seinem *Traité de la poussée des terres* beschriebenen Versuche können zu ähnlichen Bemerkungen Veranlassung geben.

- 1) *Statica e meccanica de' semiluidi*, *Memorie di matematica e fisica della Società Italiana*, IV., 1788. Es finden sich in diesem Memoire sehr interessante Beobachtungen über die Bewegung des Sandes beim Ausflusse aus einem Gefäße durch eine Seiten- oder Bodenöffnung.

geldunst ungefähr  $\frac{1}{2}$  dieses Gewichtes); auch ist er nicht der Höhe proportional.

Bei einer Wiederholung dieser Versuche mit conischen Gefäßen fand man den Bodendruck geringer als bei den cylindrischen Gefäßen, so daß es scheint, als fände in diesem Falle das Hinabgleiten der auf den Boden drückenden, verticalen Säule mehr Hindernisse, als wenn diese Säule unmittelbar von festen Wänden umgeben wäre.

Man hat zu ermitteln gesucht, ob die halbflüssigen Körper einen Verticaldruck von unten nach oben ausübten, konnte jedoch keine merkliche Wirkung beobachten.

§. 269. Druck der halbflüssigen Körper gegen eine verticale Wand. Man nahm zu diesen Versuchen eine kleine parallelepipedische Kiste, deren eine Seitenwand um ihre untere Kante drehbar war, während die gegenüber befindliche Wand sich so stellen ließ, daß man die Länge der Kiste abändern konnte. Die Breite und Höhe war 6 Zoll. Die Gewichte, welche dem Seitendruck der halbflüssigen Körper das Gleichgewicht hielten, wirkten in einer Entfernung von 7 Zoll 7 Linien von der Drehungsaxe der beweglichen Wand.

Höhe des halbflüssigen Kör- pers	Länge des halbflüssigen Kör- pers	Gewichte, welche dem Seitendrucke das Gleich- gewicht halten für		
		Sand	Hirse	Vogelbunt
Zoll	Zoll	Drachm. Gr.	Drachm. Gr.	Drachm. Gr.
2	4			14 0
2	6	2 22	2 45	
4	6			69 30
4	10	9 30	14 30	
6	2	23 0	27 7	
6	4			206 0
6	6	24 45	27 22	
6	8	24 52	31 30	206 0
9	16	24 45	32 0	

§. 270. Geschieht der Ausfluß eines halbflüssigen Körpers durch eine Oeffnung im Boden eines Gefäßes, so bleibt, wenn die Höhe hinreichend groß ist, die obere Grenzfläche des Körpers zuerst eben und horizontal, während sie sich bis zu einem gewissen Niveau senkt, wo in der Mitte eine Depression und endlich die conische Gestalt eintritt, welche der natürlichen Böschung entspricht. Die Ausflußgeschwindigkeit ist weit geringer als bei den ganzflüssigen Körpern.

§. 271. Nach den Versuchen von Huber-Burbaud 1)

1) Lettre sur l'écoulement et la pression du sable. Bibliothèque universelle, rédigée à Genève, sciences et arts, 1829.



mit sehr feinem Sande erhält man durch eine Oeffnung in dem Boden eines Gefäßes in derselben Zeit auch durchaus dieselbe Ausflußmenge, wie hoch auch anfänglich der Sand über der Oeffnung stehen möge. Eben so verhält es sich bei Oeffnungen, die sich in den Seitenwänden befinden. In horizontaler Richtung fließt aber der Sand nicht mehr aus, wie groß auch die Höhe desselben in der Riste sein möge, wenn der Durchmesser der Oeffnung nicht ungefähr der Dicke der Wand gleichkommt.

Sand, welcher in eine zweimal unter einem rechten Winkel gebogene Röhre geschüttet wird, steigt nicht, wie ein flüssiger Körper, in dem zweiten verticalen Theile wieder hinauf; er verbreitet sich kaum etwas in dem horizontalen Theile der Röhre.

Der Druck, welchen man auf die obere Grenzfläche des in einer Riste befindlichen Sandes ausübt, bleibt ganz ohne Einfluß auf die Ausflußgeschwindigkeit bei einer Oeffnung in dem Boden dieser Riste.

§. 272. Der Böschungswinkel des Sandes wurde von Huber-Burraud zu 30 bis 33 und selten zu 35 Grad beobachtet. Für Erbsen oder Schrot ist dieser Winkel fast derselbe und es gelten in jeder Beziehung die nämlichen Gesetze.

§. 273. Ueber den Druck auf den Boden eines Gefäßes hat der nämliche Physiker die folgenden Beobachtungen gemacht:

1. Bedeckt man ein Ei einige Zoll hoch mit Sand und legt darauf ein Gewicht von 25 Kil., so wird das Ei nicht zerdrückt. Dasselbe ist der Fall, wenn der Sand in Bewegung ist, während er durch eine Oeffnung in dem Boden des Gefäßes ausfließt.

2. Wenn zwei verticale communicirende Röhren Quecksilber enthalten, so wird das gemeinschaftliche Niveau des Quecksilbers in den beiden Röhren nicht verändert, wenn man bei der einen Röhre Sand auf das Quecksilber schüttet. Diese Beobachtung wurde bei einer Röhre von 0,65 Meter Höhe und 0,035 Meter Durchmesser gemacht. Man kann, ohne das Resultat zu ändern, auf die obere Grenzfläche der Sandsäule einen sehr starken Druck ausüben.

3. Bringt man bei der nämlichen Röhre einen beweglichen Boden an und schüttet darauf Sand oder trockne Erbsen ein, so bemerkt man, daß dieser Boden nur einen sehr kleinen und fast unmerklichen Theil von dem Gewichte dieser Materien (0,012 Kil. von 1,5 bis 2 Kil.) aufzunehmen hat, während fast das ganze Gewicht von der Reibung an der Seitenwand der Röhre getragen wird.

Diese Versuche glückten ebenfalls bei einer Röhre von 4 Zoll im Durchmesser, ja selbst bei einer Röhre, die sich nach unten erweiterte.

Gießt man Wasser in die mit Sand angefüllte Röhre, so erhält sich, ohne auszufließen, das Wasser zugleich mit dem Sande darin.

§. 274. Eine Bestätigung finden diese Versuche und Beobachtungen in denen von Moreau, Capitain im französischen Génie-Corps <sup>1)</sup>. Derselbe bediente sich bei seinem, feuchtem Sande einer Kiste, welche 4 Meter lang, 1 Meter breit und eben so tief war. Im Boden befanden sich Oeffnungen von 2,22 Meter Länge und 0,27 und 0,6 Meter Breite, die durch ein Brett, das in einem Gewinde drehbar war, verschlossen wurden, indem das Brett durch ein Seil gehalten wurde, welches über eine Rolle ging und eine mit Gewichten belastete Waageschale trug. Die horizontale Oberfläche des Sandes in der Kiste wurde mit Gewichten belastet, welche über 4300 Kil. für den Quadratmeter betrugen. Andere Versuche wurden mit trockenem Sande in einer kleineren Kiste angestellt. Der Experimentator schließt daraus, daß, wenn die Länge und Höhe eines Sandkörpers dieselben bleiben, der Druck auf einen bestimmten Theil des Bodens, sobald dieser nachgiebt, einen constanten Werth annimmt, mag nun der Sand unbelastet, oder mit beträchtlichen, ja selbst beliebigen Gewichten belastet sein. Ehe ein Theil des Bodens nachgiebt, scheint indessen der anfängliche Druck auf denselben größer zu sein, wenn die Belastung beträchtlicher ist; der endliche Druck ist stets derselbe.

Als man die Neigung der Seitenflächen der Sandprismen, die die beweglichen Theile des Bodens zur Basis haben, aus der Bedingung suchte, daß das Gewicht dieser Prismen dem beobachteten Drucke gleich sein müßte, fand man abweichende Resultate, welche für den Winkel der Böschung mit dem Horizonte 46 bis 55 Grad geben. Da dieser Winkel größer ist, als die natürliche Böschung des Sandes, so ist auch der Druck größer als das Gewicht der Prismen, die durch diese letztere Böschung gebildet werden.

§. 275. Die im vierten Kapitel vorgetragene Theorie stimmt mit den Resultaten dieser Versuche überein. Die in §. 229 gegebene Formel repräsentirt (wenn man darin  $\gamma=0$  setzt) den Druck gegen die Seitenwand eines Gefäßes, wofern die Breite desselben wenigstens der Basis des Prismas des größten Druckes gleichkommt. Es wird leicht sein, aus den nämlichen Grundsätzen die in Rede stehende Formel für den Fall abzuleiten, in welchem die Breite des Gefäßes nicht so groß ist. Man sieht, daß dieser Druck beträchtlich ist und mit der Höhe sehr rasch zunimmt. Es ist daher leicht zu denken, daß, wenn der Boden anfängt nachzugeben, an verticalen, oder wenig nach innen geneigten Seitenwänden eine Reibung entstehen kann, welche die Wirkung der Schwerkraft auf den Theil des Systemes, welcher sich gegen diese Wände stützt, fast ganz neutralisirt. Es scheint indessen, daß noch weitere Versuche nothwendig sind, um dieses Kapitel vollständig abzuschließen.

1) Notice sur une nouvelle manière de sonder en mauvais terrain. Mémorial de l'officier du génie, Nr. 11.

### Im natürlichen Zustande befindliche Erde.

§. 276. Die meisten Erdbarten, ja selbst der Sand, erlangen einen ziemlichen Zusammenhang, wenn die Theile lange in Berührung mit einander bleiben und stark zusammengepreßt werden. In diesem Zustande kann man Lehm bis auf 1 bis 2 Meter, und sehr thonhaltige Erde bis auf 3 bis 4 Meter und darüber vertical abgraben, ohne daß ein Herabfallen eintrete. Man kennt hierüber keine genaue Beobachtungen <sup>1)</sup>. Die Cohäsion derselben Erde ändert sich außerdem mit dem Grade der Feuchtigkeit.

Den Werth des Coefficienten  $\gamma$  (siehe §. 188) erhält man aus der Formel in §. 192 und §. 229

$$\gamma = \frac{1}{4} \omega k' \tan \frac{1}{2} \tau,$$

wo  $k'$  die Höhe ist, bis auf welche die Erde sich vertical abgraben läßt, ohne herabzufallen,  $\omega$  das Gewicht einer Volumeneinheit der Erde und  $\tau$  der Winkel, welchen die Verticale mit der natürlichen Böschungsebene der Erde bildet.

Setzt man für Lehm  $\omega = 1500$  Kil.,  $\tau = 40^\circ$ ,  $k' = 1$  Meter, so findet man  $\gamma = 136$  Kil.

Setzt man für sehr stark zusammenhängende Erde  $\omega = 1800$  Kil.,  $\tau = 35^\circ$ ,  $k' = 4$  Meter, so findet man  $\gamma = 568$  Kil.

Man kann diese Zahlen als die Grenzen des Werthes des Coefficienten  $\gamma$  ansehen, wenn der Meter zur Längen- und das Kilogramm zur Gewichtseinheit angenommen werden.

§. 277. Wird eine Erdmasse, die sich im natürlichen Zustande befindet, eben abgegraben, und bleibt die Böschungsfläche dem Einflusse der Witterung ausgesetzt, so verändern die abwechselnde Trockenheit und Nässe, so wie der Frost die Eigenschaften der Erde. Die der Oberfläche nahe liegenden Theile werden sich nach und nach auflösen; und im Allgemeinen wird die Erde das Bestreben zeigen, von selbst die Böschung mit der Zeit anzunehmen, welche sie sofort angenommen haben würde, wenn die Cohäsion nicht wäre. Wird aber die Seitenfläche mit einem Mauertwerk bekleidet, so wird diese Veränderung nicht eintreten, und die Erde wird sich dann bei einer geringeren Böschung oder einer weniger dicken Bekleidung halten können, als wenn die Cohäsion der Theile vorher zerstört worden wäre.

### Einfluß des Wassers, welches die Erde durchdringt.

§. 278. Der Sand, die Pflanzenerde und die Dammerde scheinen, wenn sie von Feuchtigkeit durchdrungen werden, keine bemerkenswerthe Veränderung zu erleiden. Schlammige und sogenannte feißige Erden lösen sich auf und können dann fast wie ein flüssiger Körper ablaufen. Bei den Erden dieser Art muß der

1) Man sehe im Anhange die Versuche von Martonh.

Druck nach den Formeln berechnet werden, welche für flüssige Körper gelten, indem man dem Gewichte der Volumeneinheit den entsprechenden Werth beilegt.

Thonige Erde, vorzüglich reiner Thon, vergrößert ihr Volumen, wenn sie feucht wird, ohne deshalb flüssig zu werden, wozu sie eine sehr große Wassermenge aufnehmen müßte. Eine homogene Erdmasse, welche ihr Volumen vergrößert, wirkt aber gegen eine Bekleidung gerade wie eine Flüssigkeit, deren spezifisches Gewicht dem der Erde gleichkommt. Obgleich daher die thonige Erde, wenn sie trocken oder nur wenig feucht ist, eine sehr große Cohäsion besitzt, und deshalb Bekleidungen von geringer Dicke zu bedürfen scheint, so wird diese Erde doch, vermöge ihres großen spezifischen Gewichtes, am gefährlichsten von allen, wenn das Wasser sie durchbringen kann.

**Erde, welche aus Schichten besteht, deren Eigenschaften sich mit der Höhe der Bekleidung ändern.**

§. 279. Eine Erdmasse besteht oft aus Schichten von ungleichen Eigenschaften. Man könnte in der Rechnung auf diese Abwechselungen Rücksicht nehmen. Doch würde man wegen der verwickelten Rechnungsergebnisse und der Unsicherheit der Erfahrungscoefficienten, von diesen Untersuchungen wenig Nutzen haben. Man beachte nur 1) daß man stets einen Ueberschuß an Stabilität erhalten wird, wenn man der ganzen Masse denjenigen Reibungs- und Cohäsionscoefficienten beilegt, welcher unter den einzelnen Schichten der kleinste ist; 2) daß in keinem Falle der Erddruck größer sein kann als der Druck einer Flüssigkeit, welche dasselbe spezifische Gewicht besitzt.

### Reibung und Cohäsion des Mauerwerkes.

§. 280. Nach den Versuchen von Rondelet <sup>1)</sup> hält sich ein gut behauener und polirter Kalkstein (ein Kalkstein mit sehr feinem Korne) auf einem ähnlichen Steine im Gleichgewicht, wenn die Ebene, in welcher sich die beiden Steine berühren, um etwas mehr als 30 Grad geneigt ist. Es folgt daraus für den Reibungscoefficienten 0,58.

§. 281. Nach den Versuchen von Voistard <sup>2)</sup> ist der Reibungscoefficient für sehr harten Kalkstein mit rauh gehauener (piqué) Oberfläche im Mittel gleich 0,78.

1) Art de bâtir, tome IV., pag. 224.

2) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 132 der Ausgabe von 1822.

§. 282. Von Regnier <sup>1)</sup> wurde der Reibungscoefficient für eine Holzkiste, welche auf dem Straßenpflaster gleitet, zu 0,58 beobachtet.

§. 283. Nach Perronet <sup>2)</sup> fangen die Gewölbesteine auf den Fugen zu gleiten an, wenn die Neigung derselben gegen den Horizont 39 bis 40 Grad beträgt. Es folgt für den Reibungscoefficienten ungefähr 0,82.

§. 284. Nach G. Rennie <sup>3)</sup> fangen die Gewölbesteine aus Granit der neuen Londoner Brücke unter einem Winkel von 33 bis 34 Grad zu gleiten an, wenn sie gut, aber ohne Mörtel gelagert werden. Für mit frischem, gut geschlagenem Mörtel gelagerte Steine ist dieser Winkel 25 bis 26 Grad.

Die Gewölbesteine aus Sandstein gleiten, gut und ohne Mörtel gelagert, unter einem Winkel von 35 bis 36 Grad; und mit Mörtel gelagert, unter einem Winkel von 33 bis 34 Grad.

§. 285. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der von Boistard <sup>4)</sup> angestellten Versuche über die Cohäsion des Mörtels, wenn man einen Theil durch Hinweggleiten über einen andern von diesem zu trennen sucht. Fünf Zoll hohe Kalksteinprismen, deren Basis rauh behauen wurde, während der Umfang unbehauen blieb, wurden auf eine ähnliche Steinplatte befestigt; theils mit Mörtel, welcher aus zu  $\frac{1}{3}$  aus seit  $1\frac{1}{2}$  Jahren gelöschtem Kalk zu  $\frac{2}{3}$  aus durchgeseibtem und ziemlich trockenem Sande bestand, theils mit Mörtel, welcher zu  $\frac{1}{3}$  aus demselben Kalk und zu  $\frac{2}{3}$  aus Cement bestand. Diese Prismen wurden, nachdem sie 16 Tage hindurch im Trocknen gestanden hatten, vermittelt eines Seiles losgerissen, dessen Richtung parallel mit der Bruchfläche in einem Abstände von 9 bis 10 Linien von der Platte war. Das Seil ging über eine Rolle und war an seinem andern Ende mit Gewichten belastet.

1) Description du dynamomètre, Journal de l'Ecole Polytechnique, 5. cahier, pag. 171.

2) Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts.

3) Experiments on the friction and abrasion of solids in den Philosophical Transactions, part I, 1829.

4) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 125.

Flächeninhalt der Basis der Prismen	Gewicht der Prismen	Gewicht, durch welches die Prismen losgerissen wurden, bei Mörtel aus	
		Kalk und Sand	Kalk und Cement
Quadratzoß	Pfund	Pfund	Pfund
16	8	159	60*
16	8,37	148	110
32	16,25	340	165*
32	16,12	333	115*
48	24,00	541	333
48	24,67	580	165*
64	33,75	928	465
64	33,12	300*	549

Die mit einem Sternchen bezeichneten Resultate sind unsicher und müssen verworfen werden.

§. 286. Die folgende Tabelle enthält eine neue Reihe von Versuchen mit denselben Prismen, die aufs Neue befestigt und nach 18 Tagen wieder losgerissen wurden <sup>1)</sup>.

Flächeninhalt der Basis der Prismen	Gewicht der Prismen	Gewicht, durch welches die Prismen losgerissen wurden, bei Mörtel aus	
		Kalk und Sand	Kalk und Cement
Quadratzoß	Pfund	Pfund	Pfund
16	8,25	115	32
16	8,25	152	87
32	16,12	350	130
32	16,25	416	203
48	24,37	790	377
48	24,25	794	394
64	33,50	852	515
64	33,37	865	502

Nach diesen Versuchen ist die Cohäsion des Mörtels der Fläche proportional und kann bei Mörtel aus Kalk und Sand auf wenigstens 1500 Kil. für den Quadratfuß, und bei Mörtel aus Kalk und Cement auf wenigstens 800 Kil. für den Quadratfuß (6960 Kil. und 3700 Kil. für den Quadratmeter) geschätzt werden. Nach dem ersten Monat ist die Cohäsion fast eben so groß wie nach mehreren Jahren. Nach einem Jahre ist die Cohäsion des an der

1) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc. pag. 129. In der citirten Ausgabe steht, die Prismen wären nach 18 Monaten wieder losgerissen worden. Es scheint dies ein Druckfehler zu sein. In der ersten Ausgabe der *Expériences sur la main-d'oeuvre*, von Boistard, erschienen 1804, und in seinem Memoire über die Gewölbe in dem zweiten Theile der von Lesage im Jahre 1810 veröffentlichten Sammlung steht 18 Tage. Dasselbe steht in den geschriebenen Copien dieses Memoire.

Luft erhärteten Cementmörtels nur halb so groß wie die des Sandmörtels.

§. 287. Bei einem andern Versuche desselben Experimentators <sup>1)</sup> wurden zwei Prismen, die bei einem Querschnitt von 64 Quadrat Zoll ein Gewicht von 33 Pfund hatten, der eine mit Sandmörtel und der andere mit Cementmörtel befestigt, darauf sofort ins Wasser getaucht und nach 16 Monaten wieder losgerissen. Der Sandmörtel war so weich wie bei der Verwendung, die Cohäsion betrug 115 Pfund. Der Cementmörtel war sehr hart geworden und eine Kraft von 1000 Pfund konnte das damit befestigte Prisma nicht losreißen <sup>2)</sup>.

§. 288. Aus diesen Resultaten wird sich der Werth des in §. 188 u. folgd. mit  $\gamma$  bezeichneten Coefficienten berechnen lassen, wenn es sich um einen Bruch in den Fugen eines Mauerwerks handelt. Directe Versuche zur Berechnung desselben Coefficienten für den Bruch durch die Mitte der Steine kennt man bis jetzt noch nicht. Der in §. 211 u. folgd. mit  $R$  bezeichnete Coefficient kann vermittelst der in §. 25 u. folgd. aufgeführten Resultate gefunden werden.

### Dritter Abschnitt.

#### Theorie der Gewölbe.

§. 289. Es giebt mehrere Arten der Gewölbe; die wichtigsten sind die Tonnengewölbe, die Kreuzgewölbe, die Klostergewölbe und die Kuppelgewölbe. Wir werden uns hier besonders mit den Tonnengewölben beschäftigen.

Ein Gewölbe ist ein System von bogenförmig neben und auf einander gestellten festen Theilen. Diese Theile, welche in der Regel Steine sind,

1) Recueil d'expériences et d'observations faites sur différents travaux etc., pag. 131.

2) Vergleicht man diese Resultate mit den in §. 22 und §. 23 aufgeführten, so könnte es scheinen, als ob die Cohäsion des Mörtels weit geringer sei, wenn die Kraft parallel zur Bruchfläche gerichtet ist, als wenn die Kraft normal zur Bruchfläche wirkt. Um hierüber völlig im Klaren zu sein, müssen jedoch erst vergleichende Versuche mit demselben Mörtel abgewartet werden.

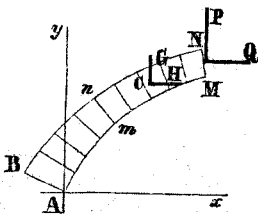
Nimmt man für  $\gamma$  die in §. 286 angegebenen Werthe und berechnet daraus nach den Formeln in §. 196 und §. 197 das zum Verdrücken eines Würfels von 0,05 Meter Seite nötige Gewicht, so findet man ein Resultat, welches weit kleiner ist, als die in §. 11 aufgeführten. Vielleicht darf man diese Differenz zum Theil der Anwesenheit der Sand- oder Cementkörner zuschreiben, welche eine weit größere Härte als das Bindemittel besitzen.

nennt man **Gewölbfsteine**, zwischen denselben befinden sich die **Gewölbfugen**, welche gewöhnlich mit Mörtel ausgefüllt werden. Sind die Kräfte, welche auf jeden einzelnen Gewölbfstein wirken, so wie die Gestalt des Gewölbes der Art, daß das System sich nicht im Gleichgewichte befindet, so stürzt das Gewölbe ein. Der Einsturz kann auf zweifache Weise eintreten; die Theile des Gewölbes können sich entweder dadurch von einander trennen, daß die einen über die andern hinweggleiten, oder dadurch, daß einige Theile sich um die oberen oder unteren Kanten der Gewölbfsteine drehen. Die Reibung und die Cohäsion des Mörtels leisten diesen Bewegungen Widerstand und tragen dazu bei, das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten.

### Erstes Kapitel.

#### Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbfsteinen.

Fig. 33.



§. 290. Es sei **ABNM** (Fig. 33) eine Verbindung von Gewölbfsteinen, welche einen Theil eines Tonnengewölbes bildet. Das Ende **AB** stützt sich gegen eine feste Ebene, während das andere Ende durch eine Kraft gehalten wird, zu welcher **P** und **Q** die verticale und horizontale Componente sind. Die Gestalt dieses Gewölbetheils ist durch die äußere und innere Wölbungslinie **AmM** und **BnN**, so wie durch die Richtungen

der Fugenebenen gegeben. Es handelt sich jetzt darum, zu untersuchen, ob das System im Gleichgewichte bleiben wird, wenn beliebige Kräfte auf die Gewölbfsteine wirken.

Um die Natur dieses Gleichgewichtes klar aufzufassen, wollen wir, zur größeren Einfachheit, vorerst annehmen, daß nur die Schwerkraft auf die Gewölbfsteine einwirke. Stellt man sich nun vor, daß, mit dem Kämpfer anfangend, die Gewölbfsteine nach und nach an ihre Stelle gebracht werden, so werden sich die ersten derselben, welche der festen Ebene **AB** nahe liegen, allein durch die Wirkung der Reibung halten, wofern die Neigung der Fugen gegen den Horizont nicht zu groß ist. Aber bald wird man, um sie in ihrer Lage zu erhalten, gegen die obere Fuge des letzten



Gewölbesteines eine gewisse Kraft anbringen müssen, deren verticale und horizontale Composante wir mit  $P$  und  $Q$  bezeichnen. Diese Kraft muß in einer Hinsicht groß genug sein, um zu verhindern, daß das Ganze oder irgend ein Theil der gelegten Wölbesteine einstürze, sei es durch Gleiten auf den Fugen, oder durch eine Drehung um die unteren Kanten derselben; in anderer Hinsicht darf sie nicht so groß sein, daß dadurch das Ganze oder irgend ein Theil der gelegten Wölbesteine gehoben würde, sei es durch Gleiten auf den Fugen, oder durch Drehung um die oberen Kanten derselben. Man sieht also allgemein, daß in Bezug auf eine beliebige Fuge das System der Kräfte, welche auf den Gewölbtheil  $ABNM$  wirken, mit Einschluß der gegen die obere Fuge des letzten Gewölbesteines wirkenden Kräfte  $P$  und  $Q$  ein solches sein muß, daß durch die Wirkung der am obern Theile  $mnNM$  angreifenden Kräfte weder ein Gleiten dieses Theils nach oben oder unten auf der als fest vorausgesetzten Ebene  $mn$ , noch eine Drehung desselben um eine der Kanten  $m$  und  $n$  verursacht wird. Man nenne

- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate des Punktes  $m$ ;
- $x', y'$  die horizontale und verticale Coordinate des Punktes  $n$ ;
- $\theta$  den Winkel, welchen die Richtung der Fuge  $mn$  mit der Verticalen bildet;
- $z$  die Länge  $mn$  dieser Fuge;
- $a, b$  die Coordinaten des äußersten Punktes der innern Wölbungslinie;
- $a', b'$  die Coordinaten des äußersten Punktes der äußern Wölbungslinie;
- $G, H$  die Summen der verticalen und horizontalen Composanten zu den Kräften, welche auf die Gewölbesteine des Theils  $mnNM$  wirken;
- $\alpha, \beta$  die Coordinaten des Angriffspunktes  $C$  der Mittelkraft der Kräfte  $G$  und  $H$ ;
- $T$  der Normaldruck gegen die Fuge  $mn$ ;
- $f$  den Reibungscoefficienten für das Gleiten der Gewölbesteine auf den Fugen;
- $\gamma$  den Werth der Cohäsion, welche dem Gleiten widersteht, bezogen auf die Einheit des Flächenmaßes;
- $R$  den Werth der Cohäsion für die Flächeneinheit, welche einer Trennung zweier Gewölbesteine in der gegen ihre gemeinschaftliche Fuge normalen Richtung widersteht.

§. 291. Um die Bedingungen für das Gleiten auf der Fuge  $mn$  aufzustellen, beachte man zuerst, daß die Kraft, welche sich bestrebt, ein Gleiten des Gewölbtheils  $mnNM$  in der Richtung  $nm$  hervorzubringen, ist

$$(P + G) \cos \theta;$$

und die Kraft, welche diesem Gleiten widerstrebt,

$$(Q+H) \sin \theta + f(P+G) \sin \theta + f(Q+H) \cos \theta + \gamma z;$$

daraus folgt, wenn ein Gleiten in der Richtung *mn* nicht eintreten soll, die Bedingung

$$P(1-f \tan \theta) - Q(\tan \theta + f) < -G(1-f \tan \theta) + H(\tan \theta + f) + \frac{\gamma z}{\cos \theta}$$

Man beachte sodann, daß die Kraft, welche sich bestrebt, ein Gleiten des nämlichen Gewölbttheils in der Richtung *mn* hervorzubringen, ist

$$(Q+H) \sin \theta$$

und die Kraft, welche dieses Gleiten zu verhindern sucht,

$$(P+G) \cos \theta + f(P+G) \sin \theta + f(Q+H) \cos \theta + \gamma z;$$

daraus folgt, wenn ein Gleiten in der Richtung *mn* nicht eintreten soll, die Bedingung

$$-P(1+f \tan \theta) + Q(\tan \theta - f) < G(1+f \tan \theta) - H(\tan \theta - f) + \frac{\gamma z}{\cos \theta}$$

Soll nun der Gewölbttheil *ABNM* sich im Gleichgewichte halten, so muß man den Kräften *P* und *Q* solche Werthe beilegen können, daß jenen Bedingungen für jede einzelne Fuge *mn* Genüge geschieht.

§. 292. Um jetzt die Bedingungen für den Fall einer Drehung um die obere oder untere Kante der Fuge *mn* aufzustellen, nehmen wir zuerst an, daß der Gewölbttheil *mnNM* sich von oben nach unten um die Kante *m* zu drehen trachte, und daß die Kräfte *P* und *Q* in dem Punkte *N* angreifen, in welchem Falle sie jene Drehung so wenig, wie möglich, begünstigen. Das statische Moment der Kräfte, welche sich bestreben, den Gewölbttheil zu drehen, ist

$$P(a'-x) + G(a-x);$$

und das Moment der Kräfte, welche die Drehung zu verhindern suchen, ist, wenn man das Widerstandsmoment der Cohäsion berechnet, wie in §. 211,

$$Q(b'-y) + H(b-y) + \frac{1}{3} R z^2,$$

damit also die Drehung nicht eintrete, muß

$$P(a'-x) - Q(b'-y) < -G(a-x) + H(b-y) - \frac{1}{3} R z^2$$

sein.

Man nehme zweitens an, daß der Gewölbttheil *mnNM* sich von unten nach oben um die Kante *n* zu drehen trachte, und daß die Kräfte *P* und *Q* in *M* angreifen, in welchem Falle sie jene Drehung so wenig, wie möglich, begünstigen. Das Moment der Kräfte, welche den Gewölbttheil zu drehen streben, ist

$$Q(b-y') + H(b-y'),$$

und das Moment der Kräfte, welche die Drehung zu verhindern suchen,

$$P(a-x') + G(\alpha-x') + \frac{1}{3}Rz^2.$$

Um daher diese zweite Art der Drehung zu verhindern, muß

$$-P(a-x') + Q(b-y') < G(\alpha-x') - H(\beta-y') + \frac{1}{3}Rz^2$$

sein.

Für das Gleichgewicht des Gewölbtbeils *ABNM* ist außer der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Bedingung noch nöthig, daß die Werthe für *P* und *Q* den beiden letzten Ungleichungen für jede einzelne Fuge Genüge leisten.

Wenn umgekehrt den vorstehenden Bedingungen bei allen Fugen Genüge geschehen ist, so wird der Gewölbtbeil nothwendig im Gleichgewicht bleiben.

§. 293. Für den Normaldruck gegen die Fuge *mn* hat man

$$T = (P + G) \sin \theta + (Q + H) \cos \theta.$$

Wenn man die Widerstandskräfte der Reibung und der Cohäsion (des Mörtels) gleich Null setzt, so reduciren sich die Bedingungen im §. 291 für das Gleichgewicht gegen Gleiten auf die einzige Gleichung

$$P - Q \tan \theta = -G + H \tan \theta$$

oder

$$\tan \theta = \frac{P+G}{Q+H},$$

welche besagt, daß die Richtung der Resultanten aus den Kräften, welche auf den Gewölbtbeil von *mnNM* wirken, normal gegen die Fuge *mn* sein muß. Unter der obigen Voraussetzung wird man für die Neigung jeder Fuge einen bestimmten Werth erhalten, wenn die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte gegeben sind. Die an der letzten Fuge *MN* angreifende Kraft, deren verticale und horizontale Componente *P* und *Q* sind, muß normal gegen diese Fuge gerichtet sein.

§. 295. Setzen wir wieder den Widerstand der Reibung und der Cohäsion gleich Null, so wird aus den Bedingungen im §. 292 für das Gleichgewicht gegen Drehung

$$\begin{aligned} P(a'-x) - Q(b'-y) &< -G(\alpha-a) + H(\beta-y) \\ -P(a-x') + Q(b-y') &< G(\alpha-x') - H(\beta-y'), \end{aligned}$$

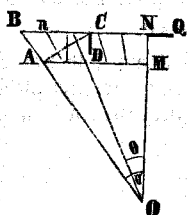
welche Formeln zeigen, daß die Richtungslinie der Resultanten aus den auf den Gewölbtbeil *mnNM* wirkenden Kräften zwischen den Punkten *m* und *n* liegen muß.

§. 296. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß das Gleichgewicht bei einer Verbindung von Gewölbststeinen im Allgemeinen durch vier Ungleichungen ausgedrückt wird, denen die bei-

den Kräfte  $P$  und  $Q$  für alle Fugen des Gewölbes Genüge leisten müssen. Es wird also gewisse Grenzen geben, innerhalb welcher die Werthe von  $P$  und  $Q$  sich befinden müssen. Widersprechen sich die vier Gleichgewichtsbedingungen nicht und giebt es Werthe für  $P$  und  $Q$ , die denselben Genüge leisten, so läßt sich die vorgelegte Verbindung von Gewölbesteinen im Gleichgewichte halten, und denkt man sich die letzte Fuge  $MN$ , gleich der ersten  $AB$ , gegen eine feste Ebene gestützt, so kann man sicher sein, daß, ungeachtet der Wirkung der Kräfte  $G$  und  $H$ , keine Bewegung eintreten wird.

### Anwendung auf ein scheidrecht's Gewölbe.

§. 297. Der Gewölbtheil, dessen Gleichgewichtsbedingungen gesucht werden, sei die Hälfte  $ABNM$  (Fig. 34) eines scheidrecht's Gewölbes von überall gleicher Dicke. Man



setze von dem Widerstande der Reibung und der Cohäsion ab und nehme an, daß auf das System nur die Schwerkraft wirke. Unter Beibehaltung der Benennungen des §. 294 nenne man ferner

$a$  die halbe Weite  $AM$ ;

$c$  die Dicke  $MN$ ;

$\Pi$  das Gewicht der Volumeneinheit des Mauerwerkes.

In der Gleichung in §. 294 wird alsdann

$$P=0, H=0, G=\Pi[(a-x)c + \frac{1}{2}c^2 \tan \theta]$$

und daher

$$\tan \theta = \frac{2\Pi(a-x)c}{2Q - \Pi c^2};$$

bezeichnet man die Neigung der ersten Fuge  $AB$  gegen die Verticale mit  $\theta'$ , so wird

$$\tan \theta' = \frac{2\Pi ac}{2Q - \Pi c^2}; \text{ woraus } Q = \Pi \frac{2ac + c^2 \tan \theta'}{2 \tan \theta'}.$$

Auch ist

$$\frac{\tan \theta}{\tan \theta'} = \frac{a-x}{a}.$$

Ist also die Neigung  $\theta'$  der ersten Fuge  $AB$  gegeben, so findet man den Werth für  $Q$  aus der vorhergehenden Gleichung, und, wenn Gleichgewicht stattfinden soll, müssen die Richtungen sämmtlicher Fugen nach demselben Centralpunkte  $O$  laufen.

§. 298. Aus den Bedingungen in §. 295 für das Gleichgewicht gegen Drehung, wenn man sie für die Fuge  $AB$  aufstellt,

$$Qc > \frac{1}{2}\Pi a^2 c - \frac{1}{6}\Pi c^3 \tan^2 \theta'$$

$$- Qc < \frac{1}{2}\Pi ac(a + 2c \tan \theta') + \frac{1}{3}\Pi c^3 \tan^2 \theta'.$$

Der zweiten Ungleichung, welche besagt, daß der Gewölbtbeil *ABNM* sich nicht um die obere Kante *B* der genannten Fuge drehen kann, leistet jeder positive Werth von *Q* Genüge, und man sieht in der That, daß wegen der Form des Gewölbes diese Bewegung unmöglich ist. Aus der ersten Ungleichung, welche besagt, daß der Gewölbtbeil *ABNM* sich nicht um die untere Kante *A* drehen kann, wird, wenn man für *Q* den in §. 297 gefundenen Werth einsetzt,

$$ac > \frac{1}{2}(a^2 - c^2) \tan \theta' - \frac{1}{6}c^2 \tan^3 \theta'.$$

Dieser Ungleichung geschieht stets Genüge, welches auch der Winkel  $\theta'$  sei, wenn die halbe Weite *a* des Gewölbes nicht den Werth übertrifft, welchen man erhält, wenn man  $\tan \theta' = 1$  setzt in der Gleichung

$$ac - \frac{1}{2}(a^2 - c^2) \tan \theta' + \frac{1}{6}c^2 \tan^3 \theta' = 0;$$

dieser Werth ist  $a = c(1 + \sqrt{\frac{7}{2}})$ . Ist aber *a* größer, so

darf, wenn der Ungleichung Genüge geschehen soll,  $\tan \theta'$  nicht größer als der Werth sein, welchen man aus der letzten Gleichung dafür findet. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Resultante aus dem Gewichte des Gewölbttheils *ABNM* und der Kraft *Q*, welche man sich horizontal in *N* angreifend denken muß, die Linie *AB* in einem Punkte unterhalb *A* treffen, und daher den Gewölbtbeil um diesen Punkt zu drehen suchen.

§. 299. Ist die Dicke eines scheidrechten Gewölbes sehr klein im Verhältniß zu der Weite desselben, so läßt sich die in Rede stehende Grenze von  $\tan \theta'$  sehr nahe durch die Gleichung

$$\tan \theta' = \frac{2c}{a}$$

ausdrücken; man erhält außerdem

$$Q = \frac{\Pi ac}{\tan \theta'}, \text{ oder } Q = \frac{1}{2} \Pi a^2.$$

§. 300. Substituirt man in den Ausdruck in §. 293 die Werthe, welche dem scheidrechten Gewölbe entsprechen, so erhält man für den Normaldruck, welchen die Fuge *AB* erleidet,

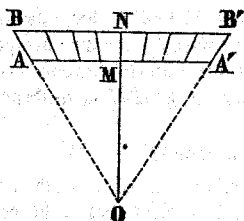
$$T = \Pi \left\{ \frac{ac}{\sin \theta'} + \frac{c^2}{2 \cos \theta'} \right\}.$$

§. 301. Ist die Dicke eines scheidrechten Gewölbes sehr klein im Verhältniß zu der Weite desselben, so wird aus diesem Ausdrucke

$$T = \frac{\Pi ac}{\sin \theta'}.$$

§. 302. Betrachtet man die zwei gleichen Hälften eines

scheidrechten Gewölbes (Fig. 35), welche in der Fuge  $MN$  zusammenstreffen, so findet man, daß nur dann Gleichgewicht bestehen kann, wenn die

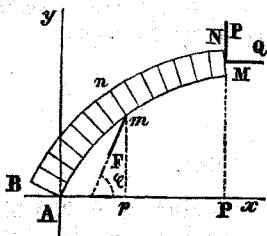


Richtungen der sämtlichen Fugen nach demselben Centralpunkte  $O$  laufen, und wenn der Winkel  $\theta$ , den die äußerste Fuge mit der Verticalen bildet, die in §. 298 angegebene Bedingung erfüllt. Geschieht dieser letzteren Bedingung kein Genüge, so wird das Gewölbe einstürzen, die beiden Hälften werden sich in  $N$  gegen einander stützen und die Kanten

$A$  und  $A'$  längs der beiden festen Ebenen  $AB$  und  $A'B'$  hinaufgeschoben werden. Der Ausdruck für  $Q$  in §. 297 giebt den Horizontaldruck, welchen die beiden Gewölbtheile gegen einander in der Fuge  $MN$  ausüben und der Ausdruck für  $T$  in §. 300 giebt den Normaldruck, welchen die beiden äußersten Fugen  $AB$  und  $A'B'$  erleiden. Diesen Druck  $T$  wird man benutzen, um die Stärke der Widerlager eines scheidrechten Gewölbes zu berechnen.

**Gleichgewichtsbedingungen für eine Verbindung von Gewölbfleinen, deren Fugen sämtlich normal auf der innern Wöblinie stehen.**

Fig. 36.



§. 303. Man betrachte einen Theil  $ABNM$  (Fig. 36) eines Gewölbes, dessen Fugen sämtlich normal auf der innern Wöblinie  $AmM$  stehen; das eine Ende stütze sich gegen eine feste Ebene  $AB$ , während das andere durch eine Kraft gehalten wird, zu der  $P$  und  $Q$  die verticale und horizontale Componente sind. Man nenne

$x, y$  die Coordinaten  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der

innern Wöblinie;

$z$  die Länge der Fuge  $mn$ ;

$a, b$  die Coordinaten des Endpunktes  $M$ ;

$S$  die Totallänge  $AmM$  der innern Wöblinie;

$s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;

$Q$  den Krümmungshalbmesser dieser Curve für den Punkt  $m$ ;

$F$  den Theil der Belastung des Gewölbes, welcher für die Längeneinheit in dem Punkte  $m$  der innern Wöblinie zur Wirkung kommt, wobei  $F$  als Function der Bogenlänge ausgedrückt wird;

$\varphi$  den Winkel, welchen die Richtung der Kraft  $F$  mit der horizontalen Abscissenaxe bildet, diesen Winkel ebenfalls als Function der Bogenlänge ausgedrückt;

$T$  den Werth des Normaldruckes, welchen die beiden Theile des Gewölbes in der Fuge  $mn$  gegen einander ausüben.

Sieht man jetzt von dem Widerstande der Reibung und Cohäsion ab, so folgt aus der Anwendung der in §. 290 u. folgd. entwickelten Theorie als erste Gleichgewichtsbedingung, daß der Normaldruck  $T$  in der Fuge  $mn$  gleich und entgegengesetzt mit der Resultanten sein muß, welche sich aus den sämtlichen Kräften ergibt, die auf den Gewölbtteil  $mnNM$  wirken. Wenn man beachtet, daß zu dem Normaldrucke  $T$  die verticale und horizontale Composante respective  $T \frac{dy}{ds}$  und  $T \frac{dx}{ds}$ , die Summen der verticalen und horizontalen Composanten der auf den Gewölbtteil  $mnNM$  wirkenden Kräfte hingegen respective

$$\int_s^S ds \cdot F \sin \varphi \text{ und } \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi$$

sind, so erhält man die beiden Gleichungen

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot F \sin \varphi,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi.$$

§. 304. Die zweite Gleichgewichtsbedingung, welche fordert, daß die Richtung der Resultanten aus den sämtlichen Kräften zwischen den Punkten  $m$  und  $n$  liege, bedarf keiner weiteren Beachtung; denn diese Bedingung ist (implicit) schon in der Voraussetzung enthalten, daß sämtliche Fugen normal auf der innern Wölblinie stehen, da alsdann die Durchschnittspunkte der auf einander folgenden Richtungen der in Rede stehenden Resultanten nothwendig eine zweite Curve bilden, welche der ersten parallel ist.

§. 305. Differentiirt man die beiden Gleichungen in §. 303, multiplicirt darauf die erste mit  $\frac{dy}{ds}$  und die zweite mit  $\frac{dx}{ds}$ , und addirt die beiden Produkte, so erhält man (wenn man beachtet, daß  $\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$  und daher  $\frac{dx}{ds} d \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d \cdot \frac{dy}{ds} = 0$  ist)

$$-dT = F ds \cdot \left\{ \frac{dy}{ds} \sin \varphi + \frac{dx}{ds} \cos \varphi \right\},$$

aus welcher Gleichung sich der Werth des Druckes finden läßt.

Geht man von einem Punkte der Curve zu dem nächsten über, so ändert sich der Normaldruck um eine Größe, die der Wirkung der Kraft  $F$  auf das zwischen den beiden Punkten liegende Element gleichkommt, wenn diese in dem Sinne dieses Elementes zerlegt wird.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur innern Wölblinie gerichtet sind.**

§. 306. In diesem Falle ist  $\sin \varphi = \frac{dx}{ds}$  und  $\cos \varphi = -\frac{dy}{ds}$ , und daher

$$dT = 0,$$

d. h. der Normaldruck ist bei dem Gewölbe überall derselbe. Differenziert man die beiden Gleichungen in §. 303, so erhält man jetzt

$$T d \cdot \frac{dy}{ds} = - F ds \cdot \sin \varphi \quad T d \cdot \frac{dx}{ds} = - F ds \cdot \cos \varphi,$$

woraus folgt (wenn man auf die für  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$  gefundenen Werthe Rücksicht nimmt),

$$Td \varphi = - F ds,$$

oder weil  $d\varphi$  (als der Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Normalen der Curve gebildet wird)  $= -\frac{ds}{\rho}$  ist,

$$T = \rho F \text{ und } F = \frac{T}{\rho}.$$

Es ist also der Normaldruck, welchen ein Gewölbeste in auf den nächsten ausübt, gleich der Kraft, welche in einem beliebigen Punkte der innern Wölblinie normal gegen dieselbe wirkt, multiplicirt mit dem Krümmungshalbmesser für diesen Punkt; und damit Gleichgewicht stattfinden kann, müssen diese gegen die innere Wölblinie normal gerichteten Kräfte in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes sich umgekehrt verhalten, wie die zugehörnden Krümmungshalbmesser der Curve.

§. 307. Ist die innere Wölblinie ein Kreisbogen, so muß die Kraft, welche in normaler Richtung gegen diese Curve auf die Gewölbesteine wirkt, einen constanten Werth besitzen in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes. Die vorhergehende Gleichung giebt die Relation, welche zwischen dieser Kraft und dem Normaldrucke zwischen je zwei auf einander folgenden Gewölbesteinen besteht. Es folgt aus derselben, daß wenn die innere Wölblinie ein Vollkreis wäre, sich die Summe der normal gegen die innere Wölblinie gerichteten Kräfte zu dem Drucke zwischen zwei an einander stoßen-



den Gewölbsteinen verhalten würde, wie der Kreisumfang zum Halbmesser, also wie  $2\pi$  zu 1.

§. 308. In dem Vorhergehenden wurde der Widerstand der Reibung und Cohäsion vernachlässigt; nimmt man hierauf Rücksicht, so findet man, daß es zum Gleichgewichte eines Gewölbes nicht mehr nothwendig ist, daß die normal zur innern Wölblinie gerichteten Kräfte dem in §. 306 angegebenen Gesetze folgen. Welche Werthe man aber auch für den Widerstand der Reibung und Cohäsion annehmen mag, so wird doch der Normaldruck zwischen den Gewölbsteinen, welcher alsdann nicht für alle Punkte der Curve constant zu sein braucht, stets nach der Formel  $T = QF$  berechnet.

### Untersuchung des Falles, in welchem die auf das Gewölbe wirkenden Kräfte sich auf das eigne Gewicht der Gewölbsteine beschränken.

§. 309. Man behalte die Benennungen des §. 303 bei und nenne ferner

II das Gewicht der Volumeneinheit der Materie der Gewölbsteine;

$\theta$  den Winkel, welchen die Fuge  $mn$  mit der Verticalen einschließt, woraus folgt

$$\frac{dy}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{dx}{ds} \cos \theta.$$

Es ist hier  $\varphi = 90^\circ$ ,  $F ds = \Pi z \left\{ 1 + \frac{z}{2q} \right\} ds$ . Aus den Gleichungen des §. 303 wird

$$T \sin \theta = P + \Pi \int_s^S z \left\{ 1 + \frac{z}{2q} \right\} ds;$$

$$T \cos \theta = Q;$$

woraus

$$\tan \theta = \frac{P}{Q} + \frac{\Pi}{Q} \int_s^S z \left\{ 1 + \frac{z}{2q} \right\} ds.$$

Differentiirt man diese letzte Gleichung, so erhält man

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = - \frac{\Pi}{Q} z \left\{ 1 + \frac{z}{2q} \right\} ds,$$

oder, weil  $d\theta = - \frac{ds}{q}$  ist,

$$\frac{2Q}{\Pi \cos^2 \theta} = 2qz + z^2,$$

aus welcher Gleichung sich das Gesetz der Dicke des Gewölbes bestimmen läßt, wenn die Gestalt der Wölblinie bekannt ist, und umgekehrt.

In dem vorliegenden Falle und auch im Allgemeinen, wenn nur verticale Kräfte auf ein Gewölbe wirken, ist die horizontale Componente des Druckes  $T$  in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes constant und der Kraft  $Q$  gleich. Man nennt diese Kraft den Horizontalschub des Gewölbes.

§. 310. Ist die innere Wölblinie ein Kreisbogen, so ist  $q$  constant, und aus der Gleichung in dem vorhergehenden Paragraphen erhält man

$$z = -q + \sqrt{q^2 + \frac{2Q}{\Pi \cos^2 \theta}}$$

Sind die Endfugen auf beiden Seiten horizontal, also  $\cos \theta = \cos 90^\circ = 0$ , so wird die Länge dieser Fugen unendlich groß.

Nennt man  $c$  die Länge der Fuge im Scheitel des Gewölbes, wo die Richtung dieser Fuge vertical ist, so erhält man

$$Q = \frac{1}{2} \Pi (2qc + c^2)$$

als den Werth des Horizontalschubes.

Der Normaldruck in der Fuge  $mn$  ist

$$T = \frac{Q}{\cos \theta}.$$

## Zweites Kapitel.

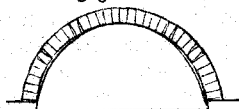
### Die wichtigsten Versuche und Beobachtungen über das Gleichgewicht der Gewölbe.

§. 311. Danisy <sup>1)</sup> stellte Versuche mit kleinen Modellen von Tonnengewölben an, deren obere Theile er mit Gewichten belastete und dadurch das Ganze zum Zusammenstürzen brachte, wobei die oberen Theile sich senkten und in der Schlusssfuge gegen einander stützten, während sie die unteren Theile auseinander und zu einer Drehung um die äußere Kante ihrer Basis drängten. Er zeigte, daß bei diesen Bewegungen die Gewölbsteine nicht auf den

1) *Traité de la coupe de pierres, de Frezier, tome III.* Diese Versuche wurden im Jahre 1732 vor der Academie zu Montpellier angestellt.

Lagerflächen gleiten, sondern sich durch eine Drehung um ihre Kanten von einander entfernen. Aehnliche Versuche stellten später Gauthen <sup>1)</sup> und Rondelet <sup>2)</sup> an.

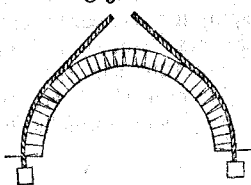
§. 312, Boistard <sup>3)</sup>, französischer Wegbaudirector (ingenieur en chef des ponts et chaussées), hat Versuche veröffentlicht, welche mehr im Großen und mit mehr Sorgfalt angestellt wurden. Die Gewölbe hatten 2,27 Meter lichte Weite und waren aus mit Sandstein abgeschliffnen Ziegeln construirt, welche 0,11 Meter hoch und eben so dick waren. Der Gestalt nach waren es Gewölbe, deren Querschnitt ein Halbkreis, ein um  $\frac{1}{3}$  und um  $\frac{1}{4}$  gedrückter Korbbogen, und ein Kreisbogen war, dessen Pfeilhöhe  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$  und  $\frac{1}{17}$  der Weite betrug, so wie Scheidrechte Gewölbe. Jedes Gewölbe wurde drei Hauptproben unterworfen. Bei der ersten Probe waren die Gewölbe unbelastet (ohne Hintermauerung); die Dicke der Gewölbe, 0,11 Meter, war nicht hinreichend, um dieselben im Gleichgewichte zu halten; als man daher das Lehrgerüst herunter zog, senkte sich eine gewisse Anzahl Gewölbesteine von dem obern Theile bis auf den Scheitel des Lehrgerüsts (Fig. 37). Die



beiden unteren Theile des Gewölbes bildeten steigende Bogen und theilten sich in zwei Hälften. Die Neigung zum Bruche zeigte sich in der Mitte von jedem dieser beiden Bogen, wo die Gewölbesteine das Lehrgerüst nicht berührten, so wie an dem obern und untern Ende der Bogen, wo sich die Fugen auf der innern Wölblinie öffneten.

§. 313. Bei der zweiten Probe waren die Gewölbe ebenfalls noch ohne Hintermauerung. Man legte über die beiden Schenkel ein Seil, welches gegen die äußere Wölblinie drückte und von einem Gewichte gespannt wurde. War die Spannung des Seiles nicht groß genug, um das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten, so stürzte das Gewölbe zusammen, wobei sich die Fugen am Schlusse

Fig. 38.

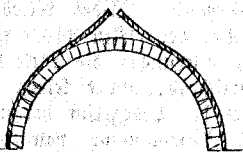


und an den Anfängen auf der innern Wölblinie, in den Schenkeln aber auf der äußern Wölblinie öffneten (Fig. 38). War die Spannung des Seiles eben groß genug, um das Gewölbe im Gleichgewichte zu erhalten, so bildeten sich die Bruchfugen auf dieselbe Weise durch die Wirkung des Stehens; die Wirkung der Gewichte suchte, die ent-

1) Dissertation sur les dégradations du Panthéon français, pag. 111. Traité de la construction des ponts, tome I, pag. 241 der zweiten Ausgabe.  
2) Art de bâtir, tome IV., pag. 223 u. folgd.  
3) Recueil de divers Mémoires, publié par Lesage, tome II., pag. 170; oder Recueil d'expériences et d'observations, faites par Boistard, pag. 95. Diese Versuche wurden im Jahre 1800 angestellt.

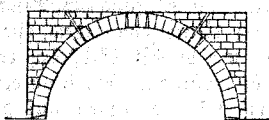
stehenden Oeffnungen sofort wieder zu schließen, und so entstand, indem die Fugen sich abwechselnd öffneten und schlossen, eine Art oszilirender Bewegung, wobei sich die Gewölbeheile abwechselnd nach verschiedenen Richtungen dreheten, und zwar bald um die obere, bald um die untere Kante der Gewölbesteine. Wurde endlich die Spannung des Seiles über eine gewisse Grenze hinaus vermehrt, so zeigten sich die Resultate des ersten Falles im umgekehrten Sinne; d. h. die unteren Theile des Gewölbes (die Schenkel) senkten sich, die oberen Theile wurden gehoben und die Fugen öffneten sich am Schlusse und an den Anfängen auf der äußern

Fig. 39.



Wölblinie, in den Schenkeln hingegen auf der innern Wölblinie (Fig. 39).

Fig. 40.



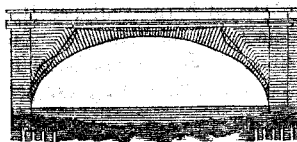
Wölblinie. Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß bei den Halbkreisgewölben ohne Hintermauerung oder mit Hintermauerung bis zum Scheitel die Bruchfuge ungefähr in einer Höhe von  $30^\circ$  liegt, wenn man von dem Anfange des Halbkreises aus zählt. Bei den Gewölben, deren Querschnitt ein Korbbogen ist, der aus drei Kreisbogen von je  $60^\circ$  besteht und um  $\frac{1}{3}$  oder  $\frac{1}{4}$  gedrückt ist, liegt die Bruchfuge in einer Höhe von  $45^\circ$  bis  $55^\circ$ , wenn man von dem Anfange des kleinen Bogens aus zählt. Bei den Stichbögen (deren Querschnitt ein Kreisbogen) tritt der Bruch dicht am Widerlager ein, wofern das Gewölbe nicht eine sehr kleine Dicke oder einen Centriwinkel besitzt, der über  $120^\circ$  hält <sup>1)</sup>.

§. 315. Aus den Beobachtungen Perronet's <sup>1)</sup> bei der Construction mehrerer großen Brücken lernt man ebenfalls die

- 1) Noch andere Versuche über das Gleichgewicht der Gewölbe findet man in dem Werke A dissertation on the construction and properties of arches, von G. Atwood, 1801. Der Verfasser untersucht das Gleichgewicht gegen Gleiten und seine Versuche, welche er mit Gewölbestücken von gut polirtem Kupfer anstellte, beziehen sich ins Besondere auf diesen Fall.
- 2) Mémoire sur le cintrement et le décintrement des ponts. Man sehe auch den Recueil d'expériences et d'observations, par Boistard und die Etudes relatives à l'art des constructions, par Bruyère, premier recueil.

Natur der bei einem Gewölbe eintretenden Bewegungen kennen. Nach diesen Beobachtungen können die ersten Schichten der Gewölbesteine, die sogenannten ruhenden Schichten, ohne Hülfe des Lehrgerüsts gelegt werden; es fangen dieselben nicht eher zu gleiten an, als bis die Neigung der Lagerflächen gegen den Horizont  $39^{\circ}$  bis  $40^{\circ}$  beträgt. <sup>1)</sup> Wird die Neigung größer, so trägt das Lehrgerüst einen Theil des Gewichtes der Gewölbesteine; wendet man daher ein Sprengwerk als Lehrgerüst an, so werden die unteren Theile desselben herabgedrückt und der Scheitel würde in die Höhe steigen, wenn man diese Bewegung nicht durch eine genügende Belastung im Scheitel verhinderte.

Diese Beobachtungen wurden bei dem Brückenbogen von St. Edmund in Nogent-sur-Seine gemacht (Fig. 41). Der Querschnitt ist ein Korbbogen von 29,24 Meter Spannweite und 8,77 Meter Pfeilhöhe. Die Dicke im Scheitel ist 1,62 Meter. Jede Hälfte des Bogens besteht aus 47 Schichten von Gewölbesteinen mit Ausnahme des Schlusssteines. Als die ersten zwanzig Schichten gelegt waren, lösten sich die letzten fünf ab durch das Sehen des Lehrgerüsts; die Bruchfuge öffnete sich um 0,02 Meter auf der äußern



Wölfläche oberhalb der 15. Schicht, und zwischen dem Gewölbe und den horizontalen Schichten der Brückenpfeiler trat eine verticale Trennung ein, welche bis zur 7. Schicht merklich war. Als man mit dem Legen der Steine fortfuhr, schlossen sich diese Oeffnungen wieder; die Bruchstelle fand sich weiter nach oben gedrückt, und von der 26. bis zur 31. Schicht öffneten sich die Fugen auf der äußern Wölfläche um 0,002 Meter.

Die Form des Bogens der Neuilly-Brücke ist ein um ein Viertel gedrückter Korbbogen von 39 Meter Spannweite. Außer dem Schlussstein besteht jede Hälfte aus 56 Schichten. In den Bogen, welche den Pfeilern zunächst liegen, öffneten sich die Fugen nach und nach auf der äußern Wölfläche in dem Maße, in welchem das Legen der Steine fortschritt, um  $\frac{1}{2}$  bis 5 und 7 Millimeter, und zwar bei der 11. bis zur 36. Schicht. Ähnliche Erscheinungen wurden bei anderen Brücken beobachtet.

§. 316. Andere Bewegungen finden statt nach dem Einsetzen des Schlusssteines; das Lehrgerüst ist alsdann im Scheitel belastet und die Seiten desselben werden nach oben gedrängt. Vor der Ausschalung des Brückenbogens zu Nogent (Fig. 41) hatte man auf den Stirnflächen desselben drei gerade Linien gezogen; die eine

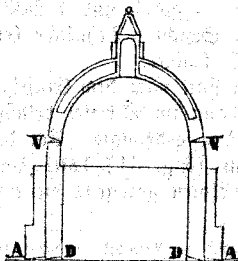
<sup>1)</sup> Diesem Winkel entspricht der Reibungscoefficient 0,82, ein Resultat, das schon oben in §. 284 erwähnt wurde.

horizontal am Scheitel des Gewölbes oberhalb der beiden 28sten Schichten; die beiden anderen aber schräg von den Endpunkten der ersten bis zu den Punkten, in welchen die zu den 7. Schichten gehörenden Fugen die beiden Verticalen schneiden, welche die Tangenten an den Anfängen sind. Die Lage dieser Linien hatte man auf feste Punkte bezogen. Die beobachteten Erscheinungen sind folgende: die letzten Fugen, welche sich in dem Obertheile des Bogens auf der äußern Wölbfläche geöffnet hatten, schlossen sich wieder, und der verticale Riß, welcher zwischen den Gewölbsteinen und den Schichten der Pfeiler entstanden war, verschwand fast gänzlich. Die horizontale Linie wurde gekrümmt, so daß sie ein Sehen anzeigte, welche von der Mitte aus nach beiden Seiten hin gleichmäßig abgenommen hatte. In der Krümmung der beiden anderen Linien zeigte sich ein Beugungspunkt in dem Durchschnitte mit der Fuge zwischen der 16. und 17. Schicht, so daß dies nicht allein ein verticales Sehen und Zusammendrängen der oberen Schichten bis einschließlich zur 17. anzeigte, sondern auch ein ähnliches Zusammendrängen der unteren Schichten nach den Pfeilern zu. Die Bruchstelle lag also zwischen der 16. und 17. Schicht der Gewölbsteine; man muß dabei beachten, daß die Hintermauerung zur Zeit der Ausschalung vollendet war.

Bei der Neuilly-Brücke schlossen sich nach dem Einsetzen der Schlüsselsteine die letzten Fugen, welche sich auf der äußern Wölbfläche geöffnet hatten; dagegen zeigten sich vom Schlusse aus neue Fugenrisse auf der innern Wölbfläche. Die Fugen auf der äußern Seite in den Schenkeln blieben offen; die größte Oeffnung zeigte sich zwischen der 26. und 27. Schicht und gab dadurch die Lage der Bruchstelle an. Die Hintermauerung war zur Zeit der Ausschalung nicht vollendet.

§. 317. Die vorstehenden Resultate beziehen sich auf die Tonnengewölbe; aus den Beobachtungen über den Verfall der Peterskirche in Rom, kann man die analogen Bewegungen, wie sie bei Kuppelgewölben stattfinden, kennen zu lernen. Aus diesen

Fig. 42.



Beobachtungen geht hervor, daß das genannte Bauwerk eine Neigung zum Einsturze in der durch Fig. 42 dargestellten Weise hatte; das Mauerwerk, welches in der Richtung der Meridianebenen sehr viele Risse zeigte, öffnete sich an der äußern Wölbfläche in V am Anfange des Gewölbes und an der innern Wölbfläche in AD an der Basis der Trommel, auf welcher die Kuppel steht. Eine Zunahme dieser Beschädigungen wurde

vermittelst eiserner Ringe verhindert, welche die Vergrößerung des Durchmessers in dem unteren Theile der Kuppel unmöglich machen.<sup>1)</sup>

§. 318. Das Endresultat aus den eben aufgeführten Beobachtungen und Erfahrungen ist:

1. daß bei den Bewegungen der Gewölbe die Theile nicht auf einander gleiten, sondern sich durch eine Drehung um die oberen oder unteren Kanten der Gewölbesteine von einander entfernen;
2. daß ein einstürzendes Gewölbe gewöhnlich in vier Haupttheile zerbricht, von denen die beiden oberen Theile sich senken, während die beiden unteren Theile nach außen umgeworfen werden. Man darf indessen daraus nicht schließen, daß ein Gewölbe nicht durch das Gleiten der Gewölbesteine einstürzen könne, sondern nur daß bei den Dimensionen, welche man den Gewölben gewöhnlich giebt, so wie bei den gewöhnlichen Werthen der Reibung und Cohäsion die Gewölbe leichter durch Drehung als durch Gleiten einstürzen. Zuweilen geschieht es, daß die unteren Theile des Gewölbes auf den horizontalen Fugen am Widerlager gleiten, während die oberen Theile sich durch eine Drehung um die Kanten der Gewölbesteine senken.

1) Die Beschädigungen der Peterskuppel in Rom findet man beschrieben in dem Werke von Poleni, betitelt *Memorio istoriche della gran cupola del tempio Vaticano*, Padua, 1748, welches einen Auszug aus sämtlichen Schriften enthält, die bis zu dieser Epoche über die Kuppel des Vaticanus erschienen waren, und unter denen das *Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell' anno 1742* ausgezeichnet zu werden verdient. In diesem Werke von Besueur, Jacquier und Boscowich ist die Gleichgewichtsfrage der Gewölbe mit großer Genauigkeit und vielem Scharfsinn abgehandelt. Die Beschädigungen der Kuppel sind als das Resultat der hier angegebenen Bewegungen dargestellt, welche durch den Seitenschub der oberen Theile hervorgerufen werden. Poleni stimmt hierin mit den genannten Gelehrten nicht überein; er verwirft die Ansicht, daß die unteren Theile durch den Seitenschub der oberen auseinander gedrängt seien, und schreibt die Beschädigungen einem ungleichmäßigen Setzen zu, welches durch Fehler in der Construction veranlaßt sein soll. Doch schlägt er als Hülfsmittel mehrere Eisensringe vor, welche auch unter seiner Leitung von Vanvitelli im Jahre 1748 angebracht und später noch vermehrt wurden. Diese Eisensringe können keinen andern Zweck haben, als denjenigen, den Horizontalschub zum Theil aufzunehmen.

Die Ideen der drei Gelehrten Besueur, Jacquier und Boscowich hat Gauthey in seiner *Dissertation sur les dégradations du Panthéon français*, pag. 117, adoptirt. Rondelet widerspricht denselben in seiner *Art de bâtir*, tome II, pag. 69; tome III, pag. 222 der fünften Auflage. Die von diesem Architekten angenommenen Grundsätze stimmen jedoch nicht mit der Wirklichkeit überein, indem R. behauptet, die Kuppelgewölbe hätten keinen Horizontalschub.

Es scheint, als ob Christoph Wren, ein geschickter Mathematiker, welcher in den Jahren von 1675 bis 1710 die Paulskirche in London erbaute, ähnliche Ansichten über das Gleichgewicht der Gewölbe, wie die oben vorgetragene Theorie gehabt habe. Man sehe den *Account of the Family Wren*, pag. 356 u. folg., welchen Robinson in seinem Werke *A system of mechanical philosophy*, vol. I, pag. 642 citirt.

### Drittes Kapitel.

#### Spezielle Berechnung der Gewölbe.

§. 319. Die Form und die allgemeinen Dimensionen eines Gewölbes sind durch die Bestimmung des Gebäudes, zu welchem das Gewölbe gehört, festgestellt. Auch sieht man gewöhnlich die Spannweite des Gewölbes, die innere Wöblinie, die Höhe der Widerlager und die Vertheilung der Gewichte, welche das Gewölbe tragen soll, als gegeben an. Nach solchen ausgeführten Bauwerken, welche dem projectirten analog sind und als die vollkommensten angesehen werden, bestimmt man zum Voraus die Dicke des Gewölbes im Scheitel. Diese Dicke ist entweder für das ganze Gewölbe überall dieselbe, oder man vermehrt sie progressiv vom Scheitel nach den Anfängen hin. Ist das Project eines Gewölbes fertig, so muß man sich vergewissern, daß das Gewölbe bei der Wegnahme des Lehrgerüsts im Gleichgewichte bleiben wird. Das Gleichgewicht eines Gewölbes stellt man dadurch her, daß man entweder die Theile, welche ein Bestreben haben, sich zu erheben, mehr belastet, oder dadurch, daß man ihnen stärkere Dimensionen giebt. Man muß gleichfalls untersuchen, ob der Druck auf die verschiedenen Theile des Gewölbes auch nicht groß genug ist, um die Gewölbesteine zu zerdrücken. Gegenwärtige Untersuchungen umfassen nur Anwendungen der im ersten Kapitel vorgetragenen Theorie.

#### Gleichgewicht der Tonnengewölbe.

§. 320. Man betrachte ein (gerades) Tonnengewölbe als aus zwei Theilen bestehend, welche in einer verticalen Fuge zusammenstoßen. Die Wirkung der von dem Gewölbe getragenen Belastungen bringt zwischen den beiden Hälften normal gegen die Fuge einen Druck hervor. Man könnte nun die eine Gewölbhälfte weglassen und sie durch eine Horizontalkraft ersetzen, die dem in Rede stehenden Normaldrucke gleich sein müßte. Ist diese Horizontalkraft groß genug, um in der bleibenden Hälfte einen Druck hervorzubringen, indem sie dieselbe ganz oder zum Theil nach außen umwirft, oder ist sie nicht groß genug, um diese Hälfte an dem Einstürzen nach innen zu verhindern, so kann das Gewölbe sich nicht im Gleichgewichte halten. Die Aufsuchung der Bedingungen dieses Gleichgewichtes umfaßt mehrere Fälle, welche unterschieden und einzeln untersucht werden müssen.





§. 322. Bei den Formen und den Verhältnissen, welche man den Gewölben in den meisten Fällen giebt, wird die Bruchfuge, für welche der Ausdruck (A) ein Maximum wird, in den Seiten des Gewölbes liegen. Die Fuge, für welche der Ausdruck (A<sub>1</sub>) ein Minimum wird, ist am häufigsten die erste Horizontalfuge gleich am Widerlager. Alsdann hat das Gewölbe eine Neigung, in der durch

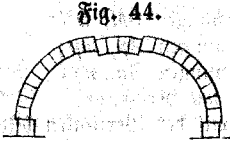
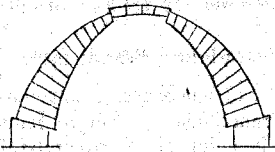


Fig. 44 dargestellten Weise einzustürzen; der obere Theil senkt sich, während die beiden unteren Theile auf jeder Seite nach außen gedrängt werden.

Es kann auch vorkommen, daß die Fuge, für welche der Ausdruck (A) ein Maximum wird, an oder nahe bei den Anfängen des Gewölbes liegt, während die Fuge, für welche der Ausdruck (A<sub>1</sub>) ein Minimum wird, nahe beim Scheitel liegt. In diesem Falle hat das Gewölbe eine Neigung, in der durch Fig. 45 dargestellten Weise einzustürzen; der obere Theil wird gehoben, während die beiden unteren Theile von jeder Seite nach innen gleiten.



§. 323. Nimmt man jetzt an, daß das Gewölbe nur durch eine Drehung der Gewölbesteine um ihre obere oder untere Kante einstürzen könne, so sieht man, daß man nach §. 292 für die in *N* angreifende Horizontalkraft *Q*, welche eine Drehung des Gewölbstückes *mnNM* um die Kante *m* von oben nach unten verhindern soll, den Ausdruck erhält

$$Q = \frac{G(a-x) - \frac{1}{2}Rz^2}{b-y} \quad (B).$$

Nachdem man den Werth (B) für alle Lagerfugen des Halbgewölbes berechnet hat, muß der größte derselben als der Horizontalschub des Gewölbes angenommen werden.

Man beachte jetzt, daß die in *N* angreifende Horizontalkraft *Q*, wenn sie groß genug sein soll, um das Gewölbstück *mnNM* von unten nach oben um die Kante *n* zu drehen, den Ausdruck haben muß

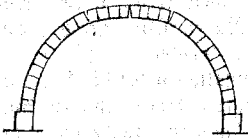
$$Q = \frac{G(a-x') + \frac{1}{2}Rz^2}{b-y'} \quad (B_1).$$

Nachdem man den Werth (B<sub>1</sub>) für alle Lagerfugen des Halbgewölbes berechnet hat, kann man überzeugt sein, daß das Gewölbe im Gleichgewichte bleiben wird, wenn alle diese Werthe größer sind, als der Horizontalschub des Gewölbes. Im entgegengesetzten Falle kann das Gleichgewicht nicht bestehen.

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Gewölbes ist also, daß das Maximum von (B) kleiner sei als das Minimum von (B<sub>1</sub>).

Bei dem eben Gesagten wird übrigens vorausgesetzt, daß die Fuge, für welche (B) ein Maximum wird, nahe am Scheitel liege, während die Fuge, für welche (B<sub>1</sub>) ein Minimum wird, nahe an den Anfängen liegt. Alsdann hat das Gewölbe eine Neigung, in

Fig. 46.

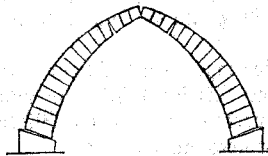


der durch Fig. 46 dargestellten Weise einzustürzen; die oberen Theile senken sich, indem sie sich in der obern Kante der Schlusssfuge gegen einander stützen, während die beiden unteren Theile um die äußere Kante ihrer Basis nach außen gedreht werden. Die oberen Theile

drücken alsdann gegen die unteren in der auf der inneren Wölbfläche befindliche Kante der Bruchfuge.

§. 324. Das Gewölbe kann aber auch, wie man in §. 313 gesehen hat, in der durch Fig. 47 dargestellten Weise einstürzen,

Fig. 47.



indem die unteren Theile sich um die untere Kante ihrer Basis drehen und nach innen fallen, während die oberen Theile gehoben werden, wobei sie sich in der unteren Kante der Schlusssfuge gegen einander stützen. Die oberen Theile drücken alsdann

auf die unteren in der auf der äußern Wölbfläche befindlichen Kante der Bruchfuge. Um das Gleichgewicht gegen diese letztere Art des Bruches zu ermitteln, beachte man, daß die in *M* (Fig. 43) angreifende Horizontalkraft *Q*, welche das Gewölbstück *mnNM* verhindern würde, sich um die Kante *m* von oben nach unten zu drehen, den Ausdruck hat

$$Q = \frac{G(a-x) - \frac{1}{2}Rz^2}{b-y} \quad (b).$$

Das Maximum dieses Druckes muß als der Horizontalschub des Gewölbes angenommen werden.

Man beachte sodann, daß die in *M* angreifende Horizontalkraft *Q*, wenn sie das Gewölbstück von unten nach oben um die Kante *n* drehen soll, den Ausdruck haben muß

$$Q = \frac{G(a-x') + \frac{1}{2}Rz^2}{b-y'} \quad (b_1).$$

Die Bedingung für das Gleichgewicht des Gewölbes ist also, daß das Maximum von (b) kleiner sei als das Minimum von (b<sub>1</sub>).

§. 325. In §. 321 wurde angenommen, daß das Gewölbe nur durch Gleiten einstürzen könne, und in §. 323 und §. 324, daß der Einsturz nur durch Drehung erfolgen könne. Es können

aber auch beide Bewegungen zugleich auftreten. Der gewöhnlichste Fall ist, daß der Einsturz in der in §. 323 und Fig. 46 angegebenen Weise erfolgt; zuweilen geschieht es auch, daß die oberen Theile sich senken, wie in Fig. 46, und die unteren Theile zurückdrängen, wie in Fig. 44. Es ist klar, daß, um eine solche Bewegung zu verhüten, das Maximum von (*B*) kleiner gemacht werden muß, als das Minimum von (*A*). Die übrigen Fälle kommen sehr selten vor, und bei den meisten Gewölben, welche man auszuführen haben wird, wird es ohne Nutzen sein, sie auf das diesen Fällen entsprechende Gleichgewicht zu prüfen.

Man wird also alle möglichen Combinationen berücksichtigt haben, wenn man beachtet, daß die Gleichgewichtsbedingungen sind, 1) daß die Werthe (*A*) und (*B*) in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes kleiner sein müssen als (*A*<sub>1</sub>) und (*B*<sub>1</sub>); 2) daß die Werthe (*A*) und (*b*) in der ganzen Ausdehnung des Gewölbes kleiner sein müssen als (*A*<sub>1</sub>) und (*b*<sub>1</sub>).

Will man den Widerstand der Reibung und der Cohäsion vernachlässigen, so setze man in den vorstehenden Formeln *f*, *γ* und *R* gleich Null. Im entgegengesetzten Falle sind diese Größen nach den Resultaten zu bestimmen, welche in §. 25 u. folgd., so wie §. 280 u. folgd. aufgeführt sind.

§. 326. Hat das Gewölbe Widerlager oder Stirnpfeiler, bei denen jede Schicht aus einem einzigen Steine besteht, so müssen die obigen Gleichungen so angewandt werden, als ob die Widerlager oder Pfeiler einen Theil des Gewölbes ausmachten.

§. 327. Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß das Verfahren 1), welches man anzuwenden hat, um das Gleichgewicht eines Gewölbes zu untersuchen, fast in allen Fällen, die sich darbieten können, in dem Folgenden besteht:

1. Sucht man den Werth des in *N* (Fig. 43) wirkenden Horizontalschubes, indem man für die Bruchfuge verschiedene Lagen annimmt und unter diesen diejenige beibehält, für welche der Ausdruck

$$Q = \frac{G(x-x) - \frac{1}{3}Rz^2}{b-y},$$

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

1) Das hier angegebene Verfahren, welches sich auf die in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Begriffe stützt, stimmt mit der Theorie überein, welche Coulomb in den *Mémoires des savans étrangers, présentés à l'Académie des sciences*, 1773 gegeben hat. *Audoy* bemerkt in dem *Mémorial de l'officier du génie*, Nr. 4, daß die Gleichgewichtsbedingungen, welche man durch das obige Verfahren erhält, durchaus nicht von denen verschieden sind, welche man durch die weniger einfachen Methoden erhält, die man in dem *Recueil d'expériences et d'observations* von *Boistard* und in dem *Traité de la construction des ponts* von *Bouthey* angegeben findet.

$$Q = G \frac{a-x}{b-y}$$

ein Maximum wird <sup>1)</sup>).

2. Untersucht man, ob die Wirkung des so bestimmten Horizontalschubes groß genug ist, um einen Theil oder das Ganze der Gewölbehälfte *ABNM* durch eine Drehung um die Kante eines Gewölbesteines nach außen umzuwerfen. Im Allgemeinen wird man sich durch den bloßen Anblick überzeugen, daß die ganze Gewölbehälfte leichter umzuwerfen sein wird, als ein Theil derselben. In diesem Falle hat man die erste Fuge *AB* als die Bruchfuge anzunehmen, und man muß sich vergewissern, daß der Ausdruck

$$Q = \frac{G(a-x') + \frac{1}{2}Rz^2}{b'-y'}$$

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

$$Q = G \cdot \frac{a-x'}{b'-y'}$$

wie er sich für diese Fuge berechnet, größer ist als der Horizontalschub.

3. Untersucht man, ob der Horizontalschub ein Gleiten auf den Lagerflächen bei dem Ganzen oder einem Theile der Gewölbehälfte hervorbringen kann; d. h. man vergewissert sich, daß der Ausdruck

$$Q = \frac{G(\cos\theta + f\sin\theta) + \gamma z}{\sin\theta - f\cos\theta}$$

oder, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, der Ausdruck

$$Q = G \frac{\cos\theta + f\sin\theta}{\sin\theta - f\cos\theta}$$

wie er sich für eine beliebige Fuge an den Anfängen berechnet, größer ist als der Horizontalschub. Ist diese Fuge horizontal, so vereinfacht sich der vorstehende Ausdruck zu

$$Q = fG + \gamma z,$$

1) Vernachlässigt man die Cohäsion des Mörtels, so läßt sich das Auffuchen der Bruchfuge *mn* (Fig 43), für welche der Ausdruck  $Q = G \frac{a-x}{b-y}$  ein Maximum wird, vermittels des folgenden Satzes vereinfachen. Gesezt, der Bruch erfolge nicht in der Normalfuge *mn*, sondern in einer Verticalebene, welche durch den Punkt *m* geht, und  $\varphi$  sei der Winkel, welchen eine an die innere Wölblinie gezogene Tangente mit der Verticalen bildet; für die Bruchstelle *m* erhält man alsdann die Relation  $\tan\varphi = \frac{a-x}{b-y}$ . Es müssen also die an die Bruchstelle *m* in der innern Wölblinie gezogene Tangente und die Verticale *CD*, welche durch den Schwerpunkt des Gewichtes *G* des obern Gewölbstückes geht, sich in einem Punkte der Horizontallinie treffen, welche sich durch den Punkt *N* ziehen läßt. Diesen Satz verbandt man Lame und Clapeyron. Man sehe das Mémoire sur la stabilité des voûtes in den Annales des Mines, tome VIII., 1823.

und, wenn man die Cohäsion des Mörtels vernachlässigt, zu  

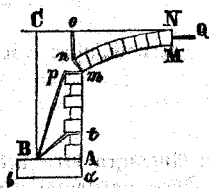
$$Q = fg.$$

Bei der Auffuchung der Bruchfuge und des Horizontalschubes kann man sich mit Hilfe der in §. 314 u. folgd. gegebenen Resultate die Arbeit erleichtern.<sup>1)</sup> Bei den Strebogen (wenn der Centriwinkel nicht über 120° beträgt) und den schreibrechten Gewölben kennt man die Lage der Bruchfuge zum Voraus, und der Horizontalschub läßt sich unmittelbar berechnen.

Erfährt man aus dem Resultate der Berechnung, daß das projectirte Gewölbe sich nicht im Gleichgewichte halten würde, so muß man entweder die Dicke im Scheitel, oder die Breite der Widerlager, oder die Belastungen vermehren. Wenn der Mangel an Gleichgewicht daher käme, daß die unteren Theile auf den Fugenebenen gleiten könnten, so würde man ohne Vermehrung der Mauermaße dem abhelfen können, wenn man die Fugen durch aufrecht gestellte Steine unterbräche, oder den Fugenebenen eine Neigung nach innen gäbe, oder auch endlich die Theile des Mauerwerkes durch eiserne Verbandsstücke vereinigte.

§. 328. Besteht bei den unteren Theilen des Gewölbes, oder bei den zugehörnden Widerlagern nicht jede Schicht aus einem einzigen Steine, welcher die ganze Dicke einnimmt, so muß man nach dem in §. 211 u. folgd. Gesagten auf die Möglichkeit eines Bruches in den Widerlagern Rücksicht nehmen. So kennt man

Fig. 48.



z. B. bei dem Gewölbe, welche Fig. 48 darstellt, zum Voraus die Lage der Bruchfuge in *mno*. Man berechne hiernach den Horizontalschub *Q* unter der Bedingung, daß diese Kraft, wenn sie in *N* thätig ist, den Theil *mnoNM* verhindere, sich um die Kante *m* zu drehen. Um sich nun zu vergewissern, daß der auf diese Weise bestimmte Gewölbschub *Q* das Widerlager nicht durch eine

Drehung um die Kante *B* umwerfe, muß man annehmen, es könnte in dem Widerlager in der Richtung *tB* ein Bruch erfolgen, und dann nach Anleitung der eben citirten §§. die Gleichgewichtsbedingungen der Masse *ABCNM* bestimmen.

Hält man in dem Mauerwerk des Widerlagers die Cohäsion des Mörtels für sehr klein oder gleich Null, so muß man (nach §. 214 und §. 215) annehmen, daß der Bruch des Widerlagers in der Richtung *Bpm* erfolgen könnte, und darf also den Theil *ABpm* der Mauermaße nicht mit in Rechnung bringen.

§. 329. Ist der Baugrund für das Fundament eines Gewölbes nicht fest, sondern zusammendrückbar, so muß man auf die in §. 257 u. folgd. enthaltenen Bemerkungen Rücksicht nehmen. So

1) Noch mehr Erleichterung bieten die betreffenden Tabellen im Anhange.

muß man bei dem eben besprochenen Gewölbe die Breite  $\alpha\beta$  des Fundamentes aus der Bedingung bestimmen, daß das Gewicht der Mauermaße  $\alpha\beta CNMm$ , bezogen auf die Mitte von  $\alpha\beta$ , gleich sein muß dem Momente der Horizontalkraft  $a$ , bezogen auf denselben Punkt.

### Normaldruck der Tonnengewölbe zwischen den Fugen.

§. 330. Hat man den Horizontalschub  $Q$  nach Anleitung des §. 327 berechnet, so erhält man, wenn man die Benennungen des §. 320, die sich auf Fig. 43 beziehen, beläßt,

$$T = G \sin \theta + Q \cos \theta$$

als den Werth des Normaldruckes in einer beliebigen Fuge  $mn$ . Für eine horizontale Fuge, wie  $AB$ , wird dieser Druck

$$T = G,$$

also gleich dem Gewichte des Gewölbstückes  $ABNM$ . Für die verticale Fuge  $MN$  erhält man wieder, wie es sein muß,

$$T = Q.$$

§. 331. Es reicht indessen die Kenntniß des Normaldruckes zwischen den Fugen noch nicht aus, um untersuchen zu können, ob dieser Druck auch nicht die Gewölbsteine zerdrücken werde. Man muß noch die Vertheilung dieses Druckes in der Höhe  $mn$  der Fugenebenen kennen. Man betrachte ein Gewölbe, welches sich im Gleichgewichte befindet, dessen Einsturz aber in der durch Fig. 46 dargestellten Weise erfolgen würde, wenn man die Breite der Widerlager etwas geringer machte; die Gewölbsteine sehe man als Körper von absoluter Härte an. Der Normaldruck in der Fuge  $MN$  (Fig. 53), nämlich der Horizontalschub  $Q$  ist offenbar an der obern Kante  $N$  thätig. Wäre  $mn$  die Bruchfuge, so würde auch der Druck in dieser Fuge an der Kante  $m$  thätig sein. In der letzten Fuge  $AB$  wird endlich der Druck offenbar an der Kante  $B$  thätig sein. Was die Fugen anlangt, welche zwischen den genannten liegen, so muß man annehmen, daß bei denselben, welche nahe an  $MN$  und  $AB$  liegen, der Druck an der obern Kante, bei denselben aber, welche der Bruchfuge nahe liegen, an der untern Kante thätig ist. Die Scheide zwischen diesen beiden Arten von Fugen wird da sein, wo die Resultante aus den beiden Kräften  $G$  und  $Q$ , welche diesen Druck hervorbringen, die Fuge in einem Punkte trifft, der von der obern und untern Kante gleich weit entfernt ist.

§. 332. In der Wirklichkeit sind aber die Gewölbsteine nicht absolut hart, man darf also nicht annehmen, daß der Druck nur an den Kanten thätig sei. Dies ist indeß kein Hinderniß, um mit

einer hinreichenden Genauigkeit das Gleichgewicht der Gewölbe nach den oben gegebenen Regeln berechnen zu können; nur muß man auf die Elasticität der Masse der Gewölbesteine Rücksicht nehmen, um die Belastungen der einzelnen Theile der Steine richtig zu bestimmen. Diese Frage würde einen besondern Fall einer allgemeineren Aufgabe ausmachen, welche darin besteht, die Veränderungen zu bestimmen, welche ein elastischer Körper von beliebiger Gestalt erleidet, wenn verschiedene Kräfte auf denselben wirken. Da die Auflösung dieses letztern Problems hier nicht gegeben werden kann, so muß man die in Rede stehenden Kräfte mit Hülfe von Hypothesen aufzufinden suchen, die der Wahrheit sehr nahe zu kommen scheinen und Grenzwerte liefern können, deren Kenntniß für die Berechnung von Constructionen von großem Nutzen ist.

Man nehme, wie in dem vorhergehenden §. 332 an, daß das Gewölbe noch im Gleichgewichte befindlich und die Neigung zum Bruche in der durch Fig. 46 dargestellten Weise vorhanden sei. Am wichtigsten wird es sein, den von den Steinen ertragenen Druck in den Bruchfugen zu kennen, nämlich den beiden Endfugen  $MN$  und  $AB$  (Fig. 43), und der Bruchfuge in den Seiten, als welche wir  $mn$  ansehen.

Betrachtet man zuerst die Fuge  $MN$  und beachtet, daß diese Fuge ein Bestreben hat, sich in  $M$  zu öffnen, indem das Gewölbe kurz vor dem Bruche ist, so kann man annehmen:

1. daß die beiden durch diese Fuge getrennten Gewölbesteine an der untern Kante  $M$  keinen Druck gegen einander ausüben;
2. daß vermöge der Elasticität des Materials die Gewölbesteine, indem sie sich gegen einander stützen, um eine kleine Größe zusammengebrückt werden, deren Betrag von der Kante  $M$ , wo er gleich Null ist, bis zu der obern Kante  $N$  gleichmäßig zunimmt;
3. daß der Widerstand der Höhenglemente der Fuge proportional der Größe der Zusammendrückung ist, welche sie leiden, und also von der Kante  $M$ , wo der Widerstand gleich Null ist, bis zu der Kante  $N$ , wo er sein Maximum erreicht, gleichmäßig zunimmt.

Nennt man dann

$K$  den Druck, welchen die Kante  $N$  für jede Flächeneinheit erleidet;

$v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes, wie  $MN$  von dem untern Endpunkte  $M$ ;

$c$  die ganze Höhe  $MN$  dieser Fuge;

so erhält man  $\frac{Kv}{c}$  für den Druck, welchen das Höhenglement  $dv$

des Gewölbesteines erleidet, wenn es sich in der Entfernung  $v$  von der untern Kante befindet. Es muß aber die auf die Kante  $m$  bezogene Momentensumme der Pressungen, welche sämtliche Hö-



helemente erleiden, dem Momente des Gewichtes  $G$  des Gewölbstückes  $mnNM$  gleich sein, wenn man dieses Moment auf denselben Punkt bezieht. Die Momentensumme ist

$$\frac{K}{c} \int_0^c (b-y+v) v dv \text{ oder } \frac{1}{6} K [3(b-y)c + 2c^2];$$

man hat daher die Gleichung

$$\frac{1}{6} K [3(b-y)c + 2c^2] = G(\alpha-x);$$

woraus

$$K = \frac{6G(\alpha-x)}{3(b-y)c + 2c^2}.$$

Vermittelt dieser Formel läßt sich der Werth des größten Druckes berechnen, welchem die Steine im Schlusse des Gewölbes ausgesetzt sind, und nach Anleitung des §. 174 u. folgd. prüfen, ob die Steine hinreichenden Widerstand leisten werden.

§. 333. Nach den eben aufgestellten Hypothesen hat man für den Horizontalschub des Gewölbes die Summe der Pressungen in der Höhe der Fuge  $MN$  zu nehmen. Bezeichnet man diese Summe mit  $Q$ , so erhält man

$$Q = \frac{K}{c} \int_0^c v dv = \frac{1}{2} Kc,$$

und, wenn man für  $K$  seinen obigen Werth setzt.

$$Q = \frac{3G(\alpha-x)}{3(b-y) + 2c}.$$

Der Angriffspunkt von  $Q$  liegt in  $\frac{2}{3}$  der Höhe der Fuge, von der untern Kante  $M$  aus gerechnet. Dieser neue Werth  $Q$  des Horizontalschubes übertrifft etwas den oben mit  $Q$  bezeichneten Werth, nämlich

$$Q = \frac{G(\alpha-x)}{b-y+c},$$

der unter der Voraussetzung berechnet wurde, daß dieser Druck in  $N$  thätig sei.

Um das Gleichgewicht eines Gewölbes zu prüfen, ist es genauer, die Kraft  $Q$  als Horizontalschub anzunehmen, im Allgemeinen aber werden die Resultate wenig von denen verschieden sein, welche man erhält, wenn man nach §. 327 den Horizontalschub als durch die Kraft  $Q$  repräsentirt ansieht.

§. 334. Betrachtet man ferner die Bruchfuge  $mn$ , so kann man ebenfalls annehmen, daß der Druck an der obern Kante  $n$ , wo die Fuge sich zu öffnen strebt, gleich Null ist, und von hier bis zur Kante  $m$ , wo er am größten ist, gleichmäßig zunimmt. Bezeichnet  $z$  die Höhe  $mn$  der Fuge,  $K$  den Maximalwerth des Druckes

und  $v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes in  $mn$  von der obern Kante  $n$ , so erhält man, wie oben,  $\frac{Kvdv}{z}$  als den Druck, welchen ein Element der Höhe des Gewölbesteines erleidet. Die Summe der Pressungen, welche auf alle Elemente der Höhe kommen, muß dem Normaldrucke gleich sein, welcher für diese Fuge aus dem Gewichte des Gewölbstückes  $manM$  und dem Horizontaldrucke  $Q$  resultirt. Jene Summe ist

$$\frac{K}{z} \int_0^z v dv \text{ oder } \frac{1}{2} Kz;$$

man hat also die Gleichung

$$\frac{1}{2} Kz = G \sin \theta + Q \cos \theta,$$

woraus

$$K = \frac{2(G \sin \theta + Q \cos \theta)}{z}.$$

Diese Formel giebt den größten Normaldruck auf jede Flächeneinheit, welchen die Steine in der Bruchfuge erleiden. Dieser Druck ist doppelt so groß, als er sein würde, wenn die Kraft in der ganzen Höhe der Fuge gleichförmig vertheilt wäre.

§. 335. Betrachtet man endlich die Fuge  $AB$ , so ersieht man, daß, unter Beibehaltung der in dem vorhergehenden Paragraphen gemachten Annahmen, der obige Ausdruck für  $K$  auch bei dieser Fuge gilt. Bezeichnet  $G$  das Totalgewicht der Gewölbbälfte  $ABNM$ , und ist die in Rede stehende Fuge horizontal, so erhält man einfach

$$K = \frac{2G}{z}.$$

§. 336. Was die Fugen anlangt, welche zwischen den Bruchfugen liegen, so lassen sich die obigen Hypothesen im Allgemeinen hier nicht mit Genauigkeit anwenden, weil selbst, wenn ein Gewölbe auf dem Punkte steht, einzustürzen, diese Fugen kein Bestreben haben, sich zu öffnen, und man also den Druck auf die obere oder untere Kante der Fugen nicht gleich Null setzen darf. Bei den Fugen, um welches es sich hier handelt, vertheilt sich der Druck auf eine weniger gleichförmige Weise in der ganzen Höhe der Fugenebenen. Wenn man daher, ohne dies zu berücksichtigen, für diese Fugen den Werth  $K$  nach der Formel in §. 334 berechnete, so würde das Resultat den wirklichen Werth des Normaldruckes, den die Steine erleiden, übertreffen. Man sieht außerdem, daß, wenn die Gestalt des Gewölbes nicht sehr unregelmäßig ist, und die Gewölbesteine im Schlusse, in der Bruchfuge, welche sich in den Seiten befindet, und an den Anfängen dem Zerdrücken einen hin-

reichenden Widerstand leisten, sie dies in allen anderen Theilen des Gewölbes um so mehr thun werden.

§. 337. In §. 332 wurde angenommen, daß das Gewölbe gerade im Gleichgewichte, oder kurz vor dem Einsturze sei, und diese Annahme war nöthig, um die Bruchfugen ansehen zu können, als würden sie sich im nächsten Augenblicke öffnen. In der Wirklichkeit besitzen die Gewölbe aber stets einen Ueberschuß an Stabilität, weshalb sich keine Fuge öffnet, wenn dies nicht als Folge der Zusammendrückung des Mörtels geschieht, von welchem Umstande hier abgesehen wird. Der Werth des Horizontalschubes ist dennoch stets nach den oben aufgestellten Regeln zu berechnen. Da die Gewölbsteine in der ganzen Höhe der Fugenebenen in Berührung bleiben, so darf man den Druck auf die obere oder untere Kante der Fugen nicht mehr gleich Null annehmen, man muß vielmehr voraussetzen, daß sich der Druck in der ganzen Höhe der Fugenebenen vertheilt, wenn auch ein geringerer Theil auf die Kante kommt, wo sich die Fuge öffnen würde, wenn das Gewölbe einsürzen könnte. Der Totalwerth des Druckes auf die Fugenebenen kann außerdem niemals denjenigen übertreffen, welchen man nach den Formeln in §. 330 finden würde. Aus diesen Bemerkungen folgt, daß die Werthe, welche man für  $K$  durch die Anwendung der Formeln in den §§. 332 und 334 auf ein Gewölbe, welches einen Ueberschuß an Stabilität besitzt, findet, von den wirklichen Pressungen desto entferntere Grenzwerte sein werden, je größer der Ueberschuß von Stabilität ist, welchen das Gewölbe besitzt. Die kleinsten Werthe, welche man für  $K$  annehmen darf, sind diejenigen, welche man erhält, wenn man den ganzen Druck in der Höhe der Fugen gleichförmig vertheilt annimmt.

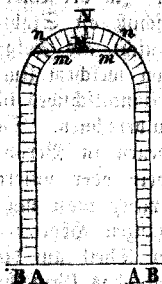
§. 338. Wenn die Gewölbsteine sich nicht unmittelbar berühren und man das Lehrgerüst entfernt, bevor die in den Fugen befindlichen Mörtelschichten eine genügende Härte erlangt haben, so kann ein Sturz eintreten, wobei sich an den Bruchstellen eine gewisse Anzahl von Fugen öffnet. In diesem Falle darf man die Steine keinem größern Drucke aussetzen, als dem nach den §§. 332 und 334 berechneten, da der Druck nicht allein an dem einen Ende der Fugen, sondern auch auf einen gewissen Theil der Höhe als gleich Null angesehen werden muß. Diese Erscheinungen, denen man zuvorzukommen suchen muß, würden sich schwer auf bestimmte Ausdrücke zurückführen und einer genauen Rechnung unterwerfen lassen.

### Ueber den Gebrauch eiserner Durchzüge zur Verstärkung der Tonnengewölbe.

§. 339. Sind die Widerlager eines Gewölbes zu schwach, als daß Gleichgewicht bestehen könnte, so läßt sich das Gewölbe

vermittelft eiserner Durchzüge verstärken, die man in den Seiten anbringt. Der Gebrauch solcher Durchzüge ist in Italien sehr verbreitet; man sieht sie dort bei den prächtigsten Bauwerken. Man nehme an, das Gewölbe, welches Fig. 49 darstellt, neige sich zum

Fig. 49.



Bruche in der Fuge  $mn$ , wobei sich die oberen Theile senken würden, während sie bei  $N$  in Berührung bleiben und die unteren Theile, gegen welche sie in den Kanten  $m$  drücken, durch eine Drehung um die Kanten  $B$  nach außen umwerfen würden. Der Bruch dieses Gewölbes wird sich verhindern lassen, wenn man die beiden Hälften vermittelft eines horizontalen Durchzuges verbindet, welchen man am passendsten unmittelbar unterhalb der Bruchfuge  $mn$  anbringt; denn beim Beginn des Einsturzes haben die Punkte  $m$  wirklich den größten Weg in horizontaler Richtung zu durchlaufen.

Man kann sich nun die Aufgabe stellen, den Bruch des Gewölbes zu verhindern vermittelft einer Horizontalkraft, deren (virtuelles) Moment, d. h. das Product aus der Kraft und dem von ihrem Angriffspunkte in dem Sinne ihrer Richtung durchlaufenen Wege, einen bestimmten Werth besitzen muß, damit die Summe der Momente von sammtlichen Kräften, welche auf jede Gewölbehälfte wirken, gleich Null werde. Man muß aber diese Kraft in der Richtung  $mn$  andringen, weil alsdann der von dem Angriffspunkte durchlaufene Weg ein Maximum wird, und daher die Kraft selbst ein Minimum.

Man kann außerdem die Spannung des Durchzuges ermitteln, wenn man beachtet, daß das (statische) Moment dieser Spannung mit dem Momente des Gewichtes der Gewölbehälfte  $ABMN$  zusammen dem Momente des in  $N$  wirkenden Horizontalschubes gleich sein muß, wenn man alle diese Momente in Bezug auf die Kante  $B$  nimmt.

§. 340. Ist die Dicke eines Gewölbes und der Widerlager desselben sehr klein, so ist es möglich, daß ein Durchzug nicht ausreicht, um den Bruch zu verhindern. Man wird sich darüber Gewißheit verschaffen, wenn man die Gewölbstücke  $ABmn$  und  $nmN$  jedes einzeln untersucht und auf sie die oben angegebenen Regeln anwendet. Findet sich dann, daß diese Gewölbstücke nicht im Gleichgewichte sind, so muß man in der Höhe der Fugen, in welchen die Neigung zum Bruche vorhanden ist, neue Durchzüge anbringen und die auf dieselben wirkenden Kräfte nach Anleitung des eben Gesagten bestimmen.

§. 341. Bei einem solchen Gebrauche der Durchzüge kann es vorkommen, daß in Folge einer Erhöhung der Temperatur der Durchzug sich ausdehnt und also nicht mehr den nöthigen Wider-

stand leistet, oder auch in Folge einer Erniedrigung der Temperatur zu sehr angespannt und dem Zerreißen ausgesetzt wird. Man wird Mittel suchen müssen, die diese Wirkungen verhüten. Man nenne nun

- $\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche des Durchzuges;
- $T$  den kleinsten Werth der Spannung, welche der Durchzug ertragen muß, um den Zweck erfüllen zu können, zu welchem man ihn bestimmt hat;
- $t$  die Spannung des Durchzuges, wenn er an seine Stelle gebracht wird;
- $R$  den größten Werth der Spannung, welche der Durchzug für jede Flächeneinheit des Querschnittes ertragen kann, ohne dem Zerreißen ausgesetzt zu sein;
- $V$  die höchste Temperatur, welcher der Durchzug ausgesetzt werden wird, ausgedrückt in Graden des hunderttheiligen Thermometers;
- $v$  die Temperatur zur Zeit der Einsehung des Durchzuges;
- $V'$  die niedrigste Temperatur, welcher der Durchzug ausgesetzt werden wird;
- $\delta$  die lineare Ausdehnung des Materials, aus welchem der Durchzug besteht, für einen Grad des hunderttheiligen Thermometers;
- $E$  behalte die in §. 77 angegebene Bedeutung (des Elasticitätsmoduls).

Wir erinnern außerdem, daß die lineare Ausdehnung oder Verkürzung für eine Veränderung der Temperatur um  $100^\circ$  bei den folgenden Materialien die nachstehenden Werthe hat; nämlich bei

Schmiedeeisen	0,00112
Guß Eisen	0,00111
Tannenholz	0,0008
Stein, ungefähr 1)	0,0005.

Bei dem Einsetzen des Durchzuges beträgt die Spannung des selben  $\frac{t}{\omega}$  für die Einheit der Querschnittsfläche; er wird also um den Bruch  $\frac{t}{E\omega}$  seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt. Steigt die Temperatur um  $V - v$  Grade, so erfolgt eine Ausdehnung um  $\delta(V - v)$  und die Spannung beträgt nur noch  $t - \delta(V - v)E\omega$ ; es muß daher sein

$$t - \delta(V - v)E\omega > T.$$

Sinkt die Temperatur von  $v$  auf  $V'$  Grad, so erleidet der

1) Notice sur la dilatation de la pierre, par M. Destigny. Journal du génie civil, tome II, pag. 227.

Durchzug eine Verkürzung um  $\delta(v - V')$  und die Spannung wird  $t + \delta(v - V')E\omega$ . Es muß daher auch sein

$$t + \delta(v - V')E\omega < R\omega.$$

§. 342. Aus den beiden Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} t &> T + \delta(V - v)E\omega, \\ t &< R\omega - \delta(v - V')E\omega; \end{aligned}$$

woraus

$$R\omega - \delta(v - V')E\omega > T + \delta(V - v)E\omega$$

und daher

$$\omega > \frac{T}{R - \delta(V - V')E}.$$

Nachdem man  $\omega$  so bestimmt hat, daß der vorstehenden Bedingung Genüge geschieht, wird man aus den beiden obigen Ungleichungen zwei Grenzwerte erhalten, zwischen denen  $t$  liegen muß. Man sieht, daß man die Bedingung, daß das Eisen nicht beim Zerreißen ausgefressen werden soll, unmöglich erfüllen kann, so bald die Differenz der extremen Temperaturen so groß ist, daß

$$V - V' = \text{oder} > \frac{R}{\delta E}$$

wird.

Die Werthe, welche man bei Schmiedereisen für  $E$  und  $R$  anzunehmen hat, finden sich in den §§. 102 und 182 angegeben<sup>1)</sup>.

§. 343. Bisher wurde angenommen, daß die Entfernung der beiden Punkte, wo die Enden des Durchzuges verankert werden, nicht durch den Temperaturwechsel verändert werden könne. Wäre dies anders, so müßte man in den obigen Formeln für  $\delta$  nicht mehr die Ausdehnung des Materials des Durchzuges setzen, sondern die Differenz der Ausdehnungen, welche respective dem Durchzuge und dem Körper zugehören, in welchem der Durchzug verankert wird.

1) Nach den oben citirten Paragraphen ist für Schmiedereisen  $E = 20\,000\,000$  Kil. und  $R = 6\,000\,000$  Kil.; also  $\frac{R'}{E} = \frac{3}{10000}$  und  $\frac{R'}{\delta E} = \frac{3}{0.122} = 27^\circ$ , ein Temperaturwechsel, der bei uns (in Deutschland) jedes Jahr erfolgt. Nimmt man aber nach Treibgold und Duveau (siehe §. 182)  $R'$  im Mittel zu  $12\,000\,000$  Kil. an, so erhält man  $\frac{R'}{\delta E} = 53\frac{1}{2}$  Grad, ein Werth, der noch größer wird, wenn man (nach dem folgenden Paragraphen) auf die Ausdehnung des Steins Rücksicht nimmt.

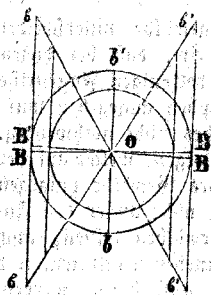
## Gleichgewicht der Kuppelgewölbe.

§. 344. Das Gleichgewicht der Kuppelgewölbe unterscheidet sich von dem der Tonnengewölbe besonders darin, daß bei diesen letzteren es zum Umsturze des Gewölbes nur derjenigen Fugenrisse bedarf, welche in den vorhergehenden Paragraphen angegeben wurden. Es ist zum Bruche eines solchen Gewölbes nicht nothwendig, daß irgend andere Fugenrisse nach Ebenen erfolgen, welche auf der Länge desselben normal stehen. Ein sphärisches Gewölbe hingegen kann nicht umgeworfen werden, ohne daß sich nicht außer den Fugen, welche sich wie bei den cylindrischen Gewölben öffnen, auch noch Mauerrisse in der Richtung der Meridianebenen bildeten, und die Cohäsion des Mörtels muß nothwendig aufgehoben werden, wenn diese Risse entstehen sollen. Der Bruch des Gewölbes kann ferner nicht ohne eine gewisse Trennung und Verschöbung der benachbarten Steine eintreten, so daß, wenn diese Steine groß sind, und sie sorgfältig ausgemessen und mit versetzten Fugen gelagert worden, sie zum Theil zerbrochen werden müssen, bevor der Bruch des Gewölbes erfolgen kann. Es ist schwer, den Widerstand der Cohäsion des Mörtels und besonders den der Steine genau in Rechnung zu bringen, und bei der Construction großer Kuppeln scheint es angemessen, auf diese beiden Widerstände gar keine Rücksicht zu nehmen <sup>1)</sup>. Wir werden hier ein Kuppelgewölbe betrachten, als würde es von den Meridianebenen in sehr viele Theile zerfällt, welche keine Verbindung unter einander besitzen.

§. 345. Es wird sich demnach Alles, was oben über die Tonnengewölbe gesagt wurde, auch auf die Kuppelgewölbe anwenden lassen, mit dem einzigen Unterschiede, daß statt der parallelen Verticalebenen, von denen die Theile der Tonnengewölbe eingeschlossen waren, man sich hier Verticalebenen denken muß, welche einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden und sich in der Axe der Kuppel schneiden. Das Gleichgewicht eines jeden von solchen Verticalebenen eingeschlossenen Theiles muß nach den oben gegebenen Regeln geprüft werden; aber es ist gleichgültig, ob man einen dieser Theile für sich betrachtet, oder die Rechnung sogleich für das

1) Aus den Rechnungen von Desvieux, Jacquier und Roscomich folgt, daß, wenn man von der Cohäsion des Mörtels absteht, das Moment der Kräfte, welche sich bestreben, die Kuppel der Peterskirche in Rom umzuwerfen, sich zu dem Momente der widerstehenden Kräfte ungefähr wie 3 zu 2 verhält. (Parere di tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro al fine dell'anno 1742.) Diese Kuppel ist fast ganz aus Biegelsteinen mit Puzzolamörtel ausgeführt. Lange Zeit genügte die Cohäsion der Bestandtheile, um das Gleichgewicht zu erhalten; da sich aber die Mauerrisse, welche durch die kleinen Verticungen hervorgerufen wurden, die durch Einschlagen des Blizes, und die Erdbeben entstanden, allmählich vermehrt und vergrößert hatten, so mußte man der Zunahme dieser Beschädigungen ein Ziel setzen, indem man eiserne Ringe um die unteren Theile der Kuppel legte.

ganze Gewölbe vornimmt. Es stelle Fig. 50 den Grundriß eines



Kugelgewölbes dar; man kann nun auf gleiche Weise das Gleichgewicht eines Theiles  $BOB'$ , welches von zwei sehr nahe liegenden Meridianebenen begrenzt wird, oder das Gleichgewicht der Gewölbhälfte  $bbb'b'$  untersuchen. Will man das Letztere thun, so denke man sich den halben Umfang  $bbb'b'$  in  $\beta\beta\beta'\beta'$  abgewickelt und eben so alle übrigen halbkreisförmigen Elemente der Kuppel auf den Seitenlinien des horizontalen Cylinders, der die Kuppel in dem Meridiananschnitte berührt, dessen Projection  $BOB'$  ist. Man erhält dadurch einen Theil eines

Tonnengewölbes, der von zwei Verticalebenen  $\beta\beta'$ ,  $\beta\beta'$  eingeschlossen wird, und worauf man die in §. 320 und folgd. aufgestellten Regeln anwenden kann. Bei der Bestimmung des Gewichtes und der Lage des Schwerpunktes der verschiedenen Theile hat man übrigens darauf zu achten, daß die beiden Verticalebenen, von denen die Theile eingeschlossen werden, sich in der Axe der Kuppel schneiden, und daher die Länge der horizontalen Elemente desto geringer ist, je näher diese Elemente dem Scheitel liegen, in welchem Punkte ihre Länge gleich Null ist.

Finden sich Thüren oder Fenster in den unteren Theilen der Kuppel, so ist klar, daß man in dem Theile des Tonnengewölbes  $\beta\beta'$  entsprechende leere Räume annehmen muß.

§. 346. Ist eine Kuppel im Gleichgewicht, so kann man dieselbe nach einer horizontalen Ebene durchschneiden und den obern Theil hinwegnehmen, ohne das Gleichgewicht aufzuheben. Wenn man z. B. den Theil  $mnNM$  (Fig. 43) hinweggenommen hat und den bleibenden Theil  $ABnm$  einer Kuppel betrachtet, welcher von zwei sehr nahe an einander liegenden Meridianebenen eingeschlossen wird, so kann dieser Theil entweder durch sich selbst im Gleichgewicht sein, oder das Gleichgewicht wird erst durch eine in  $n$  angreifende Horizontalkraft hergestellt. Im letztern Falle entsteht zwischen den Gewölbesteinen an dem obern Ende des bleibenden Theiles  $ABnm$  ein auf den Verticalfugen normal stehender Horizontaldruck, der so lange die Kuppel noch vollständig war, nicht existirte.

§. 347. Bestände ein Kuppelgewölbe wirklich aus sehr vielen, durch die Meridianebenen getrennten Theilen, die keine Verbindung mit einander hätten, so würde sich das Gewölbe nicht nach solchen Ebenen zerschneiden und zum Theil hinweg nehmen lassen, ohne den Einsturz des Ganzen herbeizuführen. Die großen, mit Halbkugeln überspannten Nischen bleiben, daher auch nur deshalb



im Gleichgewicht, weil die Materialien hinreichenden Zusammenhang haben, oder die Vordermauer eine genügende Stabilität besitzt, um der Seitenwirkung des Halbgewölbes widerstehen zu können.

### Ueber den Gebrauch eiserner Ringe zur Verstärkung der Kuppelgewölbe.

§. 348. Der Nutzen solcher Verstärkungen ist durch sehr viele Belege erwiesen <sup>1)</sup>. Die Untersuchungen in §. 339 ergeben, daß die Ringe vorzugsweise in der Höhe der Bruchfuge angebracht werden müssen. Bezeichnet man mit  $t$  die Spannung eines Kreises, so bringt diese Spannung die Wirkung einer Horizontalkraft hervor, die gleich

$$2\pi \cdot t$$

ist und, auf allen Punkten des Kreisumfangs gleichförmig vertheilt, normal gegen diesen Umfang gerichtet ist. Wenn man daher bei der Berechnung des Gleichgewichtes einer Kuppel diese sich durch ein Tonnengewölbe in der in §. 345 angegebenen Weise ersetzt denkt, so muß man die beiden Hälften dieses Gewölbes als durch einen oder mehrere Durchzüge vereinigt ansehen, deren Spannung zusammen gleich  $\pi \cdot t$  ist.

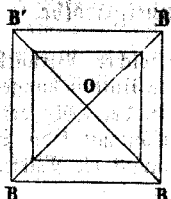
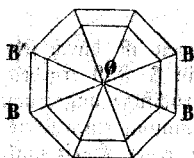
Der vorstehende Satz folgt aus dem, was in §. 307 gesagt wurde. Man kann sich von der Richtigkeit desselben direct überzeugen, wenn man beachtet, daß nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zwischen den in der Richtung der Halbmesser und den in der Richtung des Kreisumfangs wirkenden Kräften Gleichgewicht stattfindet, wenn sich die ersteren zu den letzteren verhalten, wie eine sehr kleine Variation des Kreisumfangs zu der entsprechenden Variation des Halbmessers; d. h. wie der Umfang zum Halbmesser.

Das in §. 340 u. folgd. Gesagte läßt sich in gleicher Weise auf die zur Verstärkung der Kuppelgewölbe dienenden Ringe anwenden.

1) Man sehe das zweite Buch der *Memorie istoriche della gran cupola del Vaticano*, von Poleni, wo der Verfasser mehrere Kuppelgewölbe aufzählt, welche vermittelst eiserner Ringe wieder hergestellt und consolidirt worden sind. Bei der Paulskirche in London sind die innere Kuppel und der Kegel, welcher die Laterne trägt, auf dieselbe Weise verstärkt. Eben so das mittlere Gewölbe bei der Kuppel des Pantheons in Paris. Man sehe *Mondelet's Art de bâtir*, tome IV., pag. 527 der fünften Auflage.

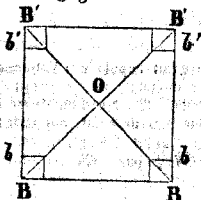
# Gleichgewicht der Kloster- und Kreuzgewölbe.

§. 349. Die Figuren 51 und 52 stellen den Grundriß eines Klostergewölbes mit polygonaler Basis dar. Man kann sich ein solches Gewölbe durch Verticalebenen, welche von den Ecken des Polygons ausgehen, in Theile zerfällt denken, welche keine Verbindung unter einander



ander gegenüber liegende Theile,  $BOB'$ ,  $BOB'$  als Stücke eines Tonnengewölbes ansehen. Auf diese Gewölbstücke kann man die in §. 320 u. folgb. gegebenen Regeln anwenden, wobei man jedoch bei der Berechnung der Volumen und der Bestimmung der Schwerpunkte stets darauf Rücksicht nehmen muß, daß die Verticalebenen, von denen diese Stücke eingeschlossen werden, gegen einander geneigt sind und sich in der Axe des Klostergewölbes schneiden. In der Wirklichkeit sind die Theile eines solchen Gewölbes mit einander verbunden, nämlich theils durch die Cohäsion des Mörtels, theils dadurch, daß man die Grate aus größeren, auf den Schwalbenschwanz verbundenen Steinen aufführt, die auseinander gerissen und zerbrochen werden müssen, bevor das Gewölbe einstürzen kann. Der Einfluß einer solchen Verbindung ist hier merklicher als bei den Kuppelgewölben, und desto größer, je weniger Seiten die polygonale Basis hat. Da indeß dieser Einfluß nicht der Art ist, daß er mit Genauigkeit in Rechnung gebracht werden könnte, so scheint es angemessen, nicht auf ihn Rücksicht zu nehmen, besonders dann, wenn es sich um große Gewölbe handelt.

§. 350. Das Gleichgewicht eines Kreuzgewölbes (Fig. 53) kann auf gleiche Weise untersucht werden, indem man dasselbe als durch die Verticalebenen  $BOB'$ ,  $BOB'$  in Theile zerlegt denkt, welche von einander unabhängig sind. Die Theile  $BOB$ ,  $B'OB'$  gehören zu einem und demselben Tonnengewölbe; der Bruch derselben erfolgt, indem sie die Widerlagspfeiler um die Kanten  $Bb$ ,  $B'b'$  umwerfen. Man beachte, daß hier die horizontalen Elemente der Gewölbtheile desto länger sind, je näher sie dem Scheitel liegen. Der Horizontalschub ist daher bei gleicher Gewölbstärke hier größer als bei den Klostergewölben. Man sieht aber andererseits,



Man sieht aber andererseits,

daß die Pfeiler auch die Gewölbstücke  $BOB'$ ,  $BOB'$  tragen, und nicht umgeworfen werden können, ohne daß diese Gewölbstücke an der Bewegung Theil nehmen; man muß daher zu dem Stabilitätsmoment der Pfeiler für die Kanten  $Bb$ ,  $B'b'$  das Moment der Hälfte der Gewölbstücke  $BOB$ ,  $B'OB'$  für dieselben Kanten hinzufügen. Hierin unterscheiden sich die Kreuzgewölbe von den Klostergewölben, indem bei letzteren im Falle des Bruches die Theile einzeln umgeworfen werden und nicht gegenseitig zu ihrer Stabilität beitragen. Was oben über den Einfluß der Verbindung der Gewölbtheile gesagt wurde, findet auch hier seine Anwendung.

#### Viertes Kapitel.

#### Bemerkungen über einige bei den Gewölben vorkommenden Rechnungen.

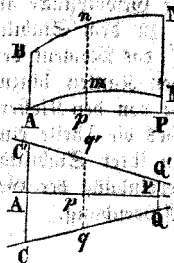
§. 351. Die in dem vorhergehenden Kapitel angegebenen Rechnungen bezwecken die Bestimmung der Volumen der Gewölbtheile, so wie die Ermittlung der Lage der Schwerpunkte dieser Theile, oder vielmehr des Abstandes dieser Schwerpunkte von einer gegebenen Ebene. Handelt es sich um ein Tonnengewölbe, welches von zwei auf dessen Are normal stehenden Verticalebenen eingeschlossen wird, so stellt man die Rechnung im Allgemeinen für eine Einheit der Länge des Gewölbes an, und braucht nur die Flächeninhalte der Querschnitte in Betracht zu ziehen. In anderen Fällen, und besonders bei den Kuppel-, Kreuz- und Klostergewölben müssen die Volumen der Gewölbtheile in Betracht gezogen werden.

Da der Querschnitt eines Gewölbes gewöhnlich von geraden Linien, Kreishbogen oder anderen Curven, deren Gleichungen bekannt sind, begrenzt wird, so lassen sich die Rechnungen nach den Regeln, welche die Geometrie an die Hand giebt, genau aufführen <sup>1)</sup>. Es wird aber einfacher sein, sich einer Näherungsmethode zu bedienen, wie dies schon Coulomb <sup>2)</sup> bemerkt hat.

1) Hudon hat auf diese Weise die Formeln für die verschiedenen Arten der Tonnengewölbe entwickelt. Man sehe das Memoire desselben in dem *Mémorial de l'officier du génie*, Nr. 4.

2) *Mémoires des savans étrangers*, 1773.

Fig. 54. Der in Rede stehende Querschnitt läßt sich in Theile wie  $ABMN$  (Fig. 54) zerlegen, welche von zwei verticalen Linien und zwei andern beliebigen Linien begrenzt werden. Wird das Gewölbe von zwei Verticalebenen eingeschlossen, die auf der Ase desselben normal stehen, so hat man nur die Fläche  $ABMN$  zu betrachten; sind aber die beiden Verticalebenen gegen die Ase geneigt, so hat man das Volumen zu betrachten, welches der Fläche  $ABMN$  entspricht und dessen Horizontalprojection  $CC'Q'Q$  ist. Nach diesen Vorbemerkungen nenne man



$x$  die Abscisse  $Ap$ ;

$y$  die Länge  $mn$ ;

$z$  die Länge  $qq'$ ;

$X$  die Abscisse  $AP$ ;

und sehe  $y$  und  $z$  als Functionen von  $x$  an. Wenn man nun den Inhalt der Fläche  $ABMN$  betrachtet, so erhält man

$$\int_0^X y dx$$

als Ausdruck dieses Inhaltes, und

$$\frac{\int_0^X xy dx}{\int_0^X y dx}$$

als den horizontalen Abstand des Schwerpunktes der Fläche von der Linie  $AB$ . Wenn man das Volumen betrachtet, dessen Projection  $CC'Q'Q$  ist, so erhält man

$$\int_0^X yz dx$$

als Ausdruck dieses Volumens, und

$$\frac{\int_0^X xyz dx}{\int_0^X yz dx}$$

als den horizontalen Abstand des zugehörigen Schwerpunktes von einer Verticalebene, welche durch  $CC'$  geht.

§. 352. Aus dem Vorhergehenden sieht man, daß die Rechnungen, um welche es sich hier handelt, stets auf die Angabe des

Werthes von bestimmten Integralen zurückkommen, welche allgemein durch

$$\int_0^X F(x) dx$$

ausgedrückt werden. Für den Werth solcher Integrale hat man aber die folgenden Näherungsformeln. Denkt man sich das Intervall  $AP$  oder  $X$  in eine gewisse Zahl  $n$  von gleichen Theilen, deren Länge  $\Delta x$  ist, getheilt; setzt man  $F(x) = u$  und bezeichnet mit  $u_0, u_1, u_2 \dots u_n$  die Werthe von  $u$ , welche zu den Abscissen  $0, \Delta x, 2\Delta x \dots n\Delta x$  gehören, so hat man<sup>1)</sup>

$$\int_0^X F(x) dx = \Delta x \left\{ \frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + \frac{1}{2} u_n \right. \\ \left. - \frac{1}{12} (\Delta^2 u_0 - \Delta^2 u_n) + \frac{1}{24} (\Delta^4 u_0 - \Delta^4 u_n) - \frac{1}{720} (\Delta^6 u_0 - \Delta^6 u_n) \right. \\ \left. + \frac{1}{160} (\Delta^4 u_n - \Delta^4 u_0) - \frac{8}{60480} (\Delta^6 u_n - \Delta^6 u_0) + \pi \right\}.$$

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so hat man auch

$$\int_0^X F(x) dx =$$

$$\frac{\Delta x}{3} \left\{ \begin{aligned} &u_0 + 4u_1 + 2u_2 + 4u_3 + 2u_4 + 4u_5 + \dots + 2u_{n-2} + 4u_{n-1} + u_n \\ &- \frac{1}{30} (\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_2 + \Delta^4 u_4 + \dots + \Delta^4 u_{n-6} + \Delta^4 u_{n-4} + \Delta^4 u_{n-2}) \\ &+ \frac{1}{30} (\Delta^5 u_0 + \Delta^5 u_2 + \Delta^5 u_4 + \dots + \Delta^5 u_{n-6} + \Delta^5 u_{n-4} + \Delta^5 u_{n-2}) \\ &- \frac{37}{1280} (\Delta^6 u_0 + \Delta^6 u_2 + \Delta^6 u_4 + \dots + \Delta^6 u_{n-6} + \Delta^6 u_{n-4} + \Delta^6 u_{n-2}) \\ &+ \pi. \end{aligned} \right\}.$$

Der Gebrauch dieser Formeln wird mehr Sicherheit gewähren, wenn man so operirt, daß in der Curve, deren Ordinate  $u$  ist, sich kein Beugungspunkt zwischen den Theilpunkten der Abscissenaxe befindet. Wenn die Curve Beugungspunkte besitzt, oder plötzliche Wechsel in Krümmung und Richtung darbietet, so hat man das Integral nach den Punkten dieser Art in mehrere Theile zu zerlegen und die entsprechenden Werthe einzeln zu berechnen.

Endlich kann man die Operationen, welche für die Berechnung der Gewölbe nöthig werden, bedeutend dadurch abkürzen, daß man die Längen der in dem vorhergehenden Paragraphen mit  $y$  und  $z$  bezeichneten Linien auf mit Genauigkeit ausgeführten Zeichnungen mißt.

1) Kavler-Wittstein, S. 560 und 561.

## Vierter Abschnitt.

### Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen.

§. 353. Die Holz- und Eisenconstruktionen bestehen im Allgemeinen aus einem Systeme von Stücken, die theils nur an den Enden, theils an verschiedenen Punkten ihrer Länge mit einander verbunden sind. Je nachdem diese Construktionen von unten unterstützt, oder von oben gehalten werden, bieten sie verschiedene Eigenthümlichkeiten dar. Das Gleichgewicht muß stets ein stabiles sein; im ersten Falle aber bedarf es dazu einer unveränderlichen Gestalt des Systemes, während im zweiten Falle das Gleichgewicht stets und selbst dann noch stabil sein wird, wenn die Construktion vollkommen biegsam ist.

Das allgemeinste Princip, welches man bei der Anordnung einer derartigen Construktion befolgen kann, besteht darin, die Hauptstücke in der Richtung der Geraden zu legen, welche sich von den Angriffspunkten der Belastungen nach den Stützpunkten ziehen lassen. Bei einer so angeordneten Construktion haben die Belastungen kein Bestreben, die einzelnen Stücke um die an den Enden derselben angebrachten Verbindungen zu drehen. Dieses Princip ist besonders auf diejenigen Construktionen anwendbar, welche von unten unterstützt werden.

§. 354. Der Widerstand, welcher ein jedes Stück einer Construktion leistet, muß den Belastungen angemessen sein, welche dasselbe zu tragen haben kann.

Von dem Grade des Widerstandes, welchen ein Stück leisten wird, kann man sich eine genaue Vorstellung verschaffen, wenn man beachtet, daß das Resultat einer beliebigen Formveränderung, welche ein Stück durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte erleidet, stets eine Verlängerung oder Verkürzung der Längenfaser des Stückes ist. Bei einer zu großen Verlängerung oder Verkürzung erfolgt der Bruch des Stückes entweder durch Zerreißen oder durch Zerquetschen der Fasern. Die Verlängerungen oder Verkürzungen, welche hier in Frage kommen, werden stets weit geringer sein, als diejenigen, durch welche der Bruch erfolgt; doch kann man sie in allen Fällen als das Maß der Anstrengung des Stückes betrachten. Hiernach reducirt sich in jedem einzelnen Falle, wo die Gestalt des Stückes und die auf dasselbe wirkenden Kräfte gegeben sind, die Frage darauf, das Verhältniß der Verlängerung oder Verkürzung der Fasern aufzufinden. Uebertrifft die Spannung, welcher dieser Verlängerung oder Verkürzung entspricht, nicht die im siebenten Kapitel des ersten Abschnittes angegebenen Grenzen, so kann man sicher sein, daß das Stück die verlangte Stärke besitzet.

Erstes Kapitel.

**Gleichgewicht eines horizontalen, prismatischen Stabes bei verschiedener Unterstüßung und Belastung.**

§. 355. Aus den in §. 86 u. folgd. gewonnenen Resultaten kennt man die Gleichgewichtsbedingungen eines prismatischen Stabes in den einfachsten Fällen. Wird ein solcher Stab an dem einen Ende festgehalten (eingemauert) und an dem andern Ende mit einem Gewichte  $P$ , auf jeder Einheit der Länge aber mit einem Gewichte  $p$  belastet, so hat man (nach den §§. 86 und 89)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{8}$$

als die Senkung (Durchbiegung) des freien Endes, wobei  $a$  die Länge des Stabes (soweit derselbe frei ist) und  $\varepsilon$  das Elasticitätsmoment bezeichnet, dessen allgemeiner Ausdruck in §. 80 gegeben ist.

§. 356. Wird ein Stab frei auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte mit einem Gewichte  $2P$ , auf jeder Einheit der Länge aber mit einem Gewichte  $p$  belastet, so hat man (nach den §§. 87 und 90)

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3} + \frac{p}{\varepsilon} \frac{5a^4}{24}$$

als die Senkung der Mitte des Stabes, wobei  $a$  die halbe Entfernung der Stützen von einander bezeichnet.

§. 357. Aus den in §. 121 u. folgd. enthaltenen Resultaten kennt man die Gleichgewichtsbedingungen eines auf dieselbe Weise belasteten, prismatischen Stabes für den Fall des Bruches. Wird ein Stab an dem einen Ende mit einem Gewichte  $P$  belastet, oder frei auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte mit einem doppelt so großen Gewichte belastet, und in beiden Fällen außerdem auf jeder Einheit der Länge mit einem Gewichte  $p$ , so hat man nach den §§. 121 und 122, 124 und 125 (wenn man die Krümmung des Stabes vernachlässigt)

$$Q = Pa + \frac{1}{2} pa^2,$$

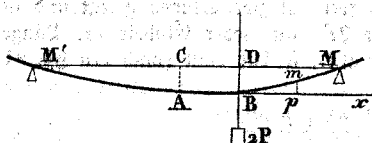
wobei  $a$  im ersten Falle die Länge des Stabes, im zweiten Falle die halbe Entfernung der Stützen von einander bezeichnet, und  $Q$  das Bruchmoment ist, dessen allgemeiner Ausdruck in den §§. 113 und 114 gegeben ist.

§. 358. Ist die Gestalt, welche ein prismatischer Stab in Folge der Biegung annimmt, bekannt, so lassen sich daraus unmittelbar die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches finden. Der Bruch des Stabes wird da am leichtesten eintreten, wo die Krümmung am größten ist, und wenn der Stab im Be-

ginn ist, zu brechen, so ist das Moment des Widerstandes gegen Biegung in diesem Punkte gleich dem Momente des Widerstandes gegen den Bruch. Man erhält also die auf den Fall des Bruches sich beziehenden Gleichgewichtsbedingungen, wenn man  $q$  gleich dem Maximalwerth von  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$  setzt, wobei  $x$  und  $y$  die Coordinaten der Curve sind, welche der Stab bildet, und  $q$  und  $\varepsilon$  die dafür in §. 80 und §. 113 angegebene Bedeutung haben.

**Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der in einem beliebigen, zwischen den Stützen liegenden Punkte belastet ist.**

§. 359. Man denke sich den Stab  $MM'$  (Fig. 55) auf zwei Stützen gelegt, die sich in derselben Horizontalen befinden, und in einem Punkte belastet ist, der nicht mehr in der Mitte zwischen den beiden Stützen liegt. Es handelt sich um die Gleichgewichts-



bedingungen dieses Stabes in Bezug auf die Biegung und auf den Bruch desselben. Man nenne

- $a$  die halbe Entfernung  $CM$  der beiden Stützen von einander;
- $z$  die Entfernung  $CD$ ;
- $x$  die Abscisse  $Bp$ ;
- $y$  die Ordinate  $mp$ ;
- $f$  die Senkung  $BD$  des Punktes  $B$ ;
- $\omega$  den Winkel, welchen die Tangente für den Punkt  $B$  der Curve mit der Horizontalen bildet;
- $\varepsilon$  behalte die in §. 80, und
- $q$  die in §. 113 angegebene Bedeutung.

Die Componenten des Gewichtes  $2P$ , welche die auf die Stützen  $M$  und  $M'$  wirkenden Kräfte repräsentiren, sind respective

$$P \frac{a+z}{a} \text{ und } P \frac{a-z}{a}.$$

Jeder Theil  $BM$ ,  $BM'$  des Stabes wird aber eben so gebogen, als ob der Punkt  $B$  festgehalten würde, während die genannten Kräfte an den Enden  $M$  und  $M'$  wirken; und man hat daher für den Theil  $BM$ , wie in §. 86



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} + \tan \omega,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \tan \omega,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a+z)(a-z)^3}{3a} + (a-z) \tan \omega.$$

Für den Theil  $BM'$  hat man ebenso

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} (a+z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ (a+z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \tan \omega,$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ (a+z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - x \tan \omega,$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a-z)(a+z)^3}{3a} - (a+z) \tan \omega.$$

Da  $f$  und  $\tan \omega$  in diesen beiden Gleichungen dieselben Werthe haben müssen, so findet man durch Elimination

$$\tan \omega = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{2(a^2-z^2)z}{3a}, \quad f = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{(a^2-z^2)^3}{3a}.$$

§. 360. Die Gleichungen der Theile  $BM$  und  $BM'$  der Curve sind respective

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ \frac{2}{3} (a-z)zx + \frac{1}{2} (a-z)x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\},$$

$$y = \frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a-z}{a} \left\{ -\frac{2}{3} (a+z)zx + \frac{1}{2} (a+z)x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right\}.$$

Die kleinste Ordinate (d. h. die negative Ordinate, deren absoluter Werth ein Maximum ist) erhält man, wenn man in der zweiten Gleichung  $\frac{dy}{dx} = 0$  setzt; man erhält dadurch

$$x = a+z - \sqrt{a^2 + \frac{2}{3}az + \frac{1}{3}z^2}.$$

Nennt man  $y_1$  den Werth von  $y$ , welcher diesem Werthe von  $x$  entspricht, so ist der Krümmungspfeil der Curve  $f-y_1$ . In dem Punkte  $B$  ist die Krümmung und dadurch die Neigung zum Bruche am größten; wir werden diesen Punkt den Bruchpunkt, die Bruchstelle nennen.

§. 361. Nach dem eben Gesagten und in Uebereinstimmung

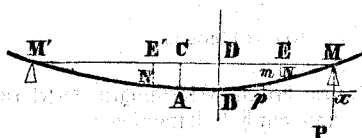
mit §. 358 werden die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches ausgedrückt durch die Gleichung

$$q = P \cdot \frac{a^2 - z^2}{a}.$$

Es erhellt dies auch daraus, daß  $q$  gleich dem Momente einer der beiden in  $M$  und  $M'$  thätigen Kräfte sein muß, wenn man das Moment auf den Bruchpunkt  $B$  bezieht.

**Gleichgewicht eines auf zwei Stützen gelegten Stabes, der auf einem Theile seiner Länge belastet ist.**

§. 362. Man denke sich den Stab  $MM'$  (Fig. 56) auf zwei Stützen gelegt, die sich in derselben Horizontalen befinden, und nur auf der Strecke  $NN'$  mit einem Gewichte  $p$  für jede Längeneinheit belastet. Es handelt sich um die Gleichgewichtsbedingungen. Man nehme



- an, der Punkt  $B$  liege in der Mitte von  $NN'$  und nenne
- $z$  die Entfernung  $CD$ ;
  - $a$  die halbe Entfernung  $CM$  der beiden Stützen von einander;
  - $a'$  die halbe Strecke  $DE$ , auf welcher der Stab belastet ist;
  - $x, y$  die Abscisse  $Bp$  und die Ordinate  $mp$ ;
  - $f$  die Senkung  $BD$  oder  $MP$  des Punktes  $B$ ;
  - $\omega$  den Winkel, welchen die Tangente im Punkte  $B$  der Curve mit der Horizontalen bildet;
  - $e$  und  $q$  behalten die Bedeutungen, welche dafür im §. 359 angegeben wurden.

Die Componenten der Belastung  $2pa'$ , welche die auf die Stützen wirkenden Kräfte repräsentiren, sind für  $M$  und  $M'$  respective

$$pa' \cdot \frac{a+z}{a} \text{ und } pa' \cdot \frac{a-z}{a}.$$

Jeder Theil  $BM$ ,  $BM'$  des Stabes wird aber auf dieselbe Weise gebogen, als ob derselbe in dem Punkte  $B$  festgehalten, in der einen Richtung von den in  $BN$ ,  $BN'$  angebrachten Gewichten, und in der entgegengesetzten Richtung von den eben genannten, in  $M$ ,  $M'$  thätigen Kräften sollicitirt würde. Man hat daher zuerst für alle Punkte zwischen  $B$  und  $N$  (nach den §§. 87, 89 und 90.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x) - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2}{2} - a'x + \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2x}{2} - \frac{a'x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} + \tan \omega,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^2x^2}{4} - \frac{a'x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} + x \tan \omega;$$

und setzt man in den beiden letzten Gleichungen  $x = a'$ , so erhält man die dem Punkte  $N$  entsprechenden Werthe, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) a' - \frac{a'^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^3}{6} + \tan \omega,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{a'^2}{2} - \frac{a'^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^4}{8} + a' \tan \omega.$$

Darauf hat man für alle Punkte zwischen  $N$  und  $M$ , wenn man die Constanten so bestimmt, daß für  $x = a'$  die Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  mit dem vorhin gefundenen übereinstimmen,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} (a-z-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z)x - \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a'^3}{6} + \tan \omega,$$

$$y = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{a+z}{a} \left\{ (a-z) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3x}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} + x \tan \omega.$$

Setzt man in der letzten Gleichung  $x = a - z$ , so erhält man

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a+z)(a-z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3(a-z)}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} + (a-z) \tan \omega;$$

Wiederholt man die gleichen Operationen für den Theil  $BM'$  des Stabes, so findet man

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(a-z)(a+z)^3}{3a} - \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a'^3(a+z)}{6} - \frac{a'^4}{24} \right\} - (a+z) \tan \omega;$$

und durch Elimination erhält man aus diesen beiden Gleichungen

$$\tan \omega = \frac{pa'}{\varepsilon} \cdot \frac{(4a^2 - 4z^2 - a'^2)z}{6a};$$

$$f = \frac{pa'}{\varepsilon} \left\{ \frac{(2a^2 - 2z^2 - a'^2)(a^2 - z^2)}{6a} + \frac{a'^3}{24} \right\}.$$

§. 363. Die Gleichungen der Theile  $BN$ ,  $NM$  der Curve erhält man, wenn man in die obigen Ausdrücke für  $y$ , welche diesen Theilen entsprechen, den eben gefundenen Werth von  $\tan \omega$  setzt. Die Ausdrücke für  $y$ , welche den Theilen  $BM'$ ,  $N'M'$  entsprechen, sind denen für  $BN$ ,  $NM$  ähnlich; man erhält sie aus die-

sen, wenn man  $a + z$  in  $a - z$  verwandelt, und umgekehrt. Man kennt also gleichfalls die Gestalt des Theiles  $BM'$  des Stabes. Den Krümmungsspiel der Curve (die größte Durchbiegung) findet man auf die in §. 360 angegebene Weise.

§. 364. In dem Punkte  $B$  ist die Krümmung und deshalb die Neigung zum Bruche am größten. Die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches werden, in Uebereinstimmung mit §. 356, durch die Gleichung ausgedrückt

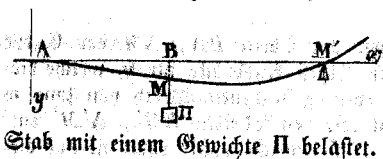
$$Q = pa \left( \frac{a^2 - z^2}{a} - \frac{a'}{2} \right).$$

§. 365. Die vorhergehenden Beispiele zeigen hinreichend, wie man die Gleichgewichtsbedingungen für einen horizontal auf zwei Stützen gelegten Stab findet, wenn derselbe auf eine beliebige Weise belastet ist. Der Punkt, in welchem die Neigung zum Bruche am größten ist und den man als den festgehaltenen Punkt (point d'encastrement) anzusehen hat, liegt stets in der Verticalen, welche durch den Schwerpunkt der Gewichte geht, mit denen der Stab belastet ist. Nachdem man die Bruchstelle, so wie die auf die Stützen wirkenden Kräfte bestimmt hat, muß man so viele Differentialgleichungen der zweiten Ordnung bilden, wie sich zu beiden Seiten der Bruchstelle Theile befinden, deren Gleichgewichtsbedingungen sich nicht durch dieselbe Formel ausdrücken lassen. Die Constanten, welche durch die Integrationen hinzukommen, bestimmt man so, daß die Ordinate und die Neigung der Tangente für den gemeinschaftlichen Punkt zweier auf einander folgenden Theile dieselben Werthe erhalten.

Die Gleichung, welche die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall des Bruches ausdrückt, erhält man, wenn man  $Q$  gleich dem Werthe von  $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2}$  setzt, welcher der Bruchstelle entspricht, d. h. gleich dem auf diesen Punkt bezogenen Momente der Kräfte, welche auf den Stab in dem einen oder dem andern der beiden Theile wirken, welche durch die Bruchstelle getrennt werden.

**Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, dessen eines Ende festgehalten wird, während das andere Ende auf einer Stütze frei aufliegt.**

§. 266. Man denke sich den Stab  $AMM'$  (Fig. 57) mit dem Ende  $A$  horizontal festgehalten, während das andere Ende  $M'$  auf einer Stütze liegt, die sich mit  $A$  in derselben Horizontalen befindet; in  $M$  sei der Stab mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet. Man nenne



$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$a'$  die Entfernung  $AM'$ ;

$\Pi'$  den Druck auf die Stütze  $M'$ ;

$\varepsilon$  und  $q$  behalten die Bedeutungen, welche in §. 359 dafür angegeben sind.

Für den Theil  $AM$  des Stabes hat man zuerst

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a-x) - \Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.$$

Für den Theil  $MM'$  hat man sodann, wenn man die Constanten so bestimmt, daß für  $x=a$  die Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  dieselben werden, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -\Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \frac{a^2}{2} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\varepsilon y = \left\{ \frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.$$

§. 367. Da dieser letzte Ausdruck für  $y$  gleich Null werden muß, wenn  $x=a'$  ist, so hat man

$$\Pi' = \Pi \frac{a^2(3a'-a)}{2a'^3}$$

als den Druck auf die Stütze  $M'$ . Substituirt man diesen Werth in die vorhergehenden Gleichungen, so erhält man für die Abscisse des Punktes, dessen Ordinate ein Maximum ist

$$a' \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}} \right\};$$

und für die Ordinate selbst, oder für den Krümmungsseil (die größte Durchbiegung) des Stabes

$$\frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{6} (a'-a) \sqrt{\frac{a'-a}{3a'-a}}.$$

§. 368. Der Stab neigt sich nothwendig dahin, in dem Punkte  $A$  oder in  $M$  zu brechen. Für den Punkt  $A$  hat man

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi a - \Pi' a' = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2};$$

und für den Punkt  $M$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -\Pi'(a'-a) = -\Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3}.$$

Das Gleichgewicht für den Augenblick des Bruches wird durch diejenige der beiden Gleichungen

$$Q = \Pi \frac{a(2a'-a)(a'-a)}{2a'^2},$$

$$Q = \Pi \frac{a^2(3a'-a)(a'-a)}{2a'^3},$$

ausgedrückt, deren rechte Seite den größten Werth hat. Die Bruchstelle ist in  $A$ , wenn die Entfernung  $AB$  sehr klein ist, in  $M$  hingegen, wenn  $AB$  wenig von  $AM'$  verschieden ist.

§. 369. Wirkt das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte von  $AM'$ , so hat man  $a' = 2a$ , und wenn man  $2P$  für  $\Pi$  schreibt, so erhält man

$$\Pi' = \frac{5}{8}P$$

als den Druck auf die Stütze. Die Abscisse des Punktes, deren Ordinate im Maximum ist, ist dann

$$2a \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right\};$$

und die Ordinate selbst,

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{3\sqrt{5}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem in §. 87 gefundenen, so sieht man, daß die von demselben Gewichte hervorbrachte größte Durchbiegung nur  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  derjenigen beträgt, welche eingetreten sein würde, wenn der Stab mit beiden Enden frei auf Stützen gelegen hätte.

Die Ordinate des mittelften Punktes, in welchem das Gewicht wirkt, ist  $\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{7a^3}{48}$ , d. h.  $\frac{7}{16}$  derjenigen, welche in dem eben erwähnten Falle stattfindet.

§. 370. Bei der Annahme, daß das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte von  $AM'$  wirkt, ist die Bruchstelle in  $A$  und aus dem ersten Werthe für  $Q$  in §. 368 erhält man

$$Q = P \frac{3a}{4}.$$

Lägen beide Enden frei auf zwei Stützen, so hätte man  $q = Pa$ . Wird daher das eine Ende festgehalten (eingemauert), so ist das Tragvermögen des Stabes in dem Verhältnisse von 4 zu 3 größer.

**Gleichgewicht eines mit einem Gewichte belasteten Stabes, der an beiden Enden festgehalten wird.**

§. 371. Man denke sich den Stab  $AMM'$  (Fig. 58) in  $M$  mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet und an den beiden

Fig. 58. Enden  $A$  und  $M'$  horizontal festgehalten (eingemauert), und beachte, daß in Folge dieser Befestigung die Richtung der Tangente an die Curve für die genannten Punkte stets horizontal bleiben muß. Man wird an dem Gleichgewichtszustande des Stabes  $AM'$  nichts ändern, wenn man sich diese Wirkung dadurch hervorgebracht denkt, daß der Stab in  $M'$  frei auf einer Stütze liegt, über  $M'$  hinaus bis  $M''$  verlängert und in  $M''$  mit einem Gewichte belastet ist, dessen Werth entsprechend bestimmt worden. Nach diesen Vorbemerkungen nenne man

- $a$  die Entfernung  $AB$ ;
- $a'$  die Entfernung  $AM'$ ;
- $a''$  die Entfernung  $AB''$ ;
- $\Pi'$  den Druck auf die Stütze  $M'$ ;
- $\Pi''$  das Gewicht, welches an dem Ende  $M''$  wirkt;
- $\varepsilon$  und  $q$  behalten die Bedeutungen, welche dafür in §. 359 angegeben sind.

Für den Theil  $AM$  des Stabes hat man zuerst

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} &= \Pi(a-x) - \Pi'(a'-x) + \Pi''(a''-x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= \Pi(ax - \frac{1}{2}x^2) - \Pi'(a'x - \frac{1}{2}x^2) + \Pi''(a''x - \frac{1}{2}x^2), \\ \varepsilon y &= \Pi(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}x^3) - \Pi'(\frac{1}{2}a'x^2 - \frac{1}{6}x^3) + \Pi''(\frac{1}{2}a''x^2 - \frac{1}{6}x^3).\end{aligned}$$

Für den Theil  $MM'$  hat man sodann, wenn man die Constanten so bestimmt, daß  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  dieselben Werthe erhalten, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} &= -\Pi'(a'-x) + \Pi''(a''-x), \\ \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -\Pi' \cdot \frac{1}{2}a'^2 - \Pi'(a'x - \frac{1}{2}x^2) + \Pi''(a''x - \frac{1}{2}x^2), \\ \varepsilon y &= \Pi'(\frac{1}{2}a'^2x - \frac{1}{6}a'^3) - \Pi'(\frac{1}{2}a'x^2 - \frac{1}{6}x^3) + \Pi''(\frac{1}{2}a''x^2 - \frac{1}{6}x^3).\end{aligned}$$

§. 372. Der Quotient  $\frac{dy}{dx}$  und die Ordinate müssen in dem

Punkte  $M'$ , für welchen  $x = a'$  ist, gleich Null werden, man hat daher

$$0 = \Pi \cdot \frac{1}{2} a^2 - \Pi' \cdot \frac{1}{2} a'^2 + \Pi'' (a'a'' - \frac{1}{2} a'^2),$$

$$0 = \Pi (\frac{1}{2} a^2 a' - \frac{1}{6} a^3) - \Pi' \cdot \frac{1}{3} a'^3 + \Pi'' (\frac{1}{2} a'^2 a' - \frac{1}{6} a'^3);$$

woraus folgt

$$\Pi = \Pi \frac{a^2(aa' - 2aa'' - 2a'^2 + 3a'a')}{a^3(a'' - a')}, \quad \Pi' = \Pi \frac{a^2(a' - a)}{a^2(a'' - a')}.$$

Setzt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen, so erhält man die Gestalt der Curve, welche der Stab bildet.

§. 373. Wirkt das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte von  $AM'$ , so hat man  $a' = 2a$ , und

$$\Pi' = \Pi \frac{2a'' - 3a}{4(a'' - 2a)}, \quad \Pi'' = \Pi \frac{a}{4(a'' - 2a)}.$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen und schreibt  $2P$  für  $\Pi$ , so erhält man zur Bestimmung der Gestalt der ersten Hälfte des Stabes

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P \left\{ \frac{a}{2} - x \right\},$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = P \left\{ \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\varepsilon y = P \left\{ \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right\}.$$

Sucht man die Gleichungen für die zweite Hälfte des Stabes, so findet man, daß die zweite Hälfte der ersten symmetrisch sein muß. Die Ordinate in der Mitte der Curve oder der Krümmungsspeil (die größte Durchbiegung) ist

$$\frac{P}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{12};$$

vergleicht man dieses Resultat mit dem in §. 87 erhaltenen, so sieht man, daß die Durchbiegung nur  $\frac{1}{4}$  so groß ist, wenn beide Enden festgehalten (eingemauert) werden, als sie sein würde, wenn die Enden frei auf Stützen lägen.

§. 374. Bei der Voraussetzung, daß das Gewicht  $\Pi$  oder  $2P$  in der Mitte wirkt, ist die Krümmung des Stabes an den beiden Endpunkten und in der Mitte am größten, und der Stab wird daher an diesen drei Punkten zu gleicher Zeit brechen, wofern der Bruch überhaupt eintritt. Das Gleichgewicht für den Fall des Bruches wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$q = P \cdot \frac{a}{2},$$

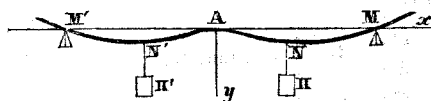


so, daß der Stab eine doppelt so große Tragkraft besitz, als er besitzn würde, wenn die Enden frei auf Stützen lägen. 1)

### Gleichgewicht eines von drei oder mehr Stützen getragenen Stabes.

§. 375. Wird ein unbiegsamer, mit Gewichten belasteter Stab von mehr als zwei Stützen getragen, so sind die Belastungen, welche auf jede einzelne Stütze kommen, innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Die Grenzen lassen sich stets vermittlest der Principien der Statik bestimmen. Nimmt man aber den Stab als elastisch an, so hört die Unbestimmtheit gänzlich auf. Wir werden hier nur die einfachsten Fragen dieser Art untersuchen.

Man denke sich den Stab  $MM'$  (Fig. 59) horizontal auf drei Stützen gelegt, von denen sich die eine in der Mitte  $A$  der Länge des Stabes, die andern beiden aber an den Enden  $M, M'$  befinden.



Jede Hälfte des Stabes werde in der Mitte  $N, N'$  mit einem Gewichte  $\Pi, \Pi'$  belastet. Man sucht die Gestalt des Stabes nach der Biegung und den Druck auf jeden Stützpunkt. Man nenne

$a$  die halbe Länge  $AM$  oder  $AM'$  des Stabes;

$p, q, q'$  die in  $A, M, M'$  wirkenden Kräfte;

$\omega$  den Winkel, welchen die Tangente in dem Punkte  $A$  der Curve mit der Arc  $Ax$  bildet;

$\varepsilon$  und  $q$  behalten die Bedeutungen welche in §. 359 dafür angegeben sind.

Nach den Lehren der Statik muß 1) die Summe der Gewichte  $\Pi, \Pi'$  gleich der Summe der auf die Stützpunkte wirkenden Kräfte sein; und 2) muß die Summe der Momente aller Kräfte, bezogen auf einen beliebigen Punkt, z. B. den Punkt  $A$ , gleich Null sein. Man hat zuerst die beiden Gleichungen

$$\Pi + \Pi' = p + q + q', \quad \Pi - \Pi' = 2(q - q').$$

1) Dieses Resultat wird allgemein angenommen, wenn man auch auf verschiedene Weise zu demselben gelangt; allein Barlow hat es verworfen und giebt in seinem Essay on the strength and stress of timber, pag. 132 das Verhältniß 3: 2 statt 2: 1 an. Der Satz, auf welchem Barlow sich stützt und den man pag. 115 des Essay etc. findet, ist aber ungenau und widerspricht der Erfahrung. Man wird einsehen, daß es schwer ist, bei Versuchen die Hypothese über die (horizontale) Befestigung der beiden Enden des Stabes zu erfüllen. Zu diesem Zwecke muß der Stab auf beiden Seiten ziemlich weit über die Stützen hinausreichen. Die Ausdrücke für  $\Pi$  und  $\Pi'$  zeigen in der That an, daß die auf die festen Punkte wirkenden Kräfte sich dem unendlich Großen nähern, wenn die Verlängerung des Stabes gleich Null wird. Man kann über diesen Gegenstand die Versuche nachsehen, welche man in dem Traité du mouvement des eaux, der Oeuvres de Mariotte, tome II, pag. 466, mitgetheilt findet.

§. 376. Zieht man sodann den Stab als in  $A$  festgehalten (eingemauert) an, so hat man für den Theil  $AN$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \left\{ \frac{a}{2} - x \right\} - q(a-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \left\{ \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} \right\} - q \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + \varepsilon \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right\} - q \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \cdot \varepsilon \tan \omega.$$

Für den Theil  $NM$  hat man ferner, wenn man die Constanten so bestimmt, daß man für  $x = \frac{a}{2}$  dieselben Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und  $y$  erhält, wie in den vorhergehenden Gleichungen,

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -q(a-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -q \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + \Pi \cdot \frac{a^2}{8} + \varepsilon \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = -q \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + \left\{ \Pi \cdot \frac{a^2}{8} + \varepsilon \tan \omega \right\} x - \Pi \cdot \frac{a^3}{48}.$$

Die Gleichungen für die Theile  $AN'$  und  $N'M'$  wird man aus den vorhergehenden erhalten, wenn man darin  $\Pi$  für  $\Pi'$ ,  $q$  für  $q'$  schreibt und das Zeichen von  $\tan \omega$  ändert. Beachtet man sodann, daß die Gleichungen für  $NM$  und  $N'M'$  den Werth  $y = 0$  geben müssen, wenn man  $x = a$  setzt, so erhält man die beiden Gleichungen

$$0 = -q \frac{a^2}{3} + \Pi \frac{5a^2}{48} + \varepsilon \tan \omega,$$

$$0 = -q' \frac{a^2}{3} + \Pi' \frac{5a^2}{48} - \varepsilon \tan \omega.$$

§. 377. Vermittelt dieser beiden Gleichungen und aus denen des §. 375 findet man

$$\tan \omega = \frac{\Pi - \Pi'}{\varepsilon} \cdot \frac{a^2}{32},$$

$$p = \frac{22\Pi + 22\Pi'}{32}$$

$$q = \frac{13\Pi - 3\Pi'}{32},$$

$$q' = \frac{-3\Pi + 13\Pi'}{32};$$

und durch Substitution dieser Werthe in die obigen Gleichungen ergibt sich die Gestalt des Stabes. Man sieht, daß der Stützpunkt  $A$  allein sehr nahe an  $\frac{2}{3}$  der gesammten Belastung des

Stabes zu tragen hat. Der Druck auf die Stützpunkte ist von  $z$  unabhängig, so daß dieser bei mehr oder weniger biegsamen Stäben derselbe bleibt.

§. 378. Die Neigung zum Bruche ist nothwendiger Weise an einem der Punkte  $A$ ,  $N$ ,  $N'$  am größten. Für den Punkt  $A$  hat man

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \frac{a}{2} - qa = \left\{ 3\Pi + 3\Pi' \right\} \frac{a}{32};$$

für den Punkt  $N$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -q \frac{a}{2} = - \left\{ 13\Pi - 3\Pi' \right\} \frac{a}{64};$$

und für den Punkt  $N'$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -q' \frac{a}{2} = - \left\{ -3\Pi + 13\Pi' \right\} \frac{a}{64}.$$

Die Gleichgewichtsbedingung für den Fall des Bruches wird durch diejenige der folgenden drei Gleichungen

$$q = \left\{ 3\Pi + 3\Pi' \right\} \frac{a}{32},$$

$$q = \left\{ 13\Pi - 3\Pi' \right\} \frac{a}{64},$$

$$q = \left\{ -3\Pi + 13\Pi' \right\} \frac{a}{64},$$

ausgedrückt, deren rechte Seite den größten Werth hat.

§. 379. Nimmt man die Gewichte  $\Pi$  und  $\Pi'$  als einander gleich an, so erhält man

$$\text{tang } \omega = 0, \quad p = \frac{22\Pi}{16}, \quad q = q' = \frac{5\Pi}{16}.$$

§. 380. Bei der nämlichen Annahme ist die Bruchstelle des Stabes in  $A$  und das Gleichgewicht gegen den Bruch wird durch die Gleichung

$$q = \frac{3\Pi a}{16}$$

ausgedrückt. Jede Hälfte des Stabes ist alsdann in derselben Lage, als ob sie an dem einen Ende horizontal festgehalten würde, während das andere Ende auf einer Stütze ruht. In der That stimmt das eben erhaltene Resultat mit dem des §. 370 überein, wenn man  $2P$  für  $\Pi$  und  $2a$  für  $a$  schreibt.

# **Bemerkungen über die Benützung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.**

§. 381. Die in diesem Kapitel gewonnenen Resultate können dazu dienen, die Biegung horizontal belasteter Stäbe zu bestimmen. Für  $\varepsilon$  hat man dabei die Werthe des Elastizitätsmomentes zu setzen, welche in §. 81 und folgd. angegeben sind. Ist z. B. der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, so hat man  $E \frac{bc^3}{12}$  für  $\varepsilon$  zu setzen.

Den Werth  $E$  findet man aus den in §. 94 u. folgd. aufgeführten Versuchen. Man erhält so die Biegung des Stabes durch die Dimensionen desselben ausgedrückt.

§. 382. Die obigen Resultate können gleichfalls dazu dienen, die Belastungen, welche den Bruch der Stäbe verursachen würden, oder die größten Belastungen, welche für die Theile einer Construction zulässig sind, zu bestimmen. Für  $q$  hat man dabei die Werthe des Bruchmomentes zu setzen, welche in §. 115 u. folgd. angegeben sind. Ist z. B. der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, so hat man  $R \frac{bc^2}{6}$  für  $q$  zu setzen. Sucht man nun die Belastungen, welche den Bruch verursachen würden, so legt man  $R$  die Werthe bei, welche aus den in §. 130 u. folgd. aufgeführten Versuchen folgen; sucht man aber die größten Belastungen, welche für die Theile einer Construction zulässig sind, so legt man  $R$  die Werthe bei, welche in den §§. 181, 182 und 186 angegeben sind.

## **Zweites Kapitel.**

### **Widerstand eines verticalen, prismatischen Stabes, dessen obere Endfläche belastet wird.**

§. 383. Man betrachte einen Stab  $AM$  (Fig. 60), der mit Fig. 60. seiner untern Endfläche  $A$  auf einer festen Horizontalebene steht, während die obere Endfläche, die sich mit der untern in derselben Verticalen befindet, mit einem Gewichte  $Q$  belastet ist. Es handelt sich um die Gesetze der Biegung, welche der Stab durch die Wirkung des Gewichtes annimmt. Man nenne

- $a$  die Entfernung  $AM$  der beiden Endflächen von einander;
- $s$  die Länge  $AmM$  des Stabes;
- $\omega$  den Flächeninhalt des Querschnittes des Stabes;



$x, y$  die Abscisse  $Ap$  und die Ordinate  $pm$  eines beliebigen Punktes der Curve, welchen die Arc des Stabes bildet;  
 $\varepsilon$  und  $Q$  behalten die Bedeutungen, welche dafür in §. 359 angegeben sind;

Die Gleichung, welche die Gleichgewichtsbedingungen ausdrückt, wird stets aus dem Principe abgeleitet, daß in jedem Punkte der Arc des Stabes das Moment des Widerstandes gegen die Biegung dem Momente der auf den Stab wirkenden Kräfte gleich sein muß, wenn dieses auf denselben Punkt bezogen wird. Beachtet man, daß die Curve, welche diese Arc bildet, ihre concave Seite der Abscissenaxe zukehrt (und der Krümmungshalbmesser also mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden muß), so erhält man für das Gleichgewicht die Gleichung

$$-\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = Qy,$$

deren vollständiges Integral <sup>1)</sup>

$$y = A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x + B \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x,$$

ist, wenn  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Da für  $x=0$  auch  $y=0$  werden muß, so ist die Constante  $B=0$ . Die Constante  $A$  ist offenbar die größte Ordinate der Curve, wir wollen dieselbe durch  $f$  bezeichnen. Man kann also schreiben

$$y = f \cdot \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x.$$

§. 384. Es muß  $y=0$  sein, wenn  $x=a$  ist. Wenn nun  $f$  nicht Null ist, so muß nothwendiger Weise

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot a = i\pi \quad \text{und} \quad Q = i^2 \pi^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$$

sein, wo  $i$  eine beliebige ganze Zahl und  $\pi$  das Verhältniß des Kreisumfangs zum Durchmesser bezeichnet. Der auf solche Weise bestimmte Werth des Gewichtes  $Q$ , welches den Stab in der gebogenen Form erhalten kann, ist dem Quadrate der Länge des Stabes proportional, wenn alle übrigen Verhältnisse dieselben bleiben.

§. 385. Setzt man den Werth für  $Q$  in die obige Gleichung, in welcher die Pfeilhöhe  $f$  noch unbestimmt ist, so erhält man

1) Navier-Wittstein, §. 435.

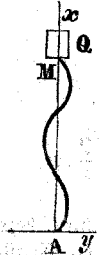
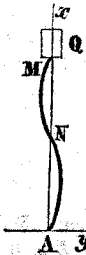
$$y = f \sin i \pi \cdot \frac{x}{a},$$

$$s = a \left\{ 1 + \left[ \frac{i \pi f}{2a} \right]^2 \right\},$$

$$f = \frac{2}{i \pi} \sqrt{a(s-a)}.$$

§. 386. Setzt man für  $i$  nach einander die ganzen Zahlen 1, 2, 3 etc., so repräsentirt die obige Gleichung Curven von verschiedener Gestalt. Fig. 60 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 1$  und  $Q = \pi^2 \frac{E}{a^2}$  ist. Fig. 61 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 2$

Fig. 61. Fig. 62.



und  $Q = 4 \pi^2 \frac{E}{a^2}$  ist; diese Gestalt würde ein Stab annehmen, dessen Mittelpunkt  $N$  gezwungen würde, in der Verticalen zu bleiben, welcher durch die beiden Endpunkte geht. Fig. 62 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 3$  und  $Q = 9 \pi^2 \frac{E}{a^2}$  ist; diese Gestalt würde ein Stab annehmen, von dem die Punkte, welche im ersten und zweiten Drittel der Länge desselben liegen, gezwungen würden, in der Verticalen zu bleiben, welche durch die beiden Endpunkte geht. Die übrigen Fälle ergeben sich auf ähnliche Weise.

§. 387. Bei einem Stabe, der in der Richtung seiner Länge von einer Kraft zusammengedrückt und dadurch sehr wenig gebogen wird, muß man beachten: 1) daß die Längensfasern, wenn man sich die Kraft  $Q$  gleichförmig auf der ganzen Querschnittsfläche vertheilt denkt, einen Druck  $\frac{Q}{\omega}$  auf jeder Flächeneinheit erleiden und dadurch um den Bruch  $\frac{Q}{E\omega}$  ihrer Länge verkürzt werden (indem  $E$  die in §. 77 angegebene Bedeutung hat); 2) daß in Folge der Biegung die Fasern auf der concaven Seite verlängert und auf der convexen Seite verkürzt werden, und zwar um einen Theil ihrer Länge, der (nach §. 77) für eine beliebige Faser sich durch den Bruch  $v \frac{d^2y}{dx^2}$  ausdrücken läßt. Da die beiden in Rede stehenden Wirkungen zu gleicher Zeit erfolgen, so ist die größte Zusammendrückung, welche eine Faser erleiden kann,

$$\frac{Q}{E\omega} + v \frac{d^2y}{dx^2};$$

wenn man mit  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtslaxe von derjenigen Faser bezeichnet, welche am weitesten von ihr entfernt ist, und für  $\frac{d^2y}{dx^2}$  den größten Werth nimmt, welchen dieser Differentialquotient annehmen kann.

Da, in Uebereinstimmung mit §. 354, die größte zulässige Belastung eines Stabes durch den Grad der Ausdehnung oder Zusammendrückung bestimmt wird, welchen die Fasern durch die Wirkung der Belastung erleiden, so ergibt sich, wenn (nach §. 181)  $R'$  die größte zulässige Belastung der Flächeneinheit bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{R}{E} = \frac{Q}{E_0} + v' \frac{d^2y}{dx^2},$$

welche im Allgemeinen die zulässige Belastung eines Stabes bestimmt, wie man dies in den folgenden Kapiteln sehen wird.

§. 388. In dem besondern Falle, um welchen es sich hier handelt, läßt sich die Berechnung der zulässigen Belastung nicht ausführen, weil die Durchbiegung  $f$  unbestimmt bleibt und man deshalb keine Relation zwischen  $\frac{d^2y}{dx^2}$  und  $Q$  erhält. Dies gilt ebenfalls für die Gleichgewichtsfälle, welche wir in den folgenden Paragraphen untersuchen werden. Am Ende dieses Kapitels wird eine Methode angegeben werden, nach welcher sich der Widerstand vertical stehender Stäbe für die Praxis berechnen läßt.

**Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben frei ist.**

§. 389. Behält man die Benennungen aus §. 383 bei, so Fig. 63. erhält man in diesem Falle (welchen Fig. 63 darstellt)



$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = Q(f - y),$$

wo  $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes bezeichnet. Das vollständige Integral ist

$$y = f + A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x + B \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x,$$

wo  $A$  und  $B$  wieder die beiden willkürlichen Constanten bezeichnen. Da für  $x=0$  auch  $y=0$  und  $\frac{dy}{dx}=0$  sein muß, so ist die Constante  $A=0$  und  $B=-f$ . Die Gleichung der Curve ist demnach

$$y = f \left\{ 1 - \cos \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot x \right\}.$$

§. 390. Für  $x = a$  muß  $y = f$  werden; daher

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot a = \frac{(2i+1)\pi}{2}, \text{ woraus } Q = \frac{(2i+1)^2 \pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

§. 391. Aus der Gleichung der Curve wird

$$y = f \left\{ 1 - \cos \frac{(2i+1)\pi}{2} \cdot \frac{x}{a} \right\},$$

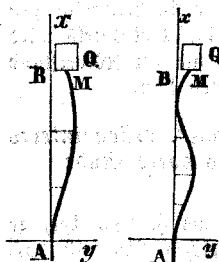
woraus man erhält

$$s = a \left\{ 1 + \left( \frac{(2i+1)\pi \cdot f}{2 \cdot 2a} \right)^2 \right\},$$

$$f = \frac{2 \cdot 2}{(2i+1)\pi} \sqrt{a(s-a)}.$$

§. 392. Fig. 63 stellt den Fall dar, in welchem  $i=0$  und  $Q = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist. Fig. 64 stellt den Fall dar, in welchem  $i=1$

Fig. 64. Fig. 65. und  $Q = \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist; die Ordinaten der Punkte, welche im ersten und zweiten Drittel der Länge des Stabes liegen, sind respective  $f$  und  $2f$ . Fig. 65 stellt den Fall dar, in welchem  $i=2$  und  $Q = \frac{25\pi^2}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist; die



Ordinaten der Punkte, welche im ersten und dritten Fünftel der Länge des Stabes liegen, sind gleich  $f$ ; diejenige des Punktes, welcher im zweiten Fünftel liegt, ist gleich  $2f$ , und diejenige des Punktes, welcher im vierten Fünftel liegt, ist gleich Null. Die übrigen Fälle ergeben sich auf ähnliche Weise.

Bei gleicher Länge eines Stabes beträgt das Gewicht, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 63 dargestellten Weise zu biegen, nur ein Viertel von demjenigen, dessen man bedarf, um den Stab in der von Fig. 60 dargestellten Weise zu biegen.

**Gleichgewicht eines vertical belasteten Stabes, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das obere Ende desselben gezwungen wird, mit dem untern in derselben Verticalen zu bleiben.**

§. 393. In diesem Falle ist die Gleichgewichtsgleichung dieselbe, wie in §. 383. Dieser Gleichung kann aber bei der Be-



dingung, daß für  $x = 0$  auch zu gleicher Zeit  $y = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$  werde, kein Genüge geschehen, und es folgt daraus, daß ein Stab, wie in dem Falle, warum es sich hier handelt, nicht gebogen werden kann. Nimmt man aber an, daß das Gewicht  $Q$ , anstatt in der Richtung der Ase des Stabes zu wirken, in einer Entfernung  $f$  von dieser Ase wirke (Fig. 66), welche Entfernung Fig. 66. man sich beliebig klein denken mag, so ist die Gleichgewichtsgleichung dieselbe, wie in §. 389, und der Werth von  $y$  wird durch die in diesem Paragraphen gesundene Gleichung ausgedrückt.



Da aus dieser Gleichung  $y = 0$  folgen muß, wenn  $x = a$  ist, so hat man hier

$$\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cdot a = 2i\pi, \text{ woraus } Q = 4i^2 \pi^2 \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y = f \left\{ 1 - \cos 2i\pi \cdot \frac{a}{x} \right\};$$

wobei zu beachten ist, daß aus dieser Gleichung für  $x = a$  gleichfalls  $\frac{dy}{dx} = 0$  folgt, so daß die Tangente der Curve sowohl am obern als am untern Ende nothwendig vertical ist. Die Fig. 66 stellt den Fall dar, in welchem  $i = 1$  also  $Q = 4\pi^2 \cdot \frac{\varepsilon}{a^2}$  ist; die Ordinate des Mittelpunktes oder die Durchbiegung ist gleich  $2f$ . Der Werth des Gewichtes  $Q$  beträgt das Vierfache des Werthes, welcher stattfinden würde, wenn das Gewicht in der Richtung der Ase des Stabes wirkte und die beiden Enden nicht gezwungen wären, in derselben Verticalen zu bleiben.

Der durch Fig. 66 dargestellte Stab befindet sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie die vier unteren Fünftel des durch Fig. 65 dargestellten Stabes; setzt man wirklich  $\frac{4}{5} a$  für  $a$  in den obigen Ausdruck für  $Q$ , so erhält man den in §. 392 für den Fall der Fig. 65 angegebenen Werth.

### Versuche über den Widerstand vertical belasteter Holzstäbe.

§. 394. Mittelwerthe aus den Versuchen von Aubry<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Eichenholz, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) Mémoire sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pag. 33.

Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnittes	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Biegung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
30 $\frac{1}{2}$	30 $\frac{1}{2}$	Pfund	Pfund
18	$\frac{1}{2}$	80	205
36	$\frac{1}{2}$	20	54
18	1	534	638

§. 395. Resultate der Versuche von Girard<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Eichenholz, deren obere Endfläche belastet wurde.

Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Erste Durch- biegung, welche beobachtet wurde	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Biegung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Meter	Meter	Meter	Meter	Kilogramm	Kilogramm
2,6	0,158	0,128	0,0068	17321	
2,6	0,162	0,106	0,0056	11994	42514
2,6	0,158	0,102		11992	
2,6	0,133	0,099	0,0079	11993	
2,6	0,131	0,106	0,0068	11997	22931
2,27	0,156	0,131	0,0028	22939	
2,27	0,158	0,129		17317	
2,27	0,156	0,104	0,0062	17320	33120
2,27	0,158	0,102	0,0068	17322	28626
2,27	0,126	0,102	0,0079	11999	
1,95	0,156	0,133	0,0079	17322	
1,95	0,158	0,102	0,0056	17321	
1,95	0,16	0,102	0,0045	11974	32997
1,95	0,133	0,106	0,0056	17295	
1,95	0,126	0,108	0,0056	11998	
2,27	0,158	0,108	0,0029	11999	
2,6	0,158	0,135	0,0051	11999	37305
2,6	0,158	0,131	0,0045	11997	
2,6	0,187	0,158	0,0023	11998	
2,6	0,189	0,158	0,0023	11998	

Die Stäbe bogen sich in der Regel nach beiden Seiten; in der Tabelle ist die größte von den beiden Durchbiegungen aufgeführt, welche zuerst beobachtet wurden.

§. 396. Mittlere Resultate der Versuche von Lamandé<sup>2)</sup> mit vertical gestellten Stäben von ziemlich trockenem Eichenholz aus der Champagne, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance, pag. 139 u. Tab. I.

2) Traité de la construction des ponts, par Gauthey, tome II, pag. 48.

Länge der Stäbe	Seite des quadratischen Querschnittes	Erste Durch- biegung, welche beobachtet wurde	Belastung, bei welcher sich zuerst eine Bie- gung zeigte	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Meter	Meter	Meter	Kilogramm	Kilogramm
0,649	0,054	0,0017	5369	8861
1,298	0,054	0,0037	2863	5693
1,948	0,054	0,0045	1325	3559
0,649	0,081	0,0015	18129	23163
1,298	0,081	0,005	9246	16465
1,948	0,081	0,0042	4793	11619
0,649	0,108	0,0014	27211	40921
1,298	0,108	0,0015	21488	40495
1,948	0,108	0,005	9663	27629

§. 397. Mittlere Resultate der Versuche von Rondelet<sup>1)</sup> mit vertical gestellten Stäben, deren obere Endfläche belastet wurde. Sämmtliche Stäbe hielten einen Zoll ins Gevierte.

Art des Holzes.	Länge der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Zoll	Pfund
Eichenholz . . . . .	1	6346
	12	5310
	24	2911
	36	2163
Tannenholz . . . . .	1	7490
	12	6355
	24	3429
	36	2575

Gestützt auf diese Versuche giebt der Experimentator die folgende Regel. Nimmt man als Einheit die Kraft an, durch welche ein Würfel zerdrückt wird, und die bei Eichenholz 44 Pfd. und bei Tannenholz 52 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes beträgt (§. 12), so erhält man für die Kraft, durch welche ein Prisma gebogen und zerbrochen wird, dessen Höhe gleich

dem 12fachen der Dicke ist . . .  $\frac{5}{6}$   
 " 24 " " " " . . .  $\frac{1}{2}$   
 " 36 " " " " " . . .  $\frac{1}{3}$   
 " 48 " " " " " . . .  $\frac{1}{6}$   
 " 60 " " " " " . . .  $\frac{1}{12}$   
 " 72 " " " " " . . .  $\frac{1}{24}$ .

Nach dem nämlichen Experimentator kann ein vertical belasteter

1) Art de bâtir, tome I, pag. 233.

Holzstab durch eine Biegung nachgeben, wenn die Länge das Zehnfache der Seite des quadratischen Querschnittes übertrifft.

### Versuche über den Widerstand vertical belasteter Stäbe aus Schmiedeeisen.

398. Die folgenden Versuche mit vertical gestellten Stäben aus Schmiedeeisen, deren obere Endfläche man belastete, wurden in Paris in der Schule für Brücken- und Wegbau (Ecole des ponts et chaussées) angestellt. <sup>1)</sup>

Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
Metre	Millimetre	Millimetre	Kilogramm
0,244	20,3	20,3	10426
0,325	20,3	20,3	8454
0,258	20,3	20,3	10216
0,325	13,5	13,5	3951

§. 399. Rondelet <sup>2)</sup> giebt, gestützt auf sehr viele von ihm angestellte Versuche mit Stäben, welche bei  $1\frac{1}{2}$  Zoll bis 20 Fuß Länge 6 bis 12 Linien im Gevierte hielten, die folgende Regel. Wird die Kraft, durch welche ein schmiedeeiserner Würfel zerdrückt wird, zu 512 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes angenommen (§. 17), so beträgt die Kraft, durch welche ein Prisma gebogen und zerbrochen wird, wenn die Länge des Stabes gleich dem 27, 54, 81, 108, 135, 162, 189, 216, 243fachen der Dicke ist, respective 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 1 Pfd. für die Quadratlinie des Querschnittes.

§. 400. Versuche von Duleau <sup>3)</sup> mit vertical gestellten Stäben aus Schmiedeeisen, deren obere Endfläche belastet wurde.

1) Traité de la construction des ponts, par Gauthier, tome II, pag. 159.

2) Art de bâtir, tome I, pag. 295 u. folgend.

3) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 26.

Bezeichnung des Eisens.	Länge der Stäbe	Breite der Stäbe	Dicke der Stäbe	Belastung, bei welcher der Bruch erfolgte
	Meter	Millim.	Millim.	Kilogramm
Perigordeseisen, der Querschnitt ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 0,038 Meter .	3,02			860
Desgl. . . . .	2,01	30	11	190
Desgl., welches (zu Gußeisen bestimmt) . . . . .	2,01	70	11,2	520
Derselbe Stab in der Mitte festgehalten . . . . .				1945
Perigordeseisen (wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde)	2,02	45	12	500
Perigordeseisen . . . . .	2,01	40	11,5	260
Derselbe Stab in der Mitte festgehalten . . . . .				900
Perigordeseisen (wie es auf dem Eisenwerke gefunden wurde)	2,01	58	15	1000
Desgl. . . . .	3,02	25	15	180
Desgl. . . . .	3,02	39	19,6	780
Desgl. . . . .	2,01	60	20	2400
Desgl. . . . .	3,02	60	20	1200
Desgl. . . . .	3,02	39	24,5	1320
Desgl. . . . .	3,02	31	31	2000
Rundeisen aus Bilbao, 0,0318 Meter im Durchmesser . .	3,02			1285

Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, daß, wenn man die Belastungen nach der Formel  $Q = \pi^2 \cdot \frac{E}{a^2} \cdot \frac{z}{12}$  (worin für  $z$  bei einem rechteckigen Querschnitte  $E \cdot \frac{bc^3}{12}$  und bei einem freisförmigen Querschnitte  $E \cdot \frac{r^4 \pi}{4}$  zu setzen ist, während  $E = 20\,000\,000\,000$  Kil.) berechnet, die berechneten Werthe im Vergleich mit dem beobachteten ungefähr um  $\frac{1}{8}$  zu klein sind.<sup>1)</sup> Der Experimentator schreibt diese Abweichung zum Theil der Reibung des Hebels zu, dessen er sich bediente.

### Versuche über den Widerstand gußeiserner Stäbe, die in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt wurden.

§. 401. Man sehe hierüber die in §. 19 aufgeführten Versuche von G. Kennie.

Audere Versuche wurden von Reynolds<sup>2)</sup> mit sehr weichem

1) Essay théorique etc., pag 24.

2) Banks, on the power of machines, pag 89.

Gusseisen angestellt. Zwei Stäbe von 1 engl. Zoll ins Gevierte und 3 Fuß Länge, wurden mit dem einen Ende auf einen horizontalen Stab unter einen Winkel von  $45^\circ$  gestellt, während die beiden andern Enden sich berührten und eine Last von 15680 engl. Pfd. trugen, wodurch sich für jeden Stab ein Druck in der Richtung der Länge von 11087 Pfd. ergibt.

Bei einem andern Versuche trugen zwei ähnliche Stäbe, die mit dem horizontalen Stabe einen Winkel von  $22\frac{1}{2}$  Grad bildeten, eine Belastung von 8960 Pfd., wodurch sich für jeden Stab in der Richtung der Länge ein Druck von 11709 Pfd. ergibt.

### Bemerkungen über die Benützung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.

§. 402. Die in §. 383 u. folgd. gewonnenen Resultate stützen sich wesentlich auf die Voraussetzung, daß die Richtung der Kraft  $Q$  in der Arc des Stabes liege, oder wenigstens doch in der durch diese Arc gehenden Verticalebene, mit welcher die Richtung der Biegung rechte Winkel bildet. In der Wirklichkeit ist bei einem vertical belasteten Stabe gewöhnlich das Gewicht über den ganzen Querschnitt vertheilt. Verlangt man daher eine genaue Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Resultaten, so müßten die Stäbe in eine Spitze oder in eine Kante auslaufen.

Bei der Aufstellung der obigen Theorie wurde die Richtung der Biegung als bestimmt vorausgesetzt, und mit  $\varepsilon$  wurde der Werth des Elasticitätsmomentes bezeichnet, den man für diese Richtung nach den Formeln in §. 80 u. folgd. je nach der Gestalt des Stabes erhält. Im Allgemeinen ist aber die Richtung der Biegung bei einem vertical belasteten Stabe nicht bestimmt. Es liegt in der Natur der Sache, anzunehmen, daß die Biegung in derjenigen Richtung erfolgen werde, für welche der Werth des Elasticitätsmomentes  $\varepsilon$  ein Minimum ist. Ist nun der Querschnitt kreisförmig oder quadratisch, so hat  $\varepsilon$  für alle Richtungen einen gleich großen Werth (s. §. 83). Ist der Querschnitt ein Rechteck, so entspricht der Minimalwerth des Elasticitätsmomentes dem Falle, in welchem die Biegung in der Richtung der kleinsten Seite erfolgt. Bei Versuchen mit Stäben quadratischen Querschnittes erfolgt die Biegung ohne Unterschied in der Richtung der Diagonale oder in der Richtung der Seiten. Selbst bei Stäben mit rechteckigem Querschnitte erfolgt die Biegung nicht immer in der Richtung der kleinsten Seite, wofür die beiden Seiten nicht sehr an Länge von einander verschieden sind; die Richtung der Biegung bestimmt sich vielmehr gewöhnlich durch einen Fehler in der Gleichartigkeit des Stabes, oder durch die Weise, auf welche der Druck an den Endpunkten thätig ist.

In diesen Bemerkungen sind die Gründe enthalten, weshalb

die Resultate aus Versuchen mit vertical belasteten Stäben rechteckigen Querschnittes nicht immer mit den Werthen übereinstimmen, welche man nach der Formel  $Q = \pi^2 \cdot \frac{E}{a^2}$  und unter der Voraussetzung berechnet, daß die Biegung in der Richtung der kleinsten Seite erfolgen werde. Verfährt man aber mit der nöthigen Vorsicht, um die besonderen Umstände des Versuches mit den Hypothesen, auf welche sich die obige Theorie stützt, in Uebereinstimmung zu bringen, so wird auch das Resultat stets genau durch die angegebene Formel ausgedrückt.

§. 403. Was die Belastung anlangt, welche für Stäbe, die in der Richtung ihrer Länge zusammengebrückt werden, zulässig ist, so beachte man zuerst, daß der Stab nothwendiger Weise nachgeben muß, wenn die Belastung  $Q$  den Ausdruck hat

$$Q = \frac{\pi^2 E}{a^2},$$

woraus für den Fall eines rechteckigen Querschnittes

$$Q = E \cdot \frac{\pi^2 b c^3}{12 a^2}$$

wird. Dieser Ausdruck nimmt für abnehmende Werthe der Länge  $a$  sehr rasch zu. Im Allgemeinen sind die verticalen Stücke, welche bei einer Construction angewendet werden, zu kurz im Vergleich zu ihrer Dicke, als daß die Art der Biegung eintreten könnte, auf welche sich die Formeln in §. 383 u. folgd. beziehen. Nimmt man für Eichenholz  $E = 1\,000\,000\,000$  Kil. und für Schmiedeeisen  $E = 20\,000\,000\,000$  Kil. an, und vergleicht die Werthe, welche man hiernach mittelst der obigen Formel erhält mit den nach Rondelet in §. 397 und 399 angegebenen Erfahrungsergebnissen, so findet man, daß von jenen Werthen die Erfahrungsergebnisse übertroffen werden, wenn die Dicke  $c$  des Stabes mehr als  $\frac{1}{20}$  der Länge  $a$  desselben beträgt. Es muß daher bei solchen Stäben, deren Länge nicht das 20fache ihrer Dicke beträgt, d. h. in den meisten Fällen, welche in der Praxis vorkommen, der Widerstand nicht nach der obigen Formel bestimmt werden; sondern man muß das Gewicht in Betracht ziehen, welches den Stab zerdrücken (écraser) würde.

Das Gewicht, welches einen Stab zerdrücken wird, dessen Länge das Ein- oder Zweifache der Dicke beträgt, kann man für jeden Millimeter des Querschnittes rechnen auf

3 Kil.	für Eichen- und Tannenholz,
40 "	" Schmiedeeisen,
100 "	" Gußeisen.

Aus den oben aufgeführten Versuchen folgt

1. daß für Hölzer von dem für den Widerstand angegebenen

Werthe  $\frac{1}{8}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 12fache der Dicke und die Hälfte, wenn sie das 24fache der Dicke beträgt;

2. daß für Schmiedeeisen von dem für den Widerstand angegebenen Werthe  $\frac{1}{8}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 12fache der Dicke, und die Hälfte, wenn sie das 24fache der Dicke beträgt;

3. daß für Gußeisen von dem für den Widerstand angegebenen Werthe  $\frac{1}{3}$  zu nehmen sind, wenn die Länge das 4fache der Dicke beträgt; die Hälfte ungefähr, wenn sie das 8fache, und  $\frac{1}{15}$ , wenn sie das 36fache der Dicke beträgt.

Die bis jetzt bekannten Erfahrungsergebnisse geben keine Mittel an die Hand, den Widerstand mit Genauigkeit für die zwischensliegenden Fälle zu berechnen, welche von den vorher aufgeführten abweichen.

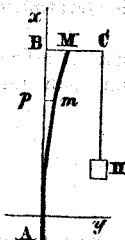
§. 404. Was solche Stäbe anlangt, deren Länge ungefähr das 20fache der Dicke übertrifft, so kann man den Widerstand nach den Formeln in §. 386 u. folgd. berechnen, in der Gewissheit, daß man durch diese Berechnung keine Resultate erhalten wird, welche die der Erfahrung übertreffen.

§. 405. Hat man in der Praxis den Widerstand eines Stabes, welcher in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, in Uebereinstimmung mit den beiden vorhergehenden Paragraphen berechnet, so muß man von dem Resultate für Hölzer ungefähr  $\frac{1}{10}$ , und für Schmiede- oder Gußeisen  $\frac{1}{4}$  oder  $\frac{1}{5}$  nehmen, um die größte mit Sicherheit zulässige Belastung des Stabes zu finden.

### Drittes Kapitel.

**Widerstand eines vertical belasteten Stabes, wenn die Kraft parallel mit der Axe desselben wirkt.**

Fig. 67.



§. 406. Es sei AM (Fig. 67) ein verticaler Stab, dessen unteres Ende festgehalten wird, während das Gewicht II an dem Ende des Querstückes MC thätig ist, welches mit dem verticalen Stabe so verbunden ist, daß es stets einen rechten Winkel mit demselben bildet. Das Gewicht II wird den verticalen Stab zusammendrücken, und ihn zu biegen und zu zerbrechen suchen. Man nenne

a die Entfernung AB;

l die Entfernung MC;

ω den Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes;



$x, y$  die Abscisse  $Ap$  und die Ordinate  $mp$  eines beliebigen Punktes der Curve, welche der Stab in Folge der Biegung bildet;  
 $f$  die Ordinate des Endpunktes  $MB$ ;  
 $\varepsilon$  behalte die im §. 80 angegebene Bedeutung.  
 Für die Gleichgewichtsgleichung erhält man

$$\varepsilon \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(l + f - y);$$

und das Integral dieser Gleichung (woraus  $y = 0$  und  $\frac{dy}{dx} = 0$  folgen muß, wenn  $x = 0$  wird) ist

$$y = (l + f) \left\{ 1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\}.$$

Für  $x = a$  muß  $y = f$  werden, daher

$$\frac{l}{l + f} = \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}},$$

woraus

$$f = l \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}} - 1 \right\},$$

und

$$\Pi = \varepsilon \left\{ \frac{\arccos \left\{ \cos = \frac{l}{l + f} \right\}}{a} \right\}^2.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y = l \cdot \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}{\cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}.$$

In dem Ausdrucke für  $\Pi$  hat man den kleinsten Bogen zu nehmen, dessen Cosinus gleich  $\frac{l}{l + f}$  ist, wosfern nicht gewisse Punkte des Stabes  $AB$  festgehalten werden. Die Durchbiegung, welche von einem gegebenen Gewichte hervorgebracht wird, ist der Entfernung  $MC$  proportional. Das Gewicht, welches eine gegebene Durchbiegung eines Stabes hervorbringt, ist reciprok dem Quadrate der Länge dieses Stabes.

§. 407. Die eben behandelte Frage weicht von den in §. 383 u. folgd. untersuchten Fragen insofern ab, als man hier eine Relation erhält zwischen dem Gewichte  $\Pi$ , mit welchem der Stab belastet wird, und der durch die Wirkung dieses Gewichtes hervorbrachten Durchbiegung  $f$ ; man kann deshalb auch nach dem in §. 387 Gesagten die Grenze bestimmen, bis zu welcher man in der Praxis bei der Belastungen des Stabes gehen darf.

Nimmt man für  $E$  die Bedeutung an, welche in §. 77 angegeben wurde, so erhält man  $\frac{\Pi}{E\omega}$  als die Größe, um welche die Fasern durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  zusammengedrückt werden. Bezeichnet man ferner, wie in §. 113, mit  $v'$  die Entfernung der Gleichgewichtslaxe von der äußersten Faser, welche am stärksten zusammengedrückt wird, so läßt sich die größte Zusammen-drückung, welche die Fasern in Folge der Biegung erleiden, durch  $v' \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$  ausdrücken. Dieser letzte Ausdruck wird ein Maximum für den Punkt  $A$  und erhält hier den Werth  $\frac{v'\Pi}{\varepsilon \cdot \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}}$ . Die größte

Verkürzung der Faser ist also hier

$$\Pi \left\{ \frac{1}{E\omega} + \frac{v'l}{\varepsilon \cdot \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}} \right\}.$$

Soll daher der größte Druck, welchen die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, eine gewisse Grenze, die in §. 181 mit  $R'$  bezeichnet wurde, nicht überschreiten, so darf jene Verkürzung den Bruch  $\frac{R'}{E}$  nicht übertreffen.  $\Pi$  darf daher nicht größer sein, als der Werth, welchen man aus der Gleichung erhält

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{E\omega} + \frac{v'l}{\varepsilon \cdot \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}} \right\}.$$

Die Werthe, welche man für  $R'$  bei den verschiedenen Materialien anzunehmen hat, finden sich in §. 181 u. folgd.

§. 408. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die größere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so hat man  $\omega = bc$ ,  $\varepsilon = E \cdot \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ . Aus der vorhergehenden Gleichung wird

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c + \frac{6l}{\cos a \sqrt{\frac{12\Pi}{Ebc^3}}} \right\}.$$

Der Bruch  $\frac{12\Pi}{Ebc^3}$  wird in der Regel sehr klein sein, und diese Gleichung ist daher wenig verschieden von

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} (c + 6l), \quad \text{woraus} \quad \Pi = \frac{R'bc^2}{c + 6l}.$$

§. 409. Man nehme jetzt an, daß das obere Ende des Stabes festgehalten werde (Fig. 68), während das Gewicht  $\Pi$  eine Ausdehnung und eine Biegung des Stabes zu gleicher Zeit bewirkt. Behält man die Benennungen aus §. 406 bei, so ist in diesem Falle die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(l - f + y);$$

und setzt man zur Abkürzung  $\frac{\Pi}{\varepsilon} = r^2$ , so ist das Integral <sup>1)</sup>

$$l - f + y = A e^{rx} + B e^{-rx},$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen,  $A$  und  $B$  aber zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt muß aus dieser Gleichung  $A x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ , für den Punkt  $M$  aber  $x = a, y = f$  folgen, man hat daher

$$l - f = A + B,$$

$$0 = A - B,$$

$$l = A e^{ra} + B e^{-ra};$$

woraus sich ergibt

$$A = B = \frac{l}{e^{ra} + e^{-ra}},$$

$$f = l \left\{ 1 - \frac{2}{e^{ra} + e^{-ra}} \right\}.$$

Die Gleichung der Curve ist

$$y = l \cdot \frac{e^{rx} + e^{-rx} - 2}{e^{ra} + e^{-ra}}.$$

§. 410. Wie in dem vorhergehenden Falle erhält man auch hier eine Relation zwischen dem Gewichte  $\Pi$  und der Durchbiegung  $f$ , welche das Gewicht hervorbringt. Die größte Belastung, welche für den Stab zulässig ist, bestimmt sich daher gleichfalls aus der Bedingung, daß die Fasern nicht über eine gewisse Grenze hinaus angespannt werden dürfen. Behält man die Benennungen aus §. 407 bei, so hat man  $\frac{\Pi}{E\omega}$  als die directe Ausdehnung der Fasern durch

das Gewicht  $\Pi$ , und  $\frac{\Pi v l}{\varepsilon}$  als die größte Ausdehnung der Fasern, welche sich in Folge der Biegung in dem Punkte  $M$ , wo sich die Bruchstelle befindet, ergibt. Soll daher die größte Spannung den Werth  $R$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

1) Navier-Wittstein, §. 435.

$$\frac{R}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{E\omega} + \frac{v'l}{\varepsilon} \right\},$$

woraus man den Werth von  $\Pi$  findet.

§. 411. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die größere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ;  $\varepsilon = \frac{Ebc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ , und aus der vorhergehenden Gleichung wird

$$R = \frac{\Pi(c+6l)}{bc^2}, \text{ woraus } \Pi = R \frac{bc^2}{c+6l}.$$

#### Viertes Kapitel.

**Widerstand eines prismatischen Stabes, wenn mit der Axe desselben die Richtung der Kraft einen schiefen Winkel einschließt.**

§. 412. Es sei  $AM$  (§. 69) ein Stab, gegen den in schiefer Richtung eine Kraft wirkt; das untere Ende  $A$  werde festgehalten, während an dem obern Ende ein Gewicht  $\Pi$  wirkt.

Man nenne

$\alpha$  den Winkel, welchen die Richtung  $AB$  des Stabes mit der Verticalen einschließt;

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche;

$x, y$  die Abscisse  $Ap$  und Ordinate  $mp$  eines beliebigen Punktes der Curve, welche der Stab in Folge der Biegung bildet;

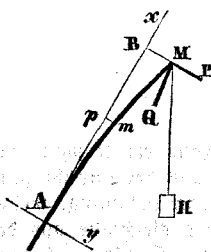
$f$  die Ordinate  $MB$  des Endpunktes;

$P, Q$  die beiden Componenten, welche man erhält, wenn man das in  $M$  angreifende Gewicht  $\Pi$  normal und parallel zu  $AB$  zerlegt, es ist also  $P = \Pi \sin \alpha$ ,  $Q = \Pi \cos \alpha$ ;

$\varepsilon$  behalte die dafür in §. 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist hier

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) + Q(f-y);$$



und setzt man zur Abkürzung  $p^2 = \frac{P}{\varepsilon}$ ,  $q^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$ , so erhält man als das Integral dieser Gleichung

$$f - y = A \sin q(x+B) - \frac{p^2}{q^2}(a-x),^1)$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ , woher man die drei Bedingungen erhält

$$f = A \sin qB - \frac{p^2 a}{q^2},$$

$$0 = qA \cos qB + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \sin q(a+B).$$

Hieraus folgt

$$\sin qB = \sin qa, \quad \cos qB = -\cos qa,$$

$$A = \frac{p^2}{q^3 \cos qa},$$

$$f = \frac{p^2}{q^3} (\tan qa - qa).$$

Aus den vorstehenden Werthen erhält man als die Gleichung der Curve

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} - qx \right\}.$$

1) Setzt man

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2} = p^2(a-x) + q^2(f-y),$$

so erhält man durch eine zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -q^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -q^2 z;$$

daher

$$z = A_1 \sin qx + B_1 \cos qx = p^2(a-x) + q^2(f-y)$$

$$f - y = \frac{A_1}{q^2} \sin qx + \frac{B_1}{q^2} \cos qx - \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

oder

$$f - y = A \sin q(x+B) - \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wenn man die willkürlichen Constanten  $A_1$  und  $B_1$  so verändert, daß

$$\frac{A_1}{q^2} = A \cos qB, \quad \frac{B_1}{q^2} = A \sin qB \quad \text{also} \quad A = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{q^2}, \quad \tan qB = \frac{B_1}{A_1},$$

wird.

Der Ausdruck für  $f$  giebt die Durchbiegung als Function der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$ . Da diese Durchbiegung sehr gering bleiben soll, so muß  $\tan qa - qa$  eine sehr kleine GröÙe sein. Ist daher  $0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  etc. die Reihe von Wogen, deren Länge der Länge ihrer respectiven Tangenten gleichkommt, so darf man der Componenten  $Q$  keine anderen Werthe beilegen, als solche, welche die Zahlen  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$  etc. etwas übertreffen. Nimmt man den erster dieser Werthe, so entspricht dies einer Biegung des Stabes, wie sie Fig. 69 darstellt. Die folgenden Werthe entsprechen Curven mit einer stets wachsenden Anzahl von Biegungspunkten, deren Existenz an die Bedingung geknüpft ist, daß gewisse Punkte der Curve in der Linie  $AB$  festgehalten werden. Sind alle Punkte des Intervalles  $AB$  frei, so ist das Gewicht  $\Pi$ , welches der Stab tragen kann, der Bedingung unterworfen, daß die Zahl  $a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$  zwischen den Grenzen  $0$  und  $\mu_1$  liege, und daß der obige Werth von  $f$  eine sehr kleine GröÙe habe. Dieser Werth von  $f$  wird die durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  verursachte Verrückung des Punktes  $M$  ausdrücken.

§. 413. Die Grenze der zulässigen Belastungen wird hier ebenso wie in §. 406 bestimmt. Haben  $\omega$  und  $v$  dieselbe Bedeutung, wie in §. 407, so erhält man  $\frac{Q}{E\omega}$  als die Verkürzung der Fasern durch die Wirkung der parallel zur Ase des Stabes gerichteten Kraft  $Q$ ; und  $v' \frac{d^2 y}{dx^2}$  als die Verkürzung der an der concaven Seite liegenden Fasern, welche durch die Biegung hervorgebracht wird. Diese letztere GröÙe wird ein Maximum für den Punkt  $A$  und hat hier den Werth  $v' \frac{p^2}{q} \tan qa$ ; die größte Totalverkürzung der Fasern ist daher

$$\frac{Q}{E\omega} + \frac{v' P \tan a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}}.$$

Soll daher der Druck, den die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' P \tan a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\sqrt{Q\varepsilon}};$$

d. h.

$$\frac{R'}{E} = \Pi \left\{ \frac{\cos \alpha}{E\omega} + \frac{v' \sin \alpha \cdot \tan a \sqrt{\frac{\Pi \cos \alpha}{2}}}{\sqrt{\Pi \cos \alpha \cdot \varepsilon}} \right\}.$$

Bestimmt man nun das Gewicht  $\Pi$  so, daß es dieser Gleichung Genüge leistet, so hat man damit die Grenze der zulässigen Belastungen gefunden.

§. 414. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die größere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ,  $\varepsilon = E \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ , und aus der oben erhaltenen Gleichung wird

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c \cos \alpha + \frac{6 \sin \alpha \cdot \tan a \sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}}{\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} \right\}.$$

Die Größe  $\frac{12 \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}$  wird oft sehr klein sein, und die vorstehende Gleichung wird sich daher wenig unterscheiden von

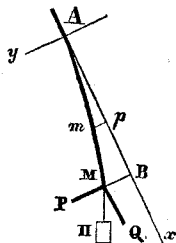
$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \{ c \cos \alpha + 6a \sin \alpha \},$$

woraus

$$\Pi = \frac{R' bc^2}{c \cos \alpha + 6a \sin \alpha}.$$

Die Werthe, welche man für  $R'$  bei den verschiedenen Materialien anzunehmen hat, findet man in §. 181 u. folgd.

Fig. 70.



§. 415. Man nehme jetzt an, der Stab  $AM$  (Fig. 70) werde am obern Ende  $A$  festgehalten, und die Belastung wirke am untern Ende, so daß das Gewicht  $\Pi$  den Stab auszuweiten, und nicht ihn zusammenzudrücken strebt. Behält man die Benennungen aus §. 412 bei, so hat man hier die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) - Q(f-y),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2(a-x) - q^2(f-y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist <sup>1)</sup>

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen,  $A$  und  $B$  aber zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ ; daher

$$f = Ae^{qa} + Be^{-qa} + \frac{p^2a}{q^2},$$

$$0 = q(Ae^{qa} - Be^{-qa}) + \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = A + B;$$

woraus folgt

$$B = -A,$$

$$A = -\frac{p^2}{q^2(eqa + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{p^2}{q^3} \left\{ qa - \frac{eqa - e^{-qa}}{eqa + e^{-qa}} \right\}.$$

Das Gewicht  $\Pi$  muß einen solchen Werth besitzen, daß die letzte Formel für  $f$  eine sehr kleine GröÙe giebt.

Die Gleichung der Curve ist

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ qx - \frac{eqa - e^{-qa} - eq(a-x) + e^{-q(a-x)}}{eqa + e^{-qa}} \right\}.$$

1) Setzt man

$$z = \frac{d^2y}{dx^2} = p^2(a-x) - q^2(f-y)$$

so erhält man durch eine zweimalige Differentiation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = +q^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = q^2 \cdot z,$$

daher

$$z = A_1 e^{qx} + B_1 e^{-qx} = p^2(a-x) - q^2(f-y)$$

$$f-y = \frac{-A_1}{q^2} e^{qx} + \frac{-B_1}{q^2} e^{-qx} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

oder

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wenn man die willkürlichen Constanten  $A_1$  und  $B_1$  so verändert, daß

$$\frac{-A_1}{q^2} = Be^{-qa} \text{ und } \frac{-B_1}{q^2} = Ae^{qa}$$

wird.



§. 416. Dieselben Betrachtungen wie in §. 407 können auch hier Anwendung finden. Die Fasern des Stabes werden zunächst durch die Wirkung der Composante  $Q$  um die Größe  $\frac{Q}{E\omega}$  gleichförmig ausgedehnt. In Folge der Biegung werden sodann die Fasern in dem Punkte  $A$  um die Größe  $\frac{v'p^2}{q} \cdot \frac{eqa - e - qa}{eqa + e - qa}$  ausgedehnt oder zusammengedrückt, je nachdem sie auf der convergen oder concaven Seite liegen. Soll daher die größte Spannung der Fasern den Werth  $R$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v'P}{VQ\varepsilon} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - e^{-a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}{e^{a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} + e^{-a\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}}.$$

Der größte Werth, welchen man für das Gewicht  $\Pi$  annehmen darf, bestimmt sich durch die Bedingung, daß die Composanten  $P$ ,  $Q$  dieses Gewichtes der vorstehenden Gleichung Genüge leisten müssen.

§. 417. Ist der Querschnitt des Stabes ein Rechteck, wo  $b$  die größere und  $c$  die kleinere Seite bezeichnet, so ist  $\omega = bc$ ,  $\varepsilon = E \frac{bc^3}{12}$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ . Aus der vorstehenden Gleichung wird

$$R' = \frac{1}{bc^2} \left\{ Qc + \frac{6P}{\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} - e^{-a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}}{e^{a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} + e^{-a\sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}}} \right\}.$$

d. h.

$$R' = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ c \cos \alpha + \frac{6 \sin \alpha}{\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} \cdot \frac{e^{a\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} - e^{-a\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}}}{e^{a\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}} + e^{-a\sqrt{\frac{12 \cdot \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}}}} \right\}.$$

Ist der Bruch  $\frac{12 \Pi \cos \alpha}{Ebc^3}$  eine sehr kleine Größe, was in den meisten Fällen, die in der Praxis vorkommen werden, der Fall sein wird, so unterscheidet sich die letzte Gleichung sehr wenig von

$$R' = \frac{\Pi(c \cos \alpha + 6a \sin \alpha)}{bc^2};$$

woraus man erhält

$$\Pi = R' \frac{bc^2}{c \cos \alpha + 6a \sin \alpha'}$$

wie in dem vorhergehenden Falle.

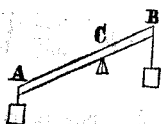
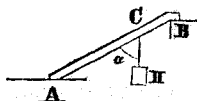
### Gleichgewicht eines geneigten Stabes, wenn derselbe zwischen seinen Enden belastet ist.

§. 418. Der einfachste Fall ist hier der, wenn ein geneigter Stab  $AB$  (Fig. 71), welcher in  $C$  mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet ist, an den beiden Enden auf Theilen von horizontalen Ebenen ruht. Ein solcher Stab hat kein Bestreben zu gleiten, weil in Folge des Gleitens das Gewicht  $\Pi$  an keine tiefere Stelle gelangen würde. Bezeichnet man mit  $a$  und  $a'$  die Längen  $AC$  und  $BC$ , so hat man

$\Pi \frac{a'}{a+a'}$ , und  $\Pi \frac{a}{a+a'}$  als die Verticalkräfte, welche in  $A$  und  $B$  zur Wirkung kommen. Man kann nun jeden der beiden Theile  $AC$  und  $BC$  so ansehen, als würde er in  $C$  festgehalten und an dem Ende  $A$  oder  $B$  von einer entsprechenden Verticalkraft sollicitirt. Es befindet sich also der Theil  $AC$ , welcher in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, in demselben Falle, wie der in §. 412 untersuchte Stab, wobei für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft hier  $\Pi \frac{a'}{a+a'}$  zu setzen ist. Der Theil  $BC$  hingegen, welcher in der Richtung seiner Länge ausgedehnt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in §. 415 untersuchte Stab, wobei für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft hier  $\Pi \frac{a}{a+a'}$  zu setzen ist.

§. 419. Ein Stab  $AB$  (Fig. 72), welcher in geneigter Lage auf einem Stützpunkte  $C$  ruht, ohne auf demselben gleiten zu können, während er an seinen Endpunkten mit Gewichten belastet ist, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, wird auf dieselbe Weise (aber im entgegengesetzten Sinne) sollicitirt, wie der in dem vorhergehenden Paragraphen untersuchte Stab.

Der Theil  $BC$ , welcher zusammengedrückt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in §. 412 untersuchte Stab, und der Theil  $AC$ , welcher ausgedehnt wird, befindet sich in demselben Falle, wie der in §. 415 untersuchte Stab.



§. 420. Ein geneigter Stab  $AB$  (Fig. 73), welcher in  $C$  mit einem Gewichte belastet ist, wird oft auf andere Weise unterstützt, als dies in §. 418 angenommen wurde.

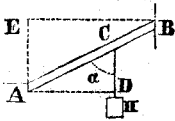


Fig. 73. Das obere Ende wird dann von einer Verticalebene und das untere Ende von einer Horizontalebene gestützt; dieses untere Ende hat aber ein Bestreben zu gleiten, und muß daher entweder sich gegen eine Stütze legen oder von einem Bindebalken zurückgehalten werden. Das

Gewicht  $\Pi$  wird hier gänzlich von der Stütze  $A$  aufgenommen. In  $B$  übt der Stab einen Horizontaldruck aus, dessen Größe durch die Bedingung bestimmt wird, daß das Moment desselben, bezogen auf den Punkt  $A$ , also mit dem Hebelarm  $AE$ , gleich dem Momente des Gewichtes  $\Pi$  mit dem Hebelarm  $AD$  sein muß; denselben Horizontaldruck erhält man auch gegen die in  $A$  anzubringende Stütze. Nennt man  $a$  und  $a'$  die Längen  $AC$  und  $BC$ , und  $\alpha$  den Winkel  $ACD$ , so erhält man

$$\Pi \frac{a \tan \alpha}{a + a'}$$

für den in Rede stehenden Horizontaldruck. Jeder der beiden Theile  $AC$  und  $BC$  ist in demselben Falle, als wenn der Stab in  $C$  festgehalten und an den beiden Enden von den vorhin angegebenen Kräften sollicitirt würde. Es muß daher der Theil  $AC$ , welcher zusammengedrückt wird, dem in §. 412 untersuchten Stabe gleichgestellt werden, wobei die in dem genannten Paragraphen mit  $P$ ,

$Q$  und  $\Pi$  bezeichneten Kräfte hier respective gleich  $\Pi \sin \alpha \cdot \left\{ 1 - \frac{a}{a + a'} \right\}$ ,

$\Pi \cos \alpha \cdot \left\{ 1 + \frac{a \tan^2 \alpha}{a + a'} \right\}$  und  $\Pi \sqrt{1 + \frac{a^2 \tan^2 \alpha}{(a + a')^2}}$  sind. Der Theil  $BC$

welcher ebenfalls zusammengedrückt wird, muß demselben Stabe gleichgestellt werden; die in §. 412 mit  $P$ ,  $Q$  und  $\Pi$  bezeichneten

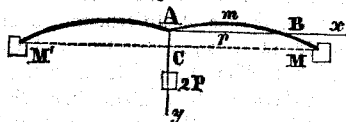
Kräfte sind aber hier respective  $\Pi \frac{a \sin \alpha}{a + a'}$ ,  $\Pi \frac{a \sin \alpha \cdot \tan \alpha}{a + a'}$  und

$$\Pi \frac{a \tan \alpha}{a + a'}.$$

Fünftes Kapitel.

**Widerstand eines gebogenen prismatischen Stabes, der horizontal zwischen zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wird.**

§. 421. Man denke sich einen gebogenen prismatischen Stab  $MAM'$  (Fig. 74), so zwischen zwei Stützen gelegt, deren Abstand von einander etwas geringer als die Länge des Stabes ist, daß die beiden Enden des Stabes sich in einer Horizontalen befinden und die concave Seite nach oben gekehrt ist. Es handelt sich darum, die Gleichgewichtsbedingungen zu finden, wenn ein Gewicht  $2P$  in der Mitte des Stabes aufgehängt ist. Jeder Theil des Stabes befindet sich in demselben Falle, als wenn er in  $A$  festgehalten und an dem Ende  $M$  oder  $M'$  von einer Kraft sollicitirt würde, deren verticale Composante  $P$  ist. Nennt man daher



$Q$  die horizontale Composante der gegen die Stütze  $M$  oder  $M'$  wirkenden Kraft;  
 $x, y$  die Coordinaten  $Ap, mp$  eines beliebigen Punktes der Curve;  
 $a$  die halbe Entfernung  $AB$  der Stützen von einander;  
 $s$  die halbe Länge  $AmM$  des Stabes;  
 $f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes der Curve; während  
 $\varepsilon$  die in §. 80 angegebene Bedeutung behält;

so ist die Gleichgewichtsgleichung

$Q$  die horizontale Composante der gegen die Stütze  $M$  oder  $M'$  wirkenden Kraft;

$x, y$  die Coordinaten  $Ap, mp$  eines beliebigen Punktes der Curve;

$a$  die halbe Entfernung  $AB$  der Stützen von einander;

$s$  die halbe Länge  $AmM$  des Stabes;

$f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes der Curve; während

$\varepsilon$  die in §. 80 angegebene Bedeutung behält;

so ist die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = -P(a-x) + Q(f-y);$$

oder, wenn man zur Abkürzung  $p^2 = \frac{P}{\varepsilon}$ ,  $q^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$  setzt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2(a-x) + q^2(f-y).$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f-y = A \sin q(x+B) + \frac{p^2}{q^2}(a-x),$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

§. 422. Für den Punkt  $A$  hat man  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $M$ ,  $x=a$ ,  $y=f$ ; daher folgen die drei Bedingungen

$$f = A \sin qB + \frac{p^2}{q^2} a,$$

$$0 = qA \cos qB - \frac{p^2}{q^2},$$

$$0 = \sin q(a+B), \text{ oder } q(a+B) = i\pi,$$

wo  $\pi$  das Verhältniß des Kreisumfangs zum Durchmesser, und  $i$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Es ergibt sich daraus

$$A = -\frac{p^2}{q^3 \cos qa};$$

und es bleibt die Bedingungsgleichung

$$\tan qa = qa - \frac{q^3 f}{p^2}, \text{ oder } f = \frac{p^2}{q^3} (qa - \tan qa).$$

Der Werth der Kraft  $Q$  ist also durch die Bedingung bestimmt, daß die Tangente des Bogens  $a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$  um die Größe  $f \cdot \frac{Q}{P} \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}$  kleiner als dieser Bogen sei; und diese letztere Größe muß sehr klein sein, weil die Durchbiegung des Stabes als sehr gering angenommen wurde.

§. 423. Aus den vorstehenden Werthen erhält man für die Gleichung der Curve

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ qx - \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} \right\},$$

woraus sehr nahe folgt

$$s = a + \frac{p^4 a}{4q^4} \left\{ 3 - \frac{3 \tan qa}{qa} + \tan^2 qa \right\},$$

$$s = a + \frac{p^4 a^3}{4q^2} + \left\{ \frac{3p^2}{4q^2} - \frac{p^2 a^2}{2} \right\} f.$$

Bezeichnet man durch  $0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \text{ u.}$  Die Reihe von Bogen, deren Länge gleich der Länge ihrer respectiven Tangenten ist, so geschieht der obigen Bedingung Genüge, wenn man für die Kraft  $Q$  successive solche Werthe annimmt, welches etwas kleiner als  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}, \frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}, \text{ u.}$  sind. Diesen Suppositionen werden Curven entsprechen, die eine immer größere Anzahl von Beugungspunkten besitzen.

Nimmt man von jenen Werthen den ersten, so ergeben sich aus den Gleichungen in §. 422 und 423 die Werthe von  $Q$  und  $f$ , wenn  $a, s$  und  $P$  gegeben sind. Die Gestalt der Curve wird in diesem Falle durch Fig. 74 repräsentirt.

§. 424. Nimmt man  $f=0$  an, so wird aus der in §. 422 gefundenen Bedingungsgleichung

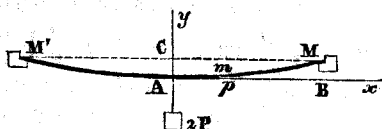
$\tan qa = qa$ , woraus  $Q = \frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2} = (4,4934)^2 \frac{\varepsilon}{a^2}$ ;  
man hat

$$s = a + \frac{p^2 a^3}{4q^2};$$

woraus

$$Q = \frac{P^2}{4\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{s-a}, \text{ und } 2P = \frac{4\mu_1^2 \varepsilon}{a^2} \sqrt{\frac{s-a}{a}},$$

welche letzte Formel den Werth des Gewichtes  $2P$  ausdrückt, das man in der Mitte des Stabes aufzuhängen hat, wenn der Mittelpunkt bis zu dem Niveau der beiden Enden des Stabes herabgezogen werden soll. Dieses Gewicht muß man als das größte ansehen, welches der Stab noch tragen kann. Denn nähme man wirklich den Punkt  $A$  als unterhalb des Punktes  $C$  (Fig. 75) liegend an, so würde, wenn man die von unten nach



oben genommenen Ordinaten als positiv ansieht, die Gleichgewichtsgleichung sein

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = P(a-x) + Q(f-y).$$

Daraus würde die Bedingungsgleichung folgen

$$\tan qa = qa + \frac{q^3 f}{p^2}, \text{ oder } f = \frac{p^2}{q^3} \tan qa - qa;$$

und die Gleichung der Curve wäre

$$y = \frac{p^2}{q^3} \left\{ \frac{\sin qa - \sin q(a-x)}{\cos qa} - qx \right\}.$$

Die Kraft  $Q$  müßte etwas größer angenommen werden als 0,  $\frac{\mu_1^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_2^2 \varepsilon}{a^2}$ ,  $\frac{\mu_3^2 \varepsilon}{a^2}$ , u. Die erste von diesen Suppositionen muß hier genommen werden, und daraus ergeben sich für  $Q$  so wie für das Gewicht  $2P$  weit kleinere Werthe, als bei der Annahme, daß der Mittelpunkt des Stabes oberhalb der Horizontalen liege. Die sich ergebende Curve, welche keinen Beugungspunkt mehr enthält, wird durch Fig. 75 dargestellt.

Aus dem Obigen erklärt es sich, weshalb ein gebogener Stab, dessen Enden sich zwischen festen Hindernissen befinden, einen grö-

1) Die Zahl 4,4934 ist die Bogen- oder Tangentenlänge eines Winkels von nahe  $257^\circ 27'$ .

hern Widerstand leisten kann, als ein gerader Stab. Man sieht, daß dieser Widerstand eine Grenze hat, die man nicht überschreiten kann, ohne den Stab zu zwingen, sofort seine Gestalt zu ändern. Das Gewicht, welches der Stab nach dieser Aenderung noch tragen kann, ist weit geringer, als dasjenige, welches der Stab bei gleicher Krümmung würde tragen können, wenn die Enden desselben einfach auf Stützen gelegt wären.

## Sechstes Kapitel.

### Widerstand eines prismatischen Stabes mit bogenförmiger Arc.

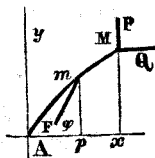
§. 425. In dem vorhergehenden Kapitel beschäftigten wir uns mit einem Stabe, dessen natürliche Gestalt als geradlinig angenommen wurde, und den man zwang, eine Bogenform anzunehmen, um das Tragvermögen des Stabes zu vermehren. Hier hingegen handelt es sich um die Stäbe, deren natürliche Gestalt bogenförmig ist, wie bei den Bogen aus Holz oder Eisen, deren man sich beim Brückenbau bedient.

Bei den Stäben dieser Art kann zwischen der Vertheilung der Belastungen und der Gestalt der Curve (welche die Arc des Stabes bildet) eine solche Relation bestehen, daß der Stab nur zusammengedrückt oder ausgedehnt wird, ohne ein Bestreben zu besitzen, seine Gestalt zu ändern; in diesem Falle sagt man, der Stab sei nach der Gleichgewichtscurve geformt. In allen andern Fällen suchen die Gewichte, mit denen der Stab belastet ist, diesen zu biegen.

### Untersuchung der Stäbe, die nach der Gleichgewichtscurve geformt sind.

§. 426. Bei der Auffuchung der Gleichgewichtscurve für eine gegebene Vertheilung der Belastungen geht man von den Principien aus, welche schon bei der Theorie der Gewölbe aufgestellt wurden. Man betrachte einen Stab, dessen natürliche Gestalt die ebene Curve  $AM$  (Fig. 76) sei und auf jeden Punkt desselben wirke eine Kraft,

Fig. 76.



deren Richtung in die Ebene der Curve fällt. Dieser Stab wird im Gleichgewicht sein und wird keine Neigung zu einer Biegung besitzen, wenn der Druck in einem beliebigen Punkte  $m$  in der Richtung der Curve gleich und entgegengesetzt der Resultanten ist, welche sich aus den Kräften ergibt, die auf den Theil  $mM$  des Stabes wirken. Es wird außerdem das Ende  $A$  als gegen eine

festen Ebene gestützt angesehen, die auf der Curve normal ist. Nennt man daher, wie in §. 303,

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap$ ,  $pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve;

$s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;

$a, b$  die Coordinaten für den Endpunkt  $M$ ;

$S$  die ganze Länge  $AM$  der Curve;

$\rho$  den Krümmungshalbmesser der Curve für den Punkt  $m$ ;

$\alpha$  den Winkel, welchen die Tangente in dem Punkte  $m$  der Curve mit der Horizontalen bildet;

$F$  den Theil der Belastung, welcher in dem Punkte  $m$  zur Wirkung kommt, bezogen auf die Einheit der Bogenlänge;

$\varphi$  den Winkel, welchen die Richtung der Kraft  $F$  mit der horizontalen Abscissenaxe bildet;

$T$  den Druck in der Richtung der Curve, welcher in dem Punkte  $m$  stattfindet;

$P$  und  $Q$  die Vertical- und Horizontalkraft in dem Punkte  $M$ ;  
so hat man allgemein

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot F \sin \varphi,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q + \int_s^S ds \cdot F \cos \varphi,$$

als die Bedingungen, denen Genüge geleistet werden muß, wenn der Stab kein Bestreben haben soll, sich zu biegen.

§. 427. Aus diesen Bedingungen findet man, wie in §. 305

$$-dT = F ds \left\{ \frac{dy}{ds} \sin \varphi + \frac{dx}{ds} \cos \varphi \right\},$$

als die Gleichung, aus welcher sich der Werth des Druckes in der Ase des Stabes berechnen läßt.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich normal zur Ase desselben gerichtet sind.**

§. 428. In diesem Falle findet man, wie in §. 306, daß der Druck  $T$  in der ganzen Ausdehnung der Curve constant sein muß. Die Gestalt der Curve bestimmt sich aus der Bedingung

$$\rho = \frac{T}{F}, \text{ woraus } T = \rho F;$$

d. h. der Krümmungshalbmesser muß überall gleich sein dem Drucke  $T$ , dividirt durch den Werth des auf die Einheit der Bogenlänge bezogenen Normaldruckes.



§. 429. Ist der Normaldruck constant, so muß die Gestalt des Stabes ein Kreisbogen sein.

**Untersuchung des Falles, in welchem die auf den Stab wirkenden Kräfte sämmtlich vertical gerichtet sind.**

§. 430. Nennt man in diesem Falle  $p$  das auf die Einheit der Bogenlänge bezogene und als Function des Bogens ausgedrückte Gewicht, womit der Punkt  $m$  belastet ist, so wird aus den Gleichungen in §. 426

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_s^S ds \cdot p,$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q.$$

Die horizontale Composante des Druckes  $T$  ist in der ganzen Ausdehnung der Curve constant und der Kraft  $Q$  gleich.

§. 431. Aus der Gleichung in §. 427 wird jetzt

$$-dT = pds \cdot \frac{dy}{ds}, \text{ oder } -dT = pdy.$$

§. 432. Anstatt die Kraft  $F$  und das Gewicht  $p$  als durch eine Function des Bogens ausgedrückt anzunehmen, kann man sie als durch eine Function der Abscisse  $x$  ausgedrückt ansehen. In diesem Falle wird aus den Gleichungen in §. 430

$$T \frac{dy}{ds} = P + \int_x^a dx \cdot p$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q.$$

Anstatt der Gleichung in §. 451 hat man

$$-dT = pdx \cdot \frac{dy}{ds}.$$

§. 433. Der einfachste Fall ergibt sich, wenn man  $p$  als constant ansieht, d. h. wenn man den Stab als so belastet annimmt, daß gleichen Theilen der horizontalen Abscissenaxe  $Ax$  auch gleiche Gewichte entsprechen. In diesem Falle hat man

$$T \frac{dy}{ds} = P + p(a-x),$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q,$$

hervoraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P + p(a-x)}{Q},$$

$$y = \frac{1}{Q} \left\{ Px + p \left[ ax - \frac{1}{2} x^2 \right] \right\}.$$

§. 434. Der Werth des Druckes  $T$  ist

$$T = Q \frac{ds}{dx}, \text{ oder } T = Q \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2}.$$

§. 435. Man nehme an, der bogenförmige Stab  $AM$  (Fig. 77) sei auf die eben angegebene Weise belastet,

Fig. 77. und außer der Lage des Endpunktes  $M$  sei noch die Ordinate  $DN$  in der Mitte von  $AB$  bekannt. Nennt man  $g$  den Verticalpfeil  $NG$ , so muß sich aus der vorhergehenden Gleichung  $y = \frac{b}{2} + g$  ergeben, wenn man  $x = \frac{a}{2}$ , und  $y = b$ , wenn man  $x = a$  setzt; daraus folgt

$$P = \frac{pab}{8g} - \frac{pa}{2},$$

$$Q = \frac{pa^2}{8g};$$

und als die Gleichung der Curve, welche ein Parabelbogen ist,

$$y = \frac{(b+4g)x}{a} - \frac{4gx^2}{a^2}.$$

§. 436. Die Neigung der Curve in dem Punkte  $A$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{P+pa}{Q}, \text{ oder } \tan \alpha = \frac{b+4g}{a}.$$

Die Formel im §. 434 giebt für den Druck  $T$ , welcher in einem beliebigen Punkte stattfindet,

$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b+4g}{a} - \frac{8gx}{a^2} \right\}^2},$$

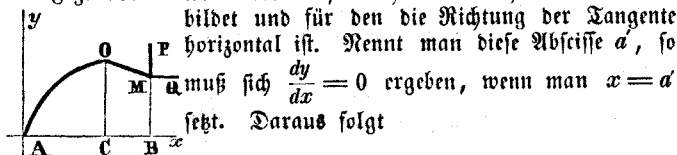
und für den Druck, welcher respective in  $A$  und  $M$  stattfindet,

$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b+4g}{a} \right\}^2},$$

und

$$T = \frac{pa^2}{8g} \sqrt{1 + \left\{ \frac{b-4g}{a} \right\}^2}.$$

§. 437. Man nehme jetzt an, der bogenförmige Stab sei wieder auf die vorhin angegebene Weise belastet, und außer der Lage des Endpunktes  $M$  (Fig. 78) sei noch die Abscisse des Punktes  $O$  bekannt, welcher den Scheitel der Curve bildet und für den die Richtung der Tangente horizontal ist. Nennt man diese Abscisse  $a'$ , so



$$P = -p(a - a'),$$

$$Q = \frac{pa(2a' - a)}{2b};$$

und aus der Gleichung der Curve wird

$$y = \frac{b}{a} \cdot \frac{2a'x - x^2}{2a' - a}.$$

§. 438. Wenn statt der Abscisse  $AC$  oder  $a'$  des Punktes  $O$  die Ordinate desselben gegeben wäre, und diese Ordinate durch  $b'$  bezeichnet würde, so hätte man

$$P = -\frac{pa\sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}},$$

$$Q = \frac{pa^2}{2b} \cdot \frac{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}{b' + \sqrt{b'^2 - bb'}},$$

$$a' = \frac{a}{b} \cdot (b' - \sqrt{b'^2 - bb'});$$

und die Gleichung der Curve wäre

$$y = \frac{b}{a^2} \cdot \frac{2ab'x - (b' + \sqrt{b'^2 - bb'})x^2}{b' - \sqrt{b'^2 - bb'}}.$$

§. 439. Für den Fall, welcher in §. 437 betrachtet wurde, hat man

$$\tan \alpha = \frac{2ba'}{a(2a' - a)};$$

und für den Fall des §. 438

$$\tan \alpha = \frac{2}{a} (b' + \sqrt{b'^2 - bb'}).$$

Der Werth des Druckes  $T$  berechnet sich nach der Formel in §. 434 zu

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \tan \alpha - \frac{px}{Q} \right\}^2};$$

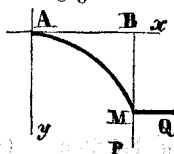
und ist daher an den Endpunkten *A* und *M*

$$T = Q \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{Q}{\cos \alpha}$$

und

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \tan \alpha - \frac{pa}{Q} \right\}^2}.$$

§. 440. Wir wollen noch den Fall untersuchen, in welchem die Curve sich in *A* (Fig. 79) gegen eine Verticalebene stützt, und wo daher die Tangente der Curve mit der horizontalen Arc *Ax* zusammen fallen muß. Sieht man die von oben nach unten gezählten Ordinaten als positiv an, und beachtet, daß aus den



Gleichungen in §. 433 folgen muß  $\frac{dy}{dx} = 0$ ,  $y = 0$ , wenn man  $x = 0$ ; hingegen  $y = b$ , wenn man  $x = a$  setzt, wobei *a* und *b* wie vorhin die Coordinaten des Endpunktes *M* bezeichnen, so hat man

$$P = -pa, \quad Q = \frac{pa^2}{2b};$$

und als die Gleichung der Curve

$$y = \frac{bx^2}{a^2}.$$

§. 441. Der Werth des Druckes *T* ist

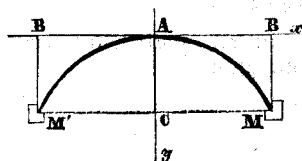
$$T = Q \sqrt{1 + \frac{p^2 x^2}{Q^2}}, \quad \text{oder} \quad T = \frac{pa^2}{2b} \sqrt{1 + \frac{4b^2 x^2}{a^4}}.$$

In dem Endpunkte *M* bildet die Tangente der Curve mit der Abscissenaxe einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente  $= \frac{2b}{a}$  ist. Der Werth des Druckes *T* ist in diesem Punkte

$$\frac{pa}{2b} \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

§. 442. Anstatt sich in *A* eine feste Ebene angebracht zu denken, könnte man auf der andern Seite dieses Punktes einen Curventheil *AM'* (Fig. 80) denken, der mit dem ersten gleiche Gestalt und gleiche Belastung haben müßte. Daraus folgt, daß die gewöhnliche Parabel, welche durch die Gleichung in §. 440 repräsentirt wird, die Gleichgewichtscurve für einen Stab *MAM'* mit bogenförmiger Arc ist, der auf zwei Stützen gelegt und mit Ge-

Fig. 80.



welchen die verschiedenen Theile der Curve erleiden, und der im Scheitel A gleich  $Q$  ist.

§. 443. Wenn die Belastung des bogenförmigen Stabes, anstatt gleichförmig auf der Linie  $AB$  (Fig. 79) vertheilt zu sein, von dem Punkte  $A$  nach dem Punkte  $B$  hin gleichförmig zunähme, so würde aus den Gleichungen in §. 432, wosern  $k$  eine Constante bezeichnet,

$$-T \frac{dy}{ds} = P + \int_x^a dx(p + kx),$$

$$T \frac{dx}{ds} = Q;$$

woraus

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q} [P + p(a-x) + \frac{1}{2}k(a^2-x^2)],$$

$$-y = \frac{1}{Q} [Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{2}k(a^2x - \frac{1}{3}x^3)].$$

Für den Punkt  $A$  muß  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$  sein; für den Punkt  $B$  aber  $x=a$ ,  $y=b$ ; daraus folgt für die Kräfte, welche an dem Endpunkte angebracht werden müssen,

$$-P = pa + \frac{1}{2}ka^2,$$

$$Q = \frac{3pa^2 + ka^3}{6b};$$

und für die Gleichung der Gleichgewichtscurve

$$y = \frac{b(3px^2 + kx^3)}{3pa^2 + ka^3}.$$

§. 444. Für den Druck  $T$  erhält man nach der Formel des §. 434

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \frac{3b(2px + kx^2)}{3pa^2 + ka^3} \right\}^2};$$

daher für den Endpunkt  $M$ ,

wichten belastet wird, die man gleichförmig auf der Horizontalen vertheilt. Die obigen Werthe für  $P$  und  $Q$  geben die Drücke an, welche die beiden Stützen in verticaler und in horizontaler Richtung erleiden. Die Werthe für  $T$  in §. 461 geben den Druck an,

$$T = Q \sqrt{1 + \left\{ \frac{3b(2p+ka)}{3pa+ka^2} \right\}^2}.$$

Die Curve bildet in diesem Punkte mit der Horizontalen einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich

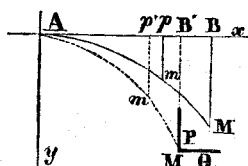
$$\frac{3b(2p+ka)}{3pa+ka^2}$$

ist.

§. 445. Bei der Annahme einer gleichförmig über die Länge des Stabes vertheilten Belastung würde man als Gleichgewichtscurve die krumme Linie erhalten, welche unter dem Namen der Kettenlinie bekannt ist. Der Druck, welchen die einzelnen Theile des Stabes erleiden, würde auf dieselbe Weise zu berechnen sein, wie man die Spannung bei der Kettenlinie berechnet. Man kann sich also in diesem Falle der Formeln bedienen, welche man in den Lehrbüchern der Statik findet.<sup>1)</sup>

### Biegung der Stäbe mit bogenförmiger Arc.

§. 446. Wir wollen jetzt einen bogenförmigen Stab  $AmM$  (Fig. 81) untersuchen, von dem wir annehmen, daß das Ende  $A$  horizontal festgehalten werde, während an dem andern Ende  $M$  eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken und den Stab in die Lage der Curve  $Am'M'$  biegen. Es handelt sich nun darum, die Gestalt der Curve  $AM'$  zu finden, wenn die Gestalt der Curve  $AM$ , das Elasticitätsmoment des Stabes und die Kräfte  $P$  und  $Q$  gegeben sind. Man nenne



- $x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes der Curve  $AM$ ;
- $s$  die Länge des Bogens  $Am$ ;
- $x', y'$  die Coordinaten des Punktes  $m'$ , in welchem sich der Punkt  $m$  nach der Biegung befindet;
- $a, b$  die Coordinaten  $AB, MB$  des Endpunktes  $M$ ;
- $a', b'$  die Coordinaten  $AB', M'B'$  des Punktes  $M'$ , in welchem sich der Punkt  $M$  nach der Biegung befindet;
- $\varphi$  den Winkel, welchen die Normale für den Punkt  $m$  der Curve  $AM$  mit der Verticalen bildet;
- $\varphi'$  den Winkel, welchen nach der Biegung die Normale für den Punkt  $m'$  der Curve  $AM'$  mit der Verticalen bildet;
- $\varepsilon$  das Elasticitätsmoment des bogenförmigen Stabes  $AM$ , wofür der allgemeine Ausdruck in §. 80 gegeben ist.

1) Man sehe auch das Verf.: Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus, par Navier.

Man nehme jetzt die in §. 77 angestellten Betrachtungen wieder auf, und nenne, wie dort,  $v$  die Entfernung eines beliebigen Punktes des Querschnittes von der Gleichgewichtsaxe (oder von der neutralen Faserschicht). Vor der Biegung ist die Länge eines unendlich kleinen Theiles einer Faser, welche sich in dem Abstände  $v$  von der Gleichgewichtsaxe befindet, gleich  $ds + v d\varphi$ , weil  $d\varphi$  der Winkel ist, welchen zwei auf einander folgende Normalen mit einander bilden. Nach der Biegung ist die Länge desselben Fasertheils gleich  $ds + v d\varphi'$ , wenn man von der Aenderung absieht, welche die Länge des Elementes  $ds$  erlitten haben könnte. Das Verhältniß der Ausdehnung dieses Fasertheiles zu der ursprünglichen Länge desselben ist daher

$$\frac{(d\varphi' - d\varphi)v}{ds + v d\varphi}, \quad \text{oder einfach} \quad \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} v,$$

wenn man  $v d\varphi$  gegen  $ds$  vernachlässigt, was in den Fällen, die in der Praxis gewöhnlich vorkommen, meist geschehen kann, indem die Dicke des Stabes im Verhältniß zum Krümmungshalbmesser sehr klein zu sein pflegt. Man schließt hieraus, daß bei einem bogenförmigen Stabe die Gleichgewichtsbedingungen sich auf dieselbe Weise werden ausdrücken lassen, wie bei einem geraden Stabe, wenn man nur die Function  $\frac{1}{\varepsilon}$  oder  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  durch  $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ersetzt.

§. 447. Der Gleichgewichtszustand des bogenförmigen Stabes  $AM$  wird demnach durch die folgende Gleichung ausgedrückt

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = P(a-x) + Q(b-y);$$

es folgt daraus

$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)].$$

Da die Biegung stets als sehr gering vorausgesetzt wird, so können die Winkel  $\varphi'$  und  $\varphi$  nur sehr wenig von einander verschieden sein, und die rechte Seite der Gleichung muß daher einen Winkel ausdrücken, der von seinem Sinus (fast) nicht verschieden, und dessen Cosinus (fast) gleich der Einheit ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt daher <sup>1)</sup>

$$\cos \varphi' - \cos \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \sin \varphi \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$\sin \varphi' - \sin \varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \cos \varphi \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

1) Sieht man  $\varphi' - \varphi$  als die Variation von  $\varphi$  an, so hat man (weil das Variiren nach denselben Gesetzen geschieht, wie das Differenziren)  $\varphi' - \varphi = \delta\varphi$ ,  $\cos \varphi' - \cos \varphi = \delta \cdot \cos \varphi = -\delta\varphi \cdot \sin \varphi$ ,  $\sin \varphi' - \sin \varphi = \delta \cdot \sin \varphi = \delta\varphi \cdot \cos \varphi$ .

Man hat aber  $\cos \varphi = \frac{dx}{ds}$ ,  $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$ ,  $\cos \varphi' = \frac{dx'}{ds}$ ,  $\sin \varphi' = \frac{dy'}{ds}$ , wenn man  $ds$  als constant ansieht, d. h. wenn man annimmt, daß die Länge der Arc des Stabes durch die Biegung nicht verändert werde. Demnach ist

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = -\frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

welche Gleichungen nur noch integrirt werden müssen, um die Verschiebung eines jeden der Punkte des bogenförmigen Stabes anzugeben, sobald die Form des Stabes bekannt ist.

§. 448. Entwickelt man die Wurzelgröße in einer Reihe, so erhält man statt der obigen Ausdrücke

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \frac{1}{8} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^4 + \dots \right\} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

$$dy' - dy = -\frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \frac{1}{8} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^4 + \dots \right\} [P(a-x) + Q(b-y)],$$

In der Praxis wird man wegen der geringen Weite der Curve der Stäbe fast immer bei dem zweiten Gliede der Reihe stehen bleiben können. Selbst bei Vernachlässigung dieses Gliedes wird man in vielen Fällen nur sehr unbedeutende Fehler begehen.

§. 449. Bei einem bogenförmigen Stabe, der auf die in §. 446 angegebene Weise sollicitirt wird, dehnt die Wirkung der Kraft  $P$  die Theile in der Richtung der Länge des Stabes aus; die Wirkung der Kraft  $Q$  hingegen drückt sie zusammen. Die Spannung oder Pressung, welche in einem beliebigen Punkte der Curve eine jede der beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  hervorbringt, erhält man, wenn man diese Kräfte parallel zu der Richtung der Curve in diesem Punkte zerlegt. Bezeichnet man, wie oben, die Pressung durch  $T$ , so hat man hier

$$T = -P \frac{dy}{ds} + Q \frac{dx}{ds},$$

oder

$$T = \frac{-P \frac{dy}{dx} + Q}{\sqrt{1 + \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}^2}}.$$



Anwendung auf den Fall, in welchem die Ase des Stabes ein Parabelbogen ist.

§. 450. In diesem Falle hat man  $y = \frac{bx^2}{a^2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$ ; durch Substitution dieser Werthe in die Formeln des §. 448 findet man

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[ P \left[ ax^2 - \frac{x^3}{2} \right] + Q \left[ bx^2 - \frac{bx^4}{3a^2} \right] \right] + \frac{4b^3}{a^6} \left[ P \left[ \frac{ax^4}{3} - \frac{x^5}{4} \right] + Q \left[ \frac{bx^4}{3} - \frac{bx^6}{5a^2} \right] \right] - \pi. \right\},$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ P \left[ ax - \frac{x^2}{2} \right] + Q \left[ bx - \frac{bx^3}{3a^2} \right] + \frac{2b^2}{a^4} \left[ P \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] + Q \left[ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{5a^2} \right] \right] - \pi. \right\};$$

woraus durch Integration folgt

$$x' - x = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{2b}{a^2} \left[ P \left[ \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right] + Q \left[ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^5}{15a^2} \right] \right] + \frac{4b^3}{a^6} \left[ P \left[ \frac{ax^5}{15} - \frac{x^6}{24} \right] + Q \left[ \frac{bx^5}{15} - \frac{bx^7}{35a^2} \right] \right] - \pi. \right\};$$

$$y' - y = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left[ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] + Q \left[ \frac{bx^2}{2} - \frac{bx^4}{12a^2} \right] + \frac{2b^2}{a^4} \left[ P \left[ \frac{ax^4}{12} - \frac{x^5}{20} \right] + Q \left[ \frac{bx^4}{12} - \frac{bx^6}{30a^2} \right] \right] - \pi. \right\}.$$

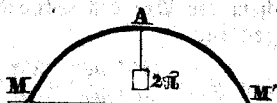
Bezeichnet man mit  $h$  und  $f$  respective die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen, wenn man  $x=a$  setzt,

$$-h = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \pi. \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^3}{105a} - \pi. \right\},$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} - \pi. \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} - \pi. \right\}.$$

§. 451. Man untersuche jetzt einen bogenförmigen Stab  $MAM'$  (Fig. 82), der aus zwei gleichen Hälften besteht, und in

Fig. 82.



verticalen Stellung von zwei Theilen einer Horizontalebene unterstützt wird, während in der Mitte A ein Gewicht  $2\Pi$  thätig ist. Der Stab wird der Wirkung dieses Gewichtes nachgeben, der Scheitel wird sich senken und zugleich werden die beiden Enden sich von einander entfernen. Die Hälfte  $AM$  des Stabes befindet sich in demselben Gleichgewichtszustande, als wenn dieser Theil des Stabes in A horizontal festgehalten und an dem Ende  $M$  nur von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $\Pi$  sollicitirt würde. Setzt man daher in den obigen Gleichungen  $P = -\Pi$  und  $Q = 0$ , und behält aus den Reihen nur die beiden ersten Glieder bei, so drücken die Werthe

$$h = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\},$$

$$-f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} \right\},$$

respective die horizontale Verschiebung eines jeden der beiden Punkte  $M$  und  $M'$ , und die Senkung des Scheitels des Stabes aus. Die Senkung ist etwas größer, als sie bei gleicher Entfernung der beiden Stützen von einander für einen Stab mit geradliniger Arc sein würde.

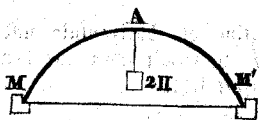
§. 452. Nach der Formel in §. 449 erhält man als den Druck in der Richtung der Curve für einen Punkt, dessen Abscisse gleich  $x$  ist, sehr nahe

$$T = \Pi \left\{ \frac{2bx}{a^2} - \frac{4b^3x^3}{a^6} \right\}.$$

Da hier  $b$  als sehr klein gegen  $a$  angenommen wird, so wird dieser Druck ein Maximum an den Endpunkten  $M$  und  $M'$ , für welche  $x = a$  ist.

§. 453. Man untersuche nun einen bogenförmigen, auf dieselbe Weise belasteten Stab (Fig. 83), aber unter der Voraussetzung, daß die Stützen den beiden Endpunkten  $M$  und  $M'$  nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Jede Hälfte des Stabes ist hier in demselben Gleichgewichtszustande, als wenn sie in A horizontal festgehalten und an dem andern

Fig. 83.



Ende  $M$  oder  $M'$  sollicitirt würde von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $\Pi$  und von einer gewissen Horizontalkraft  $Q$ , deren Größe aus der Bedingung bestimmt werden muß, daß die Punkte  $M$  und  $M'$  keine horizontale Verschiebung erleiden dürfen. Wenn man in den beiden letzten Gleichungen in §. 450 daher  $-\Pi$  für  $P$  und  $h = 0$  setzt, und aus den Reihen nur die

beiden ersten Glieder beibehält, so werden die sich dadurch ergebenden Werthe

$$Q = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\},$$

$$f = -\frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{128} - \frac{23ab^2}{6720} \right\},$$

respective den Horizontalschub des bogenförmigen Stabes *MAM'* gegen die Stützen und die Senkung des Scheitels dieses Stabes ausdrücken. Es ist demnach bei einem Bogen von geringer Spannweite die Senkung des Scheitels fast unabhängig von der Pfeilhöhe des Bogens, und wenn man sie mit dem in §. 86 enthaltenen Werthe für *f* vergleicht, so sieht man, daß sie kaum  $\frac{1}{40}$  derjenigen Senkung beträgt, welche bei einem Stabe mit geradliniger Arc eintreten würde, wenn dieser dieselben Dimensionen hätte. Man darf jedoch nicht vergessen, daß bei der Berechnung des obigen Werthes keine Rücksicht auf die Contraction genommen ist, welche in Folge des Druckes in der Arc des Stabes eintreten muß, und die gemeinschaftlich mit der Biegung dazu beiträgt, den Scheitel der Curve zu senken.

§. 454. In dem in Rede stehenden Falle streben die auf den Stab wirkenden Kräfte nur, denselben zusammenzudrücken. Nach der Formel in §. 449 erhält man, wenn man  $P = -\Pi$  und  $Q = \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\}$  setzt, und nur die Glieder von der Ordnung  $\frac{b^2}{a^2}$  beibehält

$$T = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\},$$

als den Druck in der Richtung der Curve für einen beliebigen Punkt, dessen Abscisse gleich *x* ist. Dieser Druck wird ein Maximum für den Punkt, dessen Abscisse gleich  $\frac{16a}{25}$  ist, der Maximalwerth ist

$$T = \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} + \frac{423b}{700a} \right\}.$$

Anwendung auf den Fall, in welchem die Arc des Stabes ein Kreisbogen ist.

§. 455. Man behalte die in §. 446 gebrauchten Benennungen, welche sich auf Fig. 81 beziehen, bei, und bezeichne ferner mit

*A* den Halbmesser des Kreisbogens, welchen die Arc des Stabes bildet;

$\Phi$  den Werth des Winkels  $\varphi$ , welcher dem Endpunkt der Curve zugehört.

Man untersuche jetzt, wie in jenem Paragraphen geschehen ist, den Fall, in welchem das eine Ende des Stabes horizontal festgehalten und das andere Ende von einer Vertikalkraft  $P$  und einer Horizontalkraft  $Q$  sollicitirt wird. Beachtet man, daß

$$\begin{aligned} x &= A \sin \varphi & a &= A \sin \Phi & ds &= A d\varphi; \\ y &= A(1 - \cos \varphi), & b &= A(1 - \cos \Phi), \end{aligned}$$

so wird sich die Gleichung in §. 447, welche die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand des bogenförmigen Stabes ausdrückt, schreiben lassen

$$\varepsilon(d\varphi - d\varphi) = A^2 \cdot d\varphi [P(\sin \Phi - \sin \varphi) + Q(\cos \varphi - \cos \Phi)];$$

woraus durch Integration folgt

$$\varepsilon(\varphi' - \varphi) = A^2 [P(\varphi \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q(\sin \varphi - \varphi \cos \Phi)].$$

Verfährt man mit diesem Ausdrücke ebenso, wie in dem citirten Paragraphen, so erhält man auf dieselbe Weise

$$\varepsilon(dx' - dx) = -A^2 d\varphi \cdot \sin \varphi [P(\varphi \cdot \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q(\sin \varphi - \varphi \cos \Phi)],$$

$$\varepsilon(dy' - dy) = A^2 d\varphi \cdot \cos \varphi [P(\varphi \cdot \sin \Phi + \cos \varphi - 1) + Q(\sin \varphi - \varphi \cos \Phi)];$$

und hieraus durch Integration

$$\varepsilon(x' - x) = -A^2 \left\{ \begin{aligned} &P[\sin \Phi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \cos \varphi - 1] \\ &Q[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \cos \Phi (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)] \end{aligned} \right\},$$

$$\varepsilon(y' - y) = A^2 \left\{ \begin{aligned} &P[\sin \varphi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1) + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi - \sin \varphi] \\ &Q[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos \Phi (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - 1)] \end{aligned} \right\}.$$

Diese Ausdrücke geben die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes als eine Function des zu diesem Punkte gehörenden Winkels  $\varphi$  an. Setzt man  $\varphi = \Phi$ , so erhält man für die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , welche wir mit  $h$  und  $f$  bezeichnen,

$$- \varepsilon h = A^2 \left\{ \begin{aligned} &P(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi - \Phi \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \cos \Phi - 1) \\ &Q(\frac{1}{2} \Phi - \frac{3}{2} \sin \Phi \cdot \cos \Phi + \Phi \cdot \cos^2 \Phi) \end{aligned} \right\},$$

$$\varepsilon f = A^2 \left\{ \begin{aligned} &P(\Phi \sin^2 \Phi + \frac{3}{2} \sin \Phi \cos \Phi - 2 \sin \Phi + \frac{1}{2} \Phi) \\ &Q(\frac{1}{2} \sin^2 \Phi - \Phi \sin \Phi \cos \Phi + \cos \Phi - 1) \end{aligned} \right\}.$$

§. 436. Der Druck  $T$ , welchen ein beliebiges Element der Curve erleidet, wird durch die Formel ausgedrückt

$$T = -P \sin \varphi + Q \cos \varphi.$$

§. 457. Untersucht man zunächst den Fall, in welchem der Winkel  $\Phi$  nicht sehr beträchtlich ist, so findet man, wenn man keine erhöhte Potenzen von  $\Phi$  nimmt, als die fünfte,

$$-h = \frac{PA^3}{\varepsilon} \frac{5\Phi^4}{24} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{2\Phi^5}{15},$$

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon} \left\{ \frac{\Phi^3}{3} - \frac{3\Phi^5}{20} \right\} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{5\Phi^4}{24};$$

wofür man auch schreiben kann

$$-h = \frac{Pa^3}{\varepsilon} \frac{5a}{24A} + \frac{Qa^3}{\varepsilon} \frac{a^2}{30A^2},$$

$$f = \frac{Pa^3}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{a^2}{60A^2} \right\} + \frac{Qa^3}{\varepsilon} \frac{5a}{24A},$$

wo  $a$  den horizontalen Abstand zwischen den beiden Endpunkten der Curve bezeichnet. Diese Formeln stimmen mit den in §. 450 u. folgd. gegebenen überein, so daß es bei dem in Rede stehenden Grade der Annäherung gleichgültig ist, ob man die Curve als einen Parabelbogen oder als einen Kreisbogen ansieht.

§. 458. Nimmt man ferner an, daß der bogenförmige Stab die Gestalt eines Viertelskreises habe, und setzt in den in §. 455 enthaltenen Formeln  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , so erhält man

$$-h = \frac{PA^3}{\varepsilon} \frac{1}{2} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{\pi}{4},$$

$$f = \frac{PA^3}{\varepsilon} \frac{3\pi - 8}{4} + \frac{QA^3}{\varepsilon} \frac{1}{2}.$$

Wenn es sich um einen Halbkreis handelt, der von zwei Stützen getragen wird, welche den Endpunkten des Halbkreises nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und die Belastung im Scheitel ein Gewicht  $2\Pi$  ist, so setze man, wie in §. 453,  $h = 0$  und  $P = -\Pi$ , woraus folgen wird

$$Q = \frac{2\Pi}{\pi},$$

$$-f = \frac{\Pi A^3}{\varepsilon} \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{4\pi}.$$

Es ist also die Kraft, mit welcher die beiden Endpunkte des Stabes sich von einander zu entfernen streben, oder was man gewöhnlich den Horizontalschub nennt, etwas geringer, als der dritte Theil des Gewichtes  $2\Pi$ , welches im Scheitel des Halbkreises thätig ist.

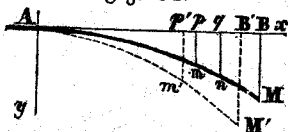
§. 459. Nach der Formel in §. 456 findet man

$$T = \Pi \left\{ \sin \varphi + \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \right\}$$

für den Druck in der Richtung der Curve, welchen ein beliebiges Element des Halbkreises erleidet.

# **Biegung eines bogenförmigen Stabes, der auf seiner ganzen Länge belastet ist.**

§. 460. Man betrachte jetzt den bogenförmigen Stab  $AM$  (Fig. 84) als in  $A$  horizontal festgehalten und in allen seinen Punkten mit Gewichten belastet, deren Wirkung ihn nöthigt, die Lage  $AM'$  anzunehmen. Behält man die in §. 446 angegebenen Bezeichnungen bei und nennt ferner



$p$  das in dem Punkte  $m$  thätige Gewicht, bezogen auf die Längeneinheit und ausgedrückt als Function der Abscisse  $x$  des Punktes  $m$ ;

$x_1$  die Abscisse  $Aq$  eines beliebigen Punktes  $n$ , der zwischen  $m$  und  $M$  liegt;

$p_1$  den Werth von  $p$  für den Punkt  $n$ ;

so hat man, um die Gleichgewichtsbedingungen auszudrücken, statt der Gleichung in §. 447,

$$\varepsilon \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

woraus, wie in dem genannten Paragraphen folgt

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

aus welchen Formeln man die Verschiebung eines jeden Punktes der Curve erfahren kann.

§. 461. Entwickelt man die Wurzelgröße in eine Reihe, so erhält man

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{rc.} \right\} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x),$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \text{rc.} \right\} \int_x^a dx_1 p_1 (x_1 - x).$$

§. 462. Der Druck, welcher in dem Punkte  $m$  stattfindet, ergibt sich, wenn man die Summe der Gewichte, mit denen der

Theil  $mM$  belastet ist, parallel zu der Richtung der Curve in diesem Punkte zerlegt. Dieser Druck ist demnach

$$T = -\frac{dy}{ds} \int_x^a dx_1 p_1, \text{ oder } T = -\frac{\frac{dy}{dx} \int_x^a dx_1 p_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Dieser Werth ist negativ, wenn  $\frac{dy}{dx}$  positiv ist: alsdann wird die Curve nicht zusammengebrückt, sondern in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt.

**Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Ase des Stabes ein Parabelbogen ist.**

§. 463. Ist die Belastung so vertheilt, daß gleiche Gewichte auf gleiche Theile der horizontalen Abscissenaxe  $Ax$  kommen, so ist  $p$  constant, und aus den Formeln in §. 461 wird

$$dx' - dx = -\frac{p}{\varepsilon} dy \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \varepsilon \right\} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$dy' - dy = \frac{p}{\varepsilon} dx \int dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2 - \varepsilon \right\} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

Da die Gleichung der Curve  $y = \frac{bx^2}{a^2}$  und daher  $\frac{dy}{dx} = \frac{2bx}{a^2}$  ist, so hat man

$$x' - x = -\frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} + \frac{bx^5}{15a^2} + \frac{2b^3}{a^6} \left[ \frac{a^2x^5}{15} - \frac{ax^6}{12} + \frac{x^7}{35} \right] - \varepsilon \right\},$$

$$y' - y = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{b^2}{a^4} \left[ \frac{a^2x^4}{12} - \frac{ax^5}{10} + \frac{x^6}{30} \right] - \varepsilon \right\}.$$

Bezeichnet man wieder mit  $h$  und  $f$  respective die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes  $M$ , so hat man, wenn man  $x = a$  setzt und sich auf die beiden ersten Glieder der Reihen beschränkt,

$$-h = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{3a^3b}{20} + \frac{ab^3}{42} \right\},$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60} \right\}.$$

§. 464. Für die Spannung in einem beliebigen Punkte der Curve erhält man nach der Formel in §. 462 sehr nahe

$$T = 2pb \frac{ax - x^2}{a^2} \left\{ 1 - \frac{2b^2x^2}{a^4} \right\}.$$

§. 465. Man untersuche jetzt den bogenförmigen Stab  $MAM'$  (Fig. 85), der aus zwei gleichen Hälften mit parabolischer Arc besteht und in verticaler Stellung von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Die Belastung sei auf die in §. 463 angegebene Weise vertheilt. Jede Hälfte des Stabes



ist in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, als wenn dieselbe in A festgehalten und außer von den auf der Strecke AM oder AM' vertheilten Gewichten an ihrem Endpunkte M oder M' noch sollicitirt würde von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $pa$ , und einer Horizontalkraft  $Q$ , deren Größe aus der Bedingung  $h=0$  bestimmt werden muß. Unter dieser Voraussetzung erhält man die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes, wenn man die in §. 448 und §. 461 erhaltenen Resultate mit einander verbindet. Für die Verschiebungen der Endpunkte erhält man demnach durch Verbindung der in §. 450 und §. 463 erhaltenen Resultate

$$-h = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{8ab^2}{15} + \frac{16b^4}{105a} \right\} + \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{3a^3b}{20} + \frac{ab^3}{42} \right\},$$

$$f = \frac{P}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^3}{3} + \frac{ab^2}{15} \right\} + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ \frac{5a^2b}{12} + \frac{b^3}{10} \right\} + \frac{p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60} \right\}.$$

In dem in Rede stehenden Falle hat man aber  $P = -pa$ , und  $Q$  bestimmt sich aus der Bedingung, daß  $h=0$  sein muß, weßhalb der Horizontalschub gegen die Stützen gleich

$$Q = \frac{pa^2}{2b}$$

ist; und setzt man diesen Werth in den Ausdruck für  $f$ , so findet man  $f=0$ . Diese Resultate stimmen mit denen in §. 440 und §. 442 überein. Da die Gestalt, welche für den bogenförmigen Stab angenommen wurde, mit der Gleichgewichtscurve übereinkommt, so muß man für die Senkung des Scheitels einen Werth gleich Null finden.

§. 466. Wenn der Stab  $MAM'$  (Fig. 85) von derselben parabolischen Gestalt außer der über seine Länge in der oben angegebenen Weise vertheilten Last  $2pa$  in seinem Scheitel noch ein Gewicht  $2\Pi$  trägt, so ist der Horizontalschub gegen die Stützen die Summe von dem eben vorhergehenden Werthe  $Q$  und dem in §. 453 gefundenen, d. h.

$$Q = \frac{pa^2}{2b} + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} \right\}.$$



Die Senkung des Scheitels wird durch den in §. 453 für  $f$  gefundenen Werth ausgedrückt.

§. 467. Der Druck, welchen die einzelnen Theile des Stabes in der Richtung der Länge desselben erleiden, wird durch die Summe der beiden Werthe von  $T$ , welche respective in §. 441 und §. 454 gegeben sind, ausgedrückt, und ist daher

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \frac{pbx^2}{a^2} + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\}.$$

Ist  $16pa - 25\Pi$  positiv, so wird dieser Druck ein Maximum an den Endpunkten  $M$  und  $M'$  und ist hier

$$\frac{pa^2}{2b} + 4pb + \Pi \left\{ \frac{25a}{32b} + \frac{45b}{112a} \right\}.$$

Ist aber  $16pa - 25\Pi$  negativ, so findet das Maximum des Druckes statt in dem Punkte, dessen Abscisse ist <sup>1)</sup>

$$x = a \frac{16\Pi}{25\Pi - 16pa}.$$

**Anwendung auf den Fall, in welchem die Belastung gleichförmig vertheilt und die Ase des Stabes ein Kreisbogen ist.**

§. 468. Ist die Belastung gleichförmig über die Länge des Bogens vertheilt und nennt man  $p$  den Werth des Gewichtes, welches in einem beliebigen Punkte  $m$  (Fig. 84) thätig ist und auf die Einheit der Bogenlänge bezogen gedacht wird, so hat man statt der Gleichung in §. 460

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^3 d\varphi \int_{\varphi}^{\Phi} d\varphi' (\sin \varphi' - \sin \varphi),$$

oder

$$\varepsilon(d\varphi' - d\varphi) = pA^3 d\varphi [\cos \varphi - \cos \Phi - (\Phi - \varphi) \sin \varphi];$$

und durch Integration (zwischen den Grenzen 0 und  $\varphi$ )

$$\varepsilon(\varphi' - \varphi) = pA^3 [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)].$$

Aus dieser Gleichung folgt, wie in §. 460

$$\varepsilon(dx' - dx) = -pA^4 d\varphi \sin \varphi [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)],$$

$$\varepsilon(dy' - dy) = pA^4 d\varphi \cos \varphi [2 \sin \varphi - \varphi (\cos \Phi + \cos \varphi) - \Phi (1 - \cos \varphi)],$$

und durch Integration findet man, da  $p$  als constant angesehen wird,

1) Ist aber  $a \frac{16\Pi}{25\Pi - 16pa} > a$  oder  $16pa - 25\Pi$  positiv, so ist auch jetzt noch die Maximalstelle an den Endpunkten.

$$\varepsilon(x'-x) = -pA^4 \left\{ \frac{5}{4}\varphi - \frac{5}{4}\sin\varphi\cos\varphi - \cos\Phi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \right\},$$

$$\varepsilon(y'-y) = pA^4 \left\{ \frac{5}{4}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2 - \cos\Phi(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1) + \Phi\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\right) \right\}.$$

welche Ausdrücke die horizontale und verticale Verschiebung eines beliebigen Punktes der Curve angeben. Setzt man  $\varphi = \Phi$ , so erhält man für die Verschiebung des Endpunktes

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon} \left\{ \Phi\left(\frac{1}{4} + \cos\Phi + \cos^2\Phi\right) - \frac{3}{4}\sin\Phi\cos\Phi \right\},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon} \left\{ \cos\Phi - \cos^2\Phi + \frac{1}{4}\Phi^2 - \Phi(\sin\Phi + \sin\Phi\cos\Phi) + \frac{5}{4}\sin^2\Phi \right\}.$$

§. 469. Die Spannung in der Richtung der Curve ist für einen beliebigen Punkt derselben

$$T = pA(\Phi - \varphi)\sin\varphi.$$

§. 470. Untersucht man einen Bogen von geringer Spannweite, so geben die Formeln in §. 468, wenn man von  $\varphi$  keine höhere Potenzen beibehält als die fünfte,

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{3\Phi^5}{40}, \text{ oder } -h = \frac{pa^4}{\varepsilon} \frac{3a}{40A},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\Phi^4}{8}, \quad f = \frac{pa^4}{\varepsilon 8},$$

welche Ausdrücke mit den in §. 463 gegebenen übereinstimmen, so daß es, wenn man sich auf diesen Grad der Annäherung beschränken will, gleichgültig ist, ob die Curve angesehen wird als ein Kreisbogen über dessen Länge, oder als ein Parabelbogen, über dessen Horizontalprojection die Belastung gleichförmig vertheilt ist.

§. 471. Ist die Curve ein Viertelkreis, so hat man in den Formeln des §. 468  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  zu setzen, wodurch man für die Verschiebung des Endpunktes erhält

$$-h = \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\pi}{8},$$

$$f = \frac{pA^4}{\varepsilon} \frac{\pi^2 - 8\pi + 20}{16}.$$

§. 472. Wenn auf einen Stab mit kreisbogenförmiger Arc außer dem gleichförmig über seine Länge verbreiteten Gewichte noch eine Vertikalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, und diese an dem andern Endpunkte angreifen, so hat man die in §. 455 und §. 468 für  $h$  und  $f$  gegebenen Werthe zusammen zu nehmen, um die horizontale und verticale Verschiebung des Endpunktes zu erhalten. Im Fall die Arc des Stabes ein Viertelkreis ist, hat man

$$-h = \frac{PA^4 \pi}{8} + \frac{PA^2}{8} \frac{1}{2} + \frac{QA^3 \pi}{8} \frac{1}{4},$$

$$f = \frac{PA^4 \pi^2 - 8\pi + 20}{16} + \frac{PA^3}{8} \frac{3\pi - 8}{4} + \frac{QA^3}{8} \frac{1}{2};$$

und wenn man sich einen auf die angegebene Weise belasteten Stab in Form eines Halbkreises denkt, der von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, so muß man  $P = -pA \cdot \frac{\pi}{2}$  (weil diese Größe den Verticaldruck auf jede Stütze angiebt) und  $h = 0$  setzen. Man erhält hieraus

$$Q = \frac{pA}{2},$$

$$-f = \frac{pA^4 5\pi^2 - 8\pi - 24}{16}.$$

Der Horizontalschub eines Stabes in Form eines Halbkreises gegen zwei Stützen, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, ist demnach gleich der Belastung einer jeden Hälfte multiplicirt mit dem Bruche  $\frac{1}{\pi}$ , also etwas geringer als der dritte

Theil dieser Belastung; der Horizontalschub ist außerdem halb so groß, als er sein würde, wenn die ganze Belastung des Halbkreises im Scheitel desselben thätig wäre. Der obige Werth für  $f$  giebt die Senkung des Scheitels des Halbkreises an. Diese Größe ist hier ebenfalls geringer, als sie sein würde, wenn die ganze Belastung desselben concentrirt wäre, und zwar in dem Verhältnisse von  $5\pi^2 - 8\pi - 24$  zu  $6\pi^2 - 16\pi - 8$ .<sup>1)</sup>

§. 473. Der Druck in der Richtung der Curve ist für einen beliebigen Punkt derselben

$$T = -pA(\Phi - \varphi) \sin \varphi - P \sin \varphi + Q \cos \varphi.$$

Setzt man in dieser Formel  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ , und für  $P$  und  $Q$  ihre respectiven Werthe  $-pA \frac{\pi}{2}$  und  $\frac{pA}{2}$ , so erhält man

$$T = pA \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{2} \right\}.$$

### Bemerkungen über die Benutzung der vorhergehenden Resultate in der Praxis.

§. 474. Die vorhergehenden Resultate geben die Mittel an die Hand, um in den verschiedenen Gleichgewichtsfällen, welche oben untersucht wurden, die Grenzen der zulässigen Belastungen für einen Stab mit bogenförmiger Ase zu bestimmen.

1) D. h. von 0,2152 zu 0,9520 oder von 1 zu 4½.

Bildet die Ase des Stabes die Gleichgewichtscurve, welche der Belastung entspricht, so wird der Stab nur in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt; und da die Dimensionen des Querschnittes gewöhnlich im Verhältniß zur Länge sehr klein sind, so kann man sich den Druck über die ganze Ausdehnung des Querschnittes gleichförmig vertheilt denken. Hat man daher den Maximalwerth des in §. 426 u. folgd. mit  $T$  bezeichneten Druckes berechnet, und nennt  $\omega$  den Inhalt der Querschnittsfläche des Stabes und (nach §. 181 u. folgd.)  $R$  die größte zulässige Belastung einer Faser, deren Querschnittsinhalt gleich der Einheit des Flächenmaßes ist, so kann man die Gleichung setzen

$$R = \frac{T}{\omega},$$

wonach man ein passendes Verhältniß zwischen der Belastung, welche den Druck  $T$  hervorbringt, und den Dimensionen des Stabes wählen kann.

§. 475. Entspricht die Gestalt des Stabes nicht der Gleichgewichtscurve und biegt sich daher der Stab unter der Last, so läßt sich die Grenze der zulässigen Belastungen nach dem in §. 327 Gesagten bestimmen. Man bezeichne nun mit  $\omega$  den Querschnitt des Stabes und mit  $v$  die Entfernung der Gleichgewichtsaue von denjenigen Fasern, die am meisten zusammengedrückt werden. Vermöge des Druckes  $T$ , wofür die Werthe in §. 449 u. folgd. angegeben sind, werden die Fasern zunächst in der ganzen Ausdehnung des Querschnittes um den Bruch  $\frac{T}{E\omega}$  ihrer Länge zusammengedrückt. Durch die Biegung werden sodann die von der Gleichgewichtsaue entferntesten Fasern um den Bruch  $v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  zusammengedrückt, was sich leicht nach §. 77 und §. 446 ergibt. Bezeichnet daher  $R$  die größte zulässige Belastung einer Faser, deren Querschnittsinhalt gleich der Einheit des Flächenmaßes ist, so kann man die Gleichung setzen

$$\frac{R}{E} = \frac{T}{E\omega} + v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$$

aus welcher sich die gesuchte Grenze finden läßt. Man beachte hierbei, daß der Werth, welchen man nach den vorhergehenden Formeln für  $v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  erhält, positiv oder negativ ausfallen muß, je nachdem für den Punkt, zu welchem dieser Werth gehört, der Winkel, den die Normale der Curve mit der verticalen Ase der  $y$  bildet, in Folge der Biegung zu- oder abgenommen hat. Man darf aber hier auf das Vorzeichen dieser Größe keine Rücksicht nehmen, sondern muß den absoluten Werth derselben dem absoluten

Werthe von  $\frac{T}{E\omega}$  hinzufügen. Man wird sich außerdem erinnern, daß  $T$  als positiv angesehen wurde, wenn es einen Druck (negativ hingegen, wenn es eine Spannung) bezeichnete. Findet man daher einen negativen Werth für  $T$ , so zeigt dies an, daß der Stab nicht zusammengedrückt, sondern ausgedehnt wird. Läßt sich nun der Querschnitt durch eine zur Biegungsebene normalen Axe nicht in zwei symmetrische Hälften theilen, so muß  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe (welche nach §. 78 zu bestimmen ist) von der am meisten zusammengedrückten Faser bezeichnen, wenn  $T$  positiv; ist aber  $T$  negativ, so muß  $v'$  den Abstand der Gleichgewichtsaxe von der Faser bezeichnen, welcher am meisten ausgedehnt wird. Endlich wird man die Summe der beiden absoluten Werthe von  $\frac{T}{E\omega}$  und  $v' \frac{d\varphi - d\varphi}{ds}$  als Function der Abscisse  $x$  ausgedrückt erhalten, und es ist klar, daß man denjenigen Werth von  $x$  zu nehmen hat, für welchen die Function so groß wird, wie es in der ganzen Ausdehnung der Curve möglich ist.

§. 476. Man nehme z. B. den in §. 473 untersuchten Fall, wo ein Stab in parabolischer Form vertical von zwei Stützen getragen wird, die den Endpunkten nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und die Belastung ein Gewicht  $2\Pi$  ist, welches im Scheitel des Stabes aufgehängt ist. Nach §. 454 hat man

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{\Pi}{E\omega} \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^3} \right\}.$$

Aus §. 447 folgt

$$\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{P}{\varepsilon} (a - x) + \frac{Q}{\varepsilon} \left\{ b - \frac{bx^2}{a^2} \right\}.$$

wo man  $P$  durch  $-\Pi$  und  $A$  durch den dafür in §. 453 gegebenen Werth zu ersetzen hat. Man hat also

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'\Pi}{\varepsilon} \left\{ -\frac{7a}{32} - \frac{b^2}{28a} + x - \left[ \frac{25}{32a} - \frac{b^2}{28a^2} \right] x^2 \right\}.$$

Der Werth von  $T$  ist in der ganzen Ausdehnung der Curve positiv, so daß der Stab überall in der Richtung der Länge zusammen gedrückt wird. Der Werth von  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ist zuerst negativ, wird darauf positiv und reducirt sich auf Null, wenn  $x=a$  wird. Ohne auf das Vorzeichen dieser Größe Rücksicht zu nehmen, füge man sie dem Werthe von  $\frac{T}{E\omega}$  hinzu, und, indem man die Werthe von  $v'$  und  $\varepsilon$  nach dem darüber in §. 475 Gesagten ermittelt, bestimme man  $\Pi$  so, daß für alle zwischen 0 und  $a$  liegenden Werthe von

$x$  die Summe der Werthe von  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  und  $\frac{T}{E\omega}$  die Grenze  $\frac{K}{E}$  nicht überschreite.

§. 477. Der in §. 465 untersuchte Fall, wo ein ähnlicher Stab mit einem über seine Länge in der in §. 463 angegebenen Weise vertheilten Gewichte  $2pa$  belastet ist, gehört mit zu den Gleichgewichtsfällen, welche in §. 474 erwähnt sind.

§. 478. Bei einem Stabe, wie in §. 455, mit kreisbogenförmiger Ase, dessen oberes Ende horizontal festgehalten wird, während an dem untern Ende eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, hat man nach §. 456

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega} \{ -P \sin \varphi + Q \cos \varphi \};$$

und nach §. 455,

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'A}{\varepsilon} \{ P(\sin \Phi - \sin \varphi) + Q(\cos \varphi - \cos \Phi) \}.$$

§. 479. Handelt es sich, wie in §. 458, um einen Bogen in Form eines Halbkreises, der von zwei Stützen getragen wird, die den Enden nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und dessen Scheitel mit einem Gewichte  $2\Pi$  belastet ist, so hat man  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $P = -\Pi$ ,  $Q = \frac{2\Pi}{\pi}$ ; woraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{T}{E\omega} &= \frac{\Pi}{E\omega} \left\{ \sin \varphi + \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \right\} \\ v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} &= \frac{v'\Pi a}{\varepsilon} \left\{ \sin \varphi - 1 + \frac{2 \cos \varphi}{\pi} \right\}. \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieser Ausdrücke muß man auf das in §. 475 Gesagte Rücksicht nehmen.

§. 480. Hat man, wie in §. 466 einen Bogen von parabolischer Form, der außer dem über seine Länge verbreiteten Gewichte  $2pa$  noch ein im Scheitel aufgehängtes Gewicht  $2\Pi$  trägt, so muß man den Werth von  $T$  nehmen, welcher in §. 467 gegeben ist, und hätte demnach

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega} \left\{ \frac{pa^2}{2b} + \frac{pbx^2}{a^2} + \Pi \left[ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} - \frac{25bx^2}{16a^2} \right] \right\}.$$

Da aber die Biegung allein durch das Gewicht  $2\Pi$  hervorgebracht wird, so ist der Werth von  $v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  derselbe, welcher in §. 476 gegeben ist, und muß daher auf dieselbe Weise angewandt werden.

§. 481. Handelt es sich, wie in §. 472, um einen Stab in Form eines Kreisbogens, der an seinem obern Ende horizontal festgehalten wird und mit einem gleichförmig vertheilten Gewichte  $p$  für jede Längeneinheit belastet ist, während an dem entgegengesetzten Ende eine Verticalkraft  $P$  und eine Horizontalkraft  $Q$  wirken, so ist der Werth von  $T$  die Summe der Werthe, welche in §. 456 und §. 469 gegeben sind, so daß man für das Verhältniß, in welchem ein beliebiges Element der Curve zusammengeedrückt wird, erhält

$$\frac{T}{E\omega} = \frac{1}{E\omega} \left\{ -pA(\Phi - \varphi) \sin \varphi - P \sin \varphi + Q \cos \varphi \right\}.$$

Der Werth des Ausdruckes  $\frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  ist auf gleiche Weise die Summe der Werthe, welche dafür in §. 455 und §. 468 gegeben sind, so daß man hat

$$\begin{aligned} v \cdot \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} &= \frac{v p A^2}{\varepsilon} \left\{ \cos \varphi - \cos \Phi - (\Phi - \varphi) \sin \varphi \right\} \\ &+ \frac{v A}{\varepsilon} \left\{ P(\sin \Phi - \sin \varphi) + Q(\cos \varphi - \cos \Phi) \right\}. \end{aligned}$$

§. 482. Bei einem Bogen in Form eines Halbkreises, der von zwei Stützen getragen wird, die den Enden des Bogens nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, und über dessen Länge ein Gewicht  $\pi p A$  vertheilt ist, setze man  $\Phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $P = -\frac{\pi p A}{2}$ ,  $Q = \frac{p A}{2}$ ; es ergibt sich dadurch

$$\begin{aligned} \frac{T}{E\omega} &= \frac{p A}{E\omega} \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \right\}, \\ v \cdot \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} &= \frac{v p A^2}{\varepsilon} \left\{ \varphi \sin \varphi + \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

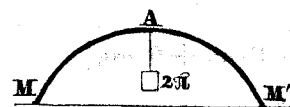
Für die Anwendung dieser Ausdrücke gilt wieder das in §. 465 Gesagte.

**Einfluß des Druckes oder der Spannung in der Ase der bogenförmigen Stäbe auf eine Veränderung ihrer Länge und ihrer Form.**

§. 483. In den verschiedenen Gleichgewichtsfällen, welche oben untersucht wurden, ist auch der Druck  $T$  angegeben, welchen die Längenelemente der Curve in der Richtung derselben erleiden. Dieser Druck hat eine Verkürzung der in §. 446 u. folgd. als unveränderlich angenommenen Länge der genannten Elemente zur

Folge, und diese Verkürzung trägt nächst der Biegung mit dazu bei, die Gestalt des Stabes zu verändern. Da es sich aber nur um sehr kleine Veränderungen handelt, so kann man den Einfluß der Biegung und der Längenverkürzung einzeln berechnen, und von den erhaltenen Resultaten die Summe nehmen.

Man behalte die Benennungen aus §. 446 bei und nenne  $s'$  die Länge des Bogens  $Am'$  (Fig. 86), welche jetzt als verschieden von der Länge des Bogens  $Am$  angesehen wird. Die Verkürzung des Bogenelementes in dem Punkte  $m$ , welche der Druck in der Richtung des Elementes bewirkt, ist jetzt  $ds - ds'$  und die Verkürzung der Längeneinheit also



$\frac{ds - ds'}{ds}$ . Bezeichnet daher  $\omega$  den Querschnitt und  $T$  den Druck in der Richtung der Länge des Stabes für den Punkt  $m$ , so hat man

$$E\omega \frac{ds - ds'}{ds} = T;$$

woraus

$$s - s' = \frac{1}{E\omega} \int dx \cdot T \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

aus welcher Gleichung sich die Längenveränderungen der einzelnen Theile des Stabes finden lassen. Da übrigens die Gestalt des Stabes (d. h. die Curve, welche die Arc desselben bildet) fast dieselbe bleibt, so wird man leicht die Verrückungen der Punkte auffinden können, welche sich aus diesen Längenveränderungen ergeben.

§. 484. Wir wollen z. B. den Fall aus §. 453 untersuchen, wo ein Stab mit parabolischer Arc in verticaler Ebene von zwei Stützen getragen wird, die den Enden nicht erlauben, sich von einander zu entfernen, während die Belastung ein im Scheitel aufgehängtes Gewicht  $2H$  ist. Setzt man  $\frac{2bx}{a^2}$  für  $\frac{dy}{dx}$ , und für  $T$  seinen Werth aus §. 454, so wird aus der obigen Gleichung, wenn man sich auf die Glieder von der Ordnung  $\frac{b^2}{a^2}$  beschränkt,

$$s - s' = \frac{\Pi}{E\omega} \int dx \left\{ \frac{25a}{32b} - \frac{b}{28a} + \frac{2bx}{a^2} \right\},$$

oder

$$s - s' = \frac{\Pi}{E\omega} \left\{ \frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2} \right\}.$$

Bezeichnet man die Totallänge der Theile  $AM$  oder  $AM'$  (Fig. 83) mit  $c$ , und die Länge, welche diese Theile in Folge des Druckes  $T$  annehmen, mit  $c'$ , so erhält man, wenn in der vorhergehenden Gleichung  $x = a$  gesetzt wird,



$$c - c' = \frac{\Pi}{E\omega} \frac{25a^2}{32b} \left\{ 1 + \frac{216b^2}{175a^2} \right\}$$

als die Verkürzung, welche das Gewicht  $\Pi$  bewirkt.

§. 485. Ist derselbe Stab mit einem über seine Länge vertheilten Gewichte  $2pa$  so belastet, wie es §. 442 angenommen wurde, so muß man für  $T$  den in §. 441 gegebenen Ausdruck setzen. Aus der Gleichung in §. 483 wird alsdann

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b} \int dx \left\{ 1 + \frac{4b^2x^2}{a^4} \right\},$$

oder

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b} \left\{ x + \frac{4b^2x^3}{3a^4} \right\};$$

woraus

$$c - c' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^3}{2b} \left\{ 1 + \frac{4b^2}{3a^2} \right\},$$

als die Totalverkürzung jeder Hälfte des Stabes.

§. 486. Ist endlich, wie in §. 466, der Stab zu gleicher Zeit mit einem Gewichte  $\Pi$  im Scheitel und mit einem über seine Länge vertheilten Gewichte  $2pa$  belastet, so wird die Verkürzung die Summe von denen sein, welche in den beiden vorhergehenden Paragraphen berechnet wurden. Man hat also

$$s - s' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^2}{2b} \left\{ x + \frac{4b^2x^3}{3a^4} \right\} + \frac{\Pi}{E\omega} \left\{ \frac{25ax}{32b} - \frac{bx}{28a} + \frac{bx^2}{a^2} \right\},$$

$$c - c' = \frac{p}{E\omega} \frac{a^3}{2b} \left\{ 1 + \frac{4b^2}{3a^2} \right\} + \frac{\Pi}{E\omega} \frac{25a^2}{32b} \left\{ 1 + \frac{216b^2}{175a^2} \right\}.$$

§. 487. Die Senkung des Scheitels der Curve, welche in Folge der Verkürzung eintritt, läßt sich auf folgende Weise berechnen. Für eine Parabel hat man <sup>1)</sup>

$$c = a \left\{ 1 + \frac{1}{3.2} \left[ \frac{2b}{a} \right]^2 - \frac{1}{5.8} \left[ \frac{2b}{a} \right]^4 + \frac{1}{7.16} \left[ \frac{2b}{a} \right]^6 - \dots \right\},$$

$$\left( \frac{2b}{a} \right)^2 = 6 \left\{ \frac{c-a}{a} + \frac{9}{10} \left[ \frac{c-a}{a} \right]^2 \frac{54}{175} - \left[ \frac{c-a}{a} \right]^3 + \dots \right\}.$$

1) Mémoire sur les ponts suspendus, pag. 75. Es ist nämlich, wenn man den Scheitel als Ursprung und den Pfeil als Abscissenaxe ansieht,  $y^2 = \frac{a^2}{b} x$ ,  $\frac{dx}{dy} = \frac{2by}{a^2}$ ,

$$c = \int_0^a dy \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dy} \right)^2} = \int_0^a dy \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{2b}{a} \right]^2 \frac{y^2}{a^2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{2b}{a} \right]^4 \frac{y^4}{a^4} + \dots \right\}$$

woraus sich die erste Gleichung sofort ergibt. Die zweite Gleichung folgt dann leicht durch die gewöhnliche Umkehrung.

Aus der Gleichung folgt

$$\frac{db}{dc} = \frac{3a}{4b} \left\{ 1 + \frac{2.9}{10} \cdot \frac{c-a}{a} - \frac{3.54}{175} \left[ \frac{c-a}{a} \right]^2 + \text{u.} \right\}.$$

Ist daher  $c - c'$  eine kleine Aenderung der halben Länge  $c$  der Curve, und  $b - b'$  die entsprechende Aenderung der Pfeilhöhe  $b$ , so hat man sehr nahe, wenn man sich wieder auf die Glieder von der Ordnung  $\left(\frac{b}{a}\right)^2$  beschränkt,

$$b - b' = \frac{3a}{4b} (c - c').$$

§. 488. Für den Stab mit kreisbogenförmiger Arc muß man die Gleichung in §. 483 schreiben

$$s - s' = \frac{A}{E\omega} \int d\varphi \cdot T,$$

und für  $T$  seinen Werth als Function des Bogens  $\varphi$  setzen, wie dies oben angegeben wurde.

§. 489. Um nun die Senkung des Scheitels zu ermitteln, welche einer gegebenen Länge der Curve des Stabes entspricht, beachte man, daß

$$c = A\Phi = A \cdot \arcsin \frac{a}{A},$$

$$b = A \cos \Phi = A \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right\};$$

differentiirt man zuerst nach  $A$  und setzt nachher für  $\frac{a}{A}$  seinen Werth  $\sin \Phi$ , so erhält man

$$\frac{db}{dc} = \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi - \Phi \cos \Phi};$$

und daher

$$b - b' = \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi - \Phi \cos \Phi} (c - c').^1)$$

1) Man kann dies Resultat auch auf folgende Weise finden. Es ist

$$a = A \sin \Phi \text{ (eine Constante),} \quad da = \sin \Phi \cdot dA + \cos \Phi \cdot A d\Phi = 0$$

$$b = A (1 - \cos \Phi), \quad db = (1 - \cos \Phi) dA + \sin \Phi \cdot A d\Phi$$

$$c = A\Phi, \quad dc = \Phi dA + A d\Phi.$$

Aus der Gleichung für  $da = 0$  folgt  $A d\Phi = -\tan \Phi \cdot dA$

$$db = dA (1 - \cos \Phi - \sin \Phi \tan \Phi),$$

$$dc = dA (\Phi - \tan \Phi),$$

$$\frac{db}{dc} = \frac{1 - (\cos \Phi + \sin \Phi \tan \Phi)}{\Phi - \tan \Phi} = \frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi - \Phi \cos \Phi}$$

wenn man den Bruch im Zähler und Nenner mit  $-\cos \Phi$  multiplicirt.

Ist der Winkel  $\Phi$  sehr klein, so stimmt diese Formel mit der in §. 487 gegebenen überein.

### Versuche und Beobachtungen über den Widerstand einfacher Stäbe mit bogenförmiger Ase.

§. 490. Bei Versuchen, welche Duleau<sup>1)</sup> anstellte, wurde ein schmiedeeiserner Stab von 0,06 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe kalt in die Form eines Kreisbogens von 6,32 Meter Spannweite und 0,7 Meter Pfeilhöhe gebogen. Als dieser Stab darauf vertical zwischen zwei Stützen gestellt wurde, welche den Enden nicht erlaubten sich von einander zu entfernen, bewirkte das eigene Gewicht des Stabes keine merkliche Aenderung in der Gestalt desselben.

Als die Pfeilhöhe des Bogens gleich 0,709 Meter war und der Stab successive mit 20, 120, 220, 260 und 280 Kil. im Scheitel belastet wurde, senkte sich dieser Scheitel successive um 4, 34, 68, 89 und 112 Millimeter. Bei einer Belastung von 288 Kil. wurde der Stab völlig durchgebogen.

Bei einem andern Versuche war die ursprüngliche Pfeilhöhe gleich 0,694 Meter und bei einer successiven Belastung des Scheitels mit 50, 100, 150, 200 und 250 Kil. senkte sich derselbe successive um 10, 22, 39, 57 und 92 Millimeter. Nachdem die Gewichte wieder fortgenommen waren, zeigte sich eine bleibende Senkung des Scheitels von 0,024 Meter. Die völlige Durchbiegung des Stabes erfolgte bei einer Belastung von 270 Kil., welche nicht ganz genau in der Mitte angebracht worden war.

Derselbe Stab stand auf dem Punkte, sich gänzlich durchzubiegen unter zwei Gewichten von 280 und 285 Kil., welche auf jeder Seite nach dem von den Enden aus gerechneten ersten Sechstel der Länge angebracht worden waren.

Derselbe Stab wurde bei einer ursprünglichen Pfeilhöhe von 0,696 Meter in dem Punkte, welcher nach dem ersten Viertel der Länge, von einem Ende aus gerechnet, liegt, successive mit einem Gewichte von 20 bis 100 Kil. belastet, wobei der genannte Punkt sich um 8 bis 45 Millimeter senkte. Der Scheitel der Curve stieg zuerst etwas, er senkte sich später, als die Belastung bis auf 150 Kil. gebracht war. Der Stab bog sich gänzlich durch unter einer Belastung von 177 Kilogramm.

§. 491. Bei den nach den Entwürfen des Colonel Emy ausgeführten gezimmerten Bogen, welche das Dach der Reithahn in der Caserne zu Libourne tragen, ist das Hauptstück jedes Gespärres ein Bogen in Form eines Halbkreises mit 10,6 Meter Halbmesser. Diese Bogen tragen eine Last von 9333 Kil.<sup>2)</sup> Sie bestehen aus

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 44.

2) Mémorial du génie, Nr. 42. Man sehe auch von Emy das Werk: Description d'un nouveau système d'arcs pour les grandes charpentes, Emy scheint anzunehmen, daß bei dem in Rede stehenden Systeme kein Horizontalschub stattfindet. Dies darf man indeß nicht zugeben, wenn auch der Horizontalschub unter gewissen Umständen, wo er sehr schwach ist, keine merkliche Wirkung hervorbringen sollte.

fünf Bogen von Bohlen aus Fichtenholz, welche so gebogen wurden, daß sich die einzelnen Bohlen dicht an einander legen mußten. Jede Bohle ist 0,135 breit und 0,054 Meter dick, und der Querschnitt der fünf Bohlen zusammen ist daher 36 450 Quadratmillimeter. In der Nähe der Anfänge des Bogens, wo der Druck am stärksten ist, erleidet demnach jeder Quadratmillimeter des Querschnittes einen Druck von  $\frac{4667}{36450} = 0,12$  Kilogramm.

### Siebentes Kapitel.

**Ueber die verschiedenen Formen, in denen einfache Stäbe bei Constructionen vorkommen. Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.**

§. 492. Es wurde bisher angenommen, daß die Gestalt der Stäbe, mit denen wir uns beschäftigten, eine prismatische sei. Die Mehrzahl der Stäbe, welche bei Holzconstructionen vorkommen, hat wirklich eine solche Gestalt; bei den Eisenconstructionen aber, und besonders, wenn man Gußeisen anwendet, giebt man den Stäben diejenige Form, welche sich der Natur der Belastungen angemessen zeigt. Auf diese Weise erhält man eine gleiche Widerstandsfähigkeit bei einem geringern Aufwande von Material und Unkosten.

Die Dimensionen eines Stückes sind besonders aus der Untersuchung der Widerstandsfähigkeit gegen den Bruch zu bestimmen. Man wird in der That den Stücken eine solche Stärke geben müssen, daß die Ausdehnungen und Zusammendrückungen, denen die einzelnen Theile ausgesetzt sind, eine bestimmte Grenze nicht überschreiten können. Die Formeln für den Widerstand gegen den Bruch lassen sich hier anwenden, wenn man nur, in Uebereinstimmung mit dem siebenten Kapitel des ersten Abschnittes, einen passenden Werth für die Constante annimmt, welche das Maximum des Widerstandes repräsentirt, den die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes leisten können.

Die einfachste Form, welche man einem Stabe geben kann, ist die eines rechtwinkligen Prisma's. Diese Form läßt sich dadurch modificiren, daß man einen andern Querschnitt wählt; ohne dem Stabe seine prismatische Gestalt zu nehmen, oder daß man dem Querschnitte an den einzelnen Stellen der Länge des Stabes verschiedene Dimensionen giebt.

## Ueber die zweckmäßigste Gestalt des Querschnittes.

§. 493. Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, in welchem die Kräfte rechtwinklig zur Längsaxe des Stabes wirken und die Richtung der Biegung daher bestimmt ist, wie z. B. bei einem horizontalen Stabe, der mit Gewichten belastet ist. Nimmt man für den Querschnitt eine rechteckige Gestalt an, und nennt

$b$  die Breite,

$c$  die Höhe desselben, während

$E$  und  $R$  die dafür in §. 77 und §. 113 angegebenen Bedeutungen haben, so ist nach §. 81 das Elasticitätsmoment

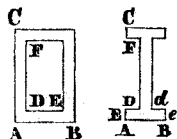
$$\varepsilon = E \frac{bc^3}{12},$$

und nach §. 115 das Moment des Widerstandes gegen den Bruch

$$Q = R \frac{bc^2}{6}.$$

Bleibt der Inhalt des Querschnittes derselbe, so nimmt der Widerstand proportional mit der Höhe  $c$  zu. Im Allgemeinen kann man aber nicht über eine gewisse Grenze hinaus die Höhe  $c$  vergrößern und die Breite  $b$  vermindern, weil der Stab nicht mehr die nöthige Stabilität besitzet und in der horizontalen Richtung einen gar zu geringen Widerstand leisten würde.

§. 494. Ohne die Querschnittsfläche und den Widerstand zu ändern, kann man dem Stabe eine größere Stabilität dadurch geben, daß man für den Querschnitt die Gestalt eines hohlen Rechtecks (Fig. 87) oder zweier einander entgegengesetzter  $T$  (Fig. 88) wählt.   
 Fig. 87. Fig. 88.



Nennt man

$b$  die äußere Breite  $AB$ ,

$b'$  die innere Breite  $DE$  (Fig. 87) oder die Summe der Breiten  $DE, de$  (Fig. 88),

$c$  die äußere Höhe  $AC$ ,

$c'$  die innere Höhe  $DF$ ,

so ist das Elasticitätsmoment

$$\varepsilon = E \frac{bc^3 - b'c'^3}{12},$$

und das Moment des Widerstandes gegen den Bruch

$$Q = R \frac{bc^3 - b'c'^3}{6b}.$$

Wäre der Querschnitt ein volles Rechteck und sollte es den beiden eben genannten Figuren an Inhalt und Widerstand gleichstehen,

so müßten die Breite und die Höhe des Rechteckes respective gleich

$$\frac{(bc-b'c')^2b}{bc^2-b'c'^2} \text{ und } \frac{bc^2-b'c'^2}{(bc-b'c')b}.$$

sein. Die in Fig. 87 und 88 dargestellten Querschnitte scheinen die passendsten zu sein, welche man in dem in Rede stehenden Falle wählen kann. Dabei scheint der erstere von den beiden Querschnitten noch etwas mehr Solidität zu gewähren, als der zweite; ist das Material aber Gußeisen, so ist es schwer, Röhren mit rechteckigem oder kreisförmigen Querschnitt fehlerfrei herzustellen.<sup>1)</sup>

§. 495. Handelt es sich um ein mit Gewichten belastetes Horizontalstück, welches der Last nach und nach seine verschiedenen Seiten darbieten muß, wie dies z. B. bei den Horizontalaxen der rotirenden Maschinen stattfindet, so hat man einen solchen Querschnitt zu wählen, daß der Widerstand des Stückes gegen die Biegung nach allen Richtungen gleich groß ist. Ein massiver Cylinder und ein cylindrisches Rohr haben offenbar diese Eigenschaft und nach §. 83 besitzen ein massives Prisma mit quadratischem Querschnitt und ein solches Rohr sie ebenfalls.<sup>2)</sup> Das Gleiche findet statt, wenn der Querschnitt eine solche Gestalt hat, wie sie Fig. 89 und 90

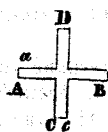


Fig. 89. darstellt. Nennt man bei der ersteren Figur  $b$  die äußere Dimension  $AB$  oder  $CD$ ,  $\beta$  die Breite  $Aa$ ,  $Cc$  eines jeden der Rechtecke, welche sich rechtwinklig durchkreuzen, so ist das Moment des Widerstandes gegen die Biegung, und zwar für jede beliebige Richtung,

$$E = E \frac{b^3\beta + \beta^3b - \beta^4}{12}.$$

- 1) Die einzelnen Theile solcher gußeiserner Röhren müssen fast gleiche Dimensionen erhalten, damit die bei der Abkühlung des Gusses stattfindende Contraction desselben keine Trennung der Theile veranlasse.
- 2) Ueber die passendste Form für rotirende Axen findet man Untersuchungen in den *practical Essays on mill-work* von Buchanan mit Noten von E. Tredgold, 1823, Theil I, pag. 262, so wie in dem *practical Essay on the strength of cast iron* des Verrieren, 1824, pag. 59. Tredgold scheint den Kreis für den einzigen Querschnitt zu halten, welcher die Axen befähigt, der Biegung in jeder Richtung einen gleichen Widerstand zu leisten. Dieser Irrthum hat darin seinen Grund, daß der genannte Ingenieur für den Widerstand gegen die Biegung denselben Ausdruck als Maß gelten läßt, welcher den Widerstand gegen den Bruch mißt. Es ist schon angemerkt, daß bei einem quadratischen Querschnitte der Widerstand gegen die Biegung in der Richtung der Seiten ebenso groß ist, wie in der Richtung der Diagonalen. Dasselbe gilt auch für jede andere Richtung, und die gleiche Eigenschaft besitzt eine Menge von Figuren, die sich durch eine symmetrische Combination des Kreises mit dem Quadrate bilden lassen. Hieraus muß man schließen, daß bei den durch hervorragende Rippen verstärkten Axen, welche die Engländer gefiederter Wellen (*feathered shafts*) nennen, wenn diese sich nicht so brauchbar zeigen, als massive Axen mit quadratischem oder kreisförmigen Querschnitt, dies wahrscheinlich daher kommt, daß sie der Torsion nicht so gut widerstehen können, nicht aber in einem ungleichen Widerstande gegen die Biegung seinen Grund hat.

Das Bruchmoment ist für die Richtung der Seiten der Rechtecke

$$q = E \frac{b^3\beta + b\beta^3 - \beta^4}{6b};$$

und für die Richtung der Diagonale des Quadrates, dem die Figur eingeschrieben werden kann,

$$q = R \frac{\sqrt{2(b^3\beta + b\beta^3 - \beta^4)}}{6(b+\beta)}.$$

§. 496. Nennt man in Fig. 90

Fig. 90.

$b$  die äußere Dimension  $AB$  oder  $CD$ ,

$b'$  die Dimension  $A'B'$  oder  $A'C'$ ,

$\beta$  die Breite  $Aa$ ,  $Cc$  der Rechtecke, welche aus dem Quadrate heraustreten,

so ist das Moment des Widerstandes gegen die Biegung für jede beliebige Richtung

$$\epsilon = E \frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3}{12}.$$

Das Bruchmoment ist für die Richtung der Seiten

$$q = R \frac{b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3}{6b};$$

und für die Richtung der Diagonale,

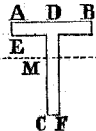
$$q = R \frac{\sqrt{2[b'^4 + (b^3 - b'^3)\beta + (b - b')\beta^3]}}{6(b+\beta)}.$$

§. 497. Wir wollen jetzt ein Verticalstück untersuchen, dessen obere Endfläche belastet ist. Da die Richtung der Biegung hier unbestimmt ist, so muß man entweder ein Rohr mit kreisförmigen oder quadratischem Querschnitt anwenden, oder auch eine von den in §. 405 angegebenen, symmetrischen Figuren als Querschnitt wählen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß man sicher sei, daß die Kraft stets genau in der Richtung der Axe des Stabes wirken werde. Zuweilen geschieht es aber, daß die Kraft ein Bestreben hat, auf eine der Seitenflächen des Stabes zu wirken, wie dies z. B. bei den schief stehenden Stücken der Fall ist, welche als Streben dienen. Alsdann kann man einen der in Fig. 91 u. 92

Fig. 91.

Fig. 92.

dargestellten Querschnitte wählen, von denen der erste häufig angewandt wird.



Man nenne

$b$  die Breite  $AB$  des Rechteckes, dem die Figur eingeschrieben ist;

$c$  die Höhe  $CD$  dieses Rechteckes;

$\beta$  die Dicke  $CF$  des Seitenstückes;

$\gamma$  die Dicke  $AE$  des Vorderstückes;

$z$  den Abstand  $DM$  der Vorderfläche  $AB$  von der Gleichgewichtssaxe, welche den Querschnitt der Fasern bildet, deren Länge durch die Biegung nicht verändert wird.

Bevor sich der Werth des Momentes des Widerstandes gegen die Biegung auffinden läßt, muß man nach Vorschrift der §§. 78 und 80 die Lage der Gleichgewichtssaxe ermitteln. Aus der in §. 78 ausgesprochenen Bedingung folgt hier

$$bz^2 - (b - \beta)(z - \gamma)^2 = \beta(c - z)^2,$$

woraus

$$z = \frac{1}{2} \cdot \frac{b\gamma^2 - \beta\gamma^2 + \beta c^2}{b\gamma - \beta\gamma + \beta c}.$$

Das Moment des Widerstandes gegen die Biegung ist nach der Formel in §. 80

$$\varepsilon = \frac{E}{3} [bz^3 - (b - \beta)(z - \gamma)^3 + \beta(c - z)^3],$$

in welche Formel man für  $z$  seinen eben angegebenen Werth zu setzen hat.

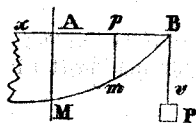
Beachtet man, daß die in §. 113 mit  $v'$  bezeichnete Entfernung hier gleich  $CM$  oder  $c - z$  ist, so ist nach dem genannten Paragraphen der Werth des Bruchmomentes

$$Q = \frac{R}{3} \cdot \frac{bz^3 - (b - \beta)(z - \gamma)^3 + \beta(c - z)^3}{c - z}.$$

### Ueber die zweckmäßigste Gestalt des Längenschnittes.

§. 498. Bei einem prismatischen Stabe giebt es im Allgemeinen eine Stelle in der Länge desselben, welche dem Bruche mehr ausgesetzt ist, als alle übrigen. Leistet der Stab an dieser Stelle einen ausreichenden Widerstand, so ist er an allen übrigen Stellen stärker, als es nothwendig ist. Es läßt sich nun die Gestalt eines Stabes so bestimmen, daß der Widerstand überall genügend, und nirgend überflüssig groß wird, und einen Stab, dessen Gestalt so bestimmt worden ist, nennt man einen Körper von gleichem Widerstande. Einige Beispiele werden hinreichen, um zu zeigen, wie solche Untersuchungen zu führen sind, da diese keine Schwierigkeiten darbieten.

Es stelle Fig. 93 einen Körper vor, dessen eines Ende horizontal festgehalten wird, während an dem andern Ende ein Gewicht  $P$  wirkt; die beiden Seitenflächen werden von zwei Verticalebenen und die obere Endfläche von einer Horizontalebene gebildet.



Man nenne



$a$  die Länge  $AB$  des Körpers;  
 $b$  die Breite desselben;  
 $c$  die Höhe  $AM$  des festgehaltenen Endes;  
 $x$  und  $v$  die Abscisse  $Bp$  und die Ordinate  $pm$  der Curve  
 $BM$ , welche den Körper nach unten begrenzt, und  
 $R$  behalte die dafür in §. 113 angegebene Bedeutung.

Um die Höhe des Körpers in  $AM$  zu bestimmen, hat man zuerst

$$R \frac{bc^2}{6} = Pa, \text{ woraus } c = \sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}.$$

Um die Gestalt der Curve  $BmM$  zu bestimmen, hat man sodann

$$R \frac{bv^2}{6} = Px, \text{ woraus } v^2 = \frac{c^2 x}{a},$$

diese Curve ist also eine Parabel, deren Axe  $BA$  ist.

§. 499. Wollte man die Gestalt kennen, welche der Körper  $ABM$  annehmen wird, wenn er sich unter dem Gewichte  $P$  biegt, so verfahre man, wie folgt. Das Moment des Widerstandes gegen die Biegung ist hier für einen beliebigen Querschnitt  $pm$

$$\varepsilon = E \frac{bv^3}{12} = E \frac{bc^3 x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet man also, wie in §. 85, mit  $y$  die Ordinate der Curve, welche der Körper nach der Biegung bildet, so hat man für die Gleichgewichtsgleichung

$$E \frac{bc^3 x^{\frac{3}{2}}}{12a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = Px,$$

woraus folgt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{E} \frac{12a^{\frac{3}{2}}}{bc^3 x^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E} \frac{24a^{\frac{3}{2}}}{bc^3} \left\{ x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$y = \frac{P}{E} \frac{24a^{\frac{3}{2}}}{bc^3} \left\{ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$f = \frac{P}{E} \frac{8a^3}{bc^3}.$$

Dieser Werth von  $f$  oder die Senkung des Endpunktes  $B$  ist doppelt so groß, als derjenige, welcher stattfinden würde, wenn alle Querschnitte des Körpers dieselbe Höhe  $b$  hätten.

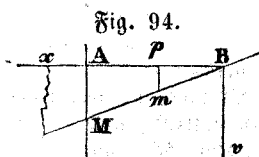


Fig. 94.

§. 500. Bei einem Körper (Fig. 94), über dessen Länge ein Gewicht gleichförmig vertheilt ist, hat man, wenn die früheren Benennungen beibehalten werden und  $p$  das Gewicht genannt, welches die Längeneinheit trägt,

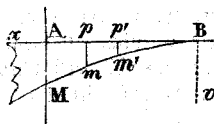
$$R \frac{bc^2}{6} = pa \cdot \frac{a}{2}, \text{ woraus } c = a \sqrt{\frac{3p}{Rb}};$$

ferner

$$R \frac{bv^2}{6} = px \cdot \frac{x}{2}, \text{ woraus } v = \frac{cx}{a}.$$

Der Körper wird nach unten von einer Ebene begrenzt.

§. 501. Besteht die Belastung des Körpers (Fig. 95) nur in dem eigenen Gewichte desselben, und nennt man



$p$  das Gewicht einer Volumeneinheit des Körpers;

$x$  die Abscisse  $Bp$ , zu welcher die Ordinate  $v$  gehört;

$x'$  die Abscisse  $Bp'$  eines beliebigen Punktes zwischen  $B$  und  $m$ , zu welcher die Ordinate  $v'$  gehört;

so hat man

$$p \int_0^x dx' (x-x') v' = R \cdot \frac{v^2}{6}.$$

Differentiirt man zweimal nach einander nach  $x$ , so erhält man

$$p \int_0^x dx' \cdot v' = \frac{R}{6} \frac{dv^2}{dx}, \quad pv = \frac{R}{6} \cdot \frac{d^2 v^2}{dx^2},$$

und das Integral hiervon ist

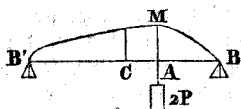
$$v = \frac{px^2}{2R},$$

die Curve  $BM$  ist also eine Parabel, deren Axe  $Bv$  ist.

Dieselben Fragen wird man leicht auflösen, wenn die Querschnitte sämmtlich Kreise sind, deren Mittelpunkte sich auf derselben Horizontallinie befinden; wenn die Querschnitte sämmtlich ähnliche Rechtecke sind; wenn das Gesetz für die Breiten und Höhen solcher Rechtecke gegeben ist; u. s. w.

§. 502. Wir wollen ferner einen Körper (Fig. 96) untersuchen, der horizontal auf zwei Stützen gelegt und in  $M$  mit einem Gewichte  $2P$  belastet ist. Nennt man

Fig. 96.



- $b$  die Breite des Körpers;  
 $c$  die Höhe  $AM$  in dem Punkte, wo  
das Gewicht aufgehängt ist;  
 $a$  die halbe Entfernung  $CB$  der bei-  
den Stützen von einander;  
 $z$  die Entfernung  $AC$ ;

so hat man

$$R \frac{bc^2}{6} = P \frac{a^2 - z^2}{a}, \quad \text{woraus} \quad c = \sqrt{\frac{6P(a^2 - z^2)}{Rab}};$$

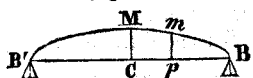
und die beiden Curventheile  $BM$ ,  $BM$  werden zu zwei Parabeln gehören, deren Axc mit der Geraden  $BB'$  zusammen fällt.

§. 503. Soll unter der Voraussetzung, daß das Gewicht  $2P$  in einem beliebigen Punkte der Strecke  $BB'$  aufgehängt werde, der Körper stets den nöthigen Widerstand leisten, so muß die Ordinate der Curve, welche den Körper nach oben begrenzt, überall dem obigen Ausdrucke für  $c$  Genüge leisten. Dieser Ausdruck entspricht

einer Ellipse, deren kleine Axc gleich  $\sqrt{\frac{6Pa}{Rb}}$  ist, und da diese Ellipse die einhüllende Curve für die Parabeln ist, welche den Körper nach oben begrenzen, wenn das Gewicht  $2P$  in einem bestimmten Punkte der Länge aufgehängt ist, so wird ein nach dieser Ellipse profilirter Körper an allen Stellen, mit Ausnahme dieses einen Punktes, einen Ueberschuß an Widerstand darbieten.

§. 504. Wir wollen ferner einen Körper (Fig. 97) unter-

Fig. 97.



suchen, der horizontal auf zwei Stützen gelegt und mit über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichten belastet ist.

Man nenne

- $p$  das Gewicht, welches von der Einheit der Länge getragen wird;  
 $a$  die halbe Entfernung  $BC$  der Stützen von einander;  
 $b$  die constante Breite des Körpers;  
 $c$  die Höhe  $CM$  des Körpers in der Mitte zwischen den beiden Stützen;

$x$ ,  $v$  die Abscisse  $Cp$  und die Ordinate  $pm$  der Curve, welche den Körper nach oben begrenzt,

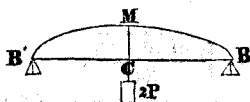
und beachte, wie in §. 90, daß jede Hälfte des Körpers einen eben solchen Widerstand leistet, wie ein Stab, der an einem Ende horizontal festgehalten wird, während am andern Ende eine Verticalkraft  $pa$  und über die ganze Länge des Stabes vertheilt eine entgegengesetzt gerichtete Kraft  $pa$  wirkt. Man hat alsdann

$$R \frac{bc^2}{6} = \frac{1}{2} pa^2, \quad \text{woraus} \quad c = a \sqrt{\frac{3p}{Rb}};$$

$$R \frac{bv^2}{6} = pa(a-x) - \frac{1}{2} p(a-x)^2, \quad v = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Die Curve  $BMB'$  muß also eine halbe Ellipse sein.

§. 505. Trägt der Körper außer dem über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichte noch ein Gewicht  $2P$ , welches in der Mitte zwischen den beiden Stützen aufgehängt ist (Fig. 98), so hat man, wenn man die früheren Benennungen beibehält,



$$R \frac{bc^2}{6} = \frac{1}{2} pa^2 + Pa,$$

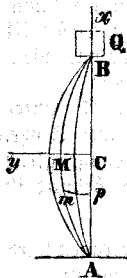
$$R \frac{bv^2}{6} = (pa+P)(a-x) - \frac{1}{2}p(a-x)^2,$$

woraus

$$c = \sqrt{\frac{3a(pa+2P)}{Rb}},$$

$$v = c \sqrt{\frac{p(a+x)+2P(a-x)}{(pa+2P)a}}.$$

§. 506. Wir wollen ferner ein Verticalstück (Fig. 99), dessen oberes Ende mit einem Gewichte  $Q$  belastet ist, unter der Voraussetzung untersuchen, daß sämtliche Querschnitte des Körpers Kreise seien. Man nenne



$a$  die halbe Länge  $AC$  oder  $BC$  des Körpers;  
 $x, y$  die Abscisse  $Cp$  und die Ordinate  $mp$  der Curve, welche die Ase des Körpers (in Folge der Biegung) bildet;

$f$  den Pfeil  $CM$  dieser Curve;

$r$  den Halbmesser des Querschnittes in  $m$ .

Nimmt man an, daß der Körper nur eine sehr geringe Krümmung habe, wenn er kurz vor dem Bruche ist, so läßt sich die Untersuchung vereinfachen, wenn man die Curve, welche der Körper bildet, als eine Parabel ansieht, deren Gleichung

$$y = f \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}.$$

ist. Die Gleichgewichtsgleichung ist alsdann

$$R \frac{\pi r^3}{4} = Qy, \text{ oder } r^3 = \frac{4Qf}{\pi R} \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}.$$

Man hat also einen Körper von gleichem Widerstande, wenn  $r$  der Größe  $(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$  proportional ist. Der Durchmesser der Querschnitte nimmt dann ab von der Mitte aus nach den beiden Enden hin, und diese letzteren müssen in eine Spitze auslaufen.

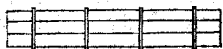
§. 507. Es kann in der Praxis oft von Nutzen sein, sich den Formen zu nähern, in welchen die Körper von gleichem Wider-

stände sind, wenn man den Extremitäten der Stücke eine genügende Stärke gegeben hat. Hauptsächlich ist dies beim Gußeisen und bei allen solchen Stücken der Fall, gegen deren Längsaxe die Kraft rechtwinklig wirkt. Bei solchen Stücken, die in der Richtung ihrer Länge zusammengeedrückt werden, ist es gut, ihnen in der Nähe der Mitte eine größere Dicke zu geben, wenn die Länge im Verhältniß zur Dicke beträchtlich ist, doch müssen auch die Enden stets eine solche Stärke erhalten, daß sie von dem Drucke nicht zerquetscht werden können. In vielen Fällen ist es sogar vortheilhaft, den Enden die Form einer Säulenbasis (ombase) zu geben, welche die Wände berühren muß, zwischen denen sich der Körper befindet. Eine solche Einrichtung strebt, dem Körper jenen Ueberschuß an Widerstand zu geben, welchen er (nach §. 393) leisten würde, wenn die Enden eingemauert wären.

### Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.

§. 508. Besteht ein Stück aus mehreren Theilen, so hängt die Größe des Widerstandes von der Art ab, auf welche diese Theile mit einander verbunden sind.

Wir untersuchen zunächst eine Verbindung von mehreren über einander gelegten Stäben (Fig. 100) unter der Voraussetzung, daß diese durch eiserne Bänder so zusammen gehalten werden, daß sie bei der Biegung fortwährend mit einander in Berührung bleiben, obwohl sie sich über einander verschieben können.



Der Widerstand eines solchen Systemes ist gleich der Summe der Widerstände, welche die einzelnen Stäbe leisten. Ist daher der Querschnitt der Stäbe rechteckig, und nennt man

$b$  die gleiche Breite der über einander gelegten Stäbe;

$c$  die Höhe jedes einzelnen Stabes;

$n$  die Anzahl der Stäbe, und behalten

$\varepsilon$  und  $q$  die dafür in §. 80 und §. 113, so wie

$E$  und  $R$  die dafür in §. 77 und §. 113 angegebenen Bedeutungen;

so hat man (nach §. 81) für das Moment des Widerstandes gegen die Biegung

$$\varepsilon = nE \frac{bc^3}{12};$$

und (nach §. 115) für das Bruchmoment,

$$q = nR \frac{bc^2}{6}.$$

Es ist hier von der Wirkung der Reibung abgesehen, welche durch die Kraft entsteht, mit der die Stäbe während der Biegung gegen einander gepreßt werden. Für den Widerstand des Systemes ist

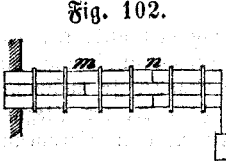
es gleichgültig, ob die Stäbe in der Richtung der Biegung über einander oder neben einander liegen.

§. 509. Besteht die eben untersuchte Verbindung aus Stäben, die in der Richtung der Länge in mehrere Theile zerfallen (Fig. 101), so muß man das Widerstandsmoment gegen die Biegung



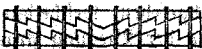
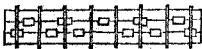
als in den einzelnen Theilen verschieden ansehen. Für den Theil  $mm$  ist das Widerstandsmoment gegen die Biegung gleich der Summe der Momente der drei über einander gelegten Stäbe; für den Theil  $nn$  ist es nur die Summe der Momente von zweien dieser Stäbe. So viel es möglich ist, sind die Stöße so anzubringen, daß nicht mehrere in eine Ebene fallen; und ist dies geschehen, so kann man den Biegungs- oder Bruchwiderstand des Systemes, als die Summe der Widerstände sämtlicher Stäbe, mit Ausnahme von einem, ansehen.

In einigen Fällen kann man sogar, bei passender Anordnung der Stöße, den Widerstand des Systemes als der Summe der Widerstände der über einander gelegten Stäbe gleich annehmen. Ist z. B. der Körper, welchen Fig. 102 darstellt und der aus drei



über einander gelegten Stäben besteht mit dem einen Ende eingemauert und an dem andern Ende belastet, so ist der Widerstand in dem Befestigungspunkte gleich der Summe der Widerstände der drei Stäbe. In den Punkten  $m$  und  $n$ , die in dem ersten und zweiten Dritteltheil der Länge liegen mögen, ist der Widerstand des Systemes respective nur zwei und ein Dritteltheil des vorigen; da aber die Wirkung des Gewichtes  $P$ , um eine Biegung oder den Bruch in diesen Punkten zu erzeugen, auch respective nur zwei und ein Dritteltheil von der Wirkung dieses Gewichtes auf den Befestigungspunkt beträgt, so ist der Widerstand des Systemes überall wenigstens eben so groß, wie in diesem Punkte. Die Theile des obern und untern Stabes, welche jenseit des Punktes  $n$  liegen, könnten offenbar fortgelassen werden, ohne den Widerstand zu schwächen, welchen das System dem Bruche entgegen setzt.

§. 510. Sind mehrere über einander gelegte Stäbe (Fig. 103) durch eine Verzahnung oder durch Keile mit einander verbunden und werden sie durch eiserne Bänder kräftig zusammen gehalten, so wird der Widerstand, den eine solche Verbindung der Biegung oder dem Bruche entgegensetzt, nicht merklich von dem Widerstande abweichen, den ein einzelner Stab mit denselben Dimensionen leisten würde.



§. 511. Sind zwei einzelne Stäbe (Fig. 104) so mit einander verbunden, daß eine Linie, welche man vor der Biegung normal zur Länge zieht, nach der Biegung eine gemeinschaftliche Normale für die beiden Curven ist, welche die Stäbe dann bilden, so findet man den Widerstand des



Systemes, wenn man von dem Biegemomente des als massiv betrachteten Körpers das Biegemoment eines zwischen den beiden Stäben liegenden Körpers abzieht. Nennt man daher

$b$  die gleiche Breite der beiden Stäbe;

$c_1$  die Höhe der Verbindung;

$c_2$  die Höhe des Raumes zwischen den beiden Stäben;

so erhält man für das Moment des Widerstandes gegen die Biegung

$$\varepsilon = E \frac{b(c_1^3 - c_2^3)}{12},$$

und für das Bruchmoment,

$$q = R \frac{b(c_1^3 - c_2^3)}{6c_1}.$$

Bei einer parallelen Lage der beiden Stäbe läßt sich die Hypothese, auf welche sich die gegebenen Formeln stützen, nur dann erfüllen, wenn die Stäbe durch eine Reihe von Querstücken und Andreakreuzen, oder durch Keile, welche in Einschnitten liegen, mit einander verbunden sind. Fig. 104 stellt diesen Fall dar. Ist aber der eine der Stäbe bogenförmig, Fig. 105, oder sind sie es

Fig. 105.



beide, so genügt, um die obigen Formeln anwenden zu können, einer Verbindung mittelst einfacher Querstücke, wenn die Stäbe nur an ihren Enden so verbunden werden, daß sie nicht auf einander gleiten können. Vortheilhaft wird es sein, in den einzelnen Fällen die Krümmung der Stäbe nach den in

dem vorhergehenden Kapitel entwickelten Principien so zu bestimmen, daß das System von gleichem Widerstande wird.

§. 512. Bei den in Fig. 104 und 105 dargestellten Systemen erleidet der Stab, welcher sich auf derjenigen Seite befindet, die bei der Biegung concav wird, nur einen Druck in der Richtung seiner Längsaxe, und man kann ihn daher durch mehrere Theile ersetzen, welche mit ihren Enden so zusammen stoßen müssen, daß sämtliche Theile in der Verlängerung jedes einzelnen liegen. Dasselbe gilt für den Stab, welcher sich auf der Seite befindet, die bei der Biegung convex wird, und welcher einem Zuge in der Richtung seiner Längsaxe zu widerstehen hat, wenn die Theile nur so mit einander verbunden werden, daß die Verbindung derselben einen

eben so großen Widerstand leistet, als der Stab selbst. Eine solche Vertheilung des obern und untern Stabes wird den Widerstand des Systemes nicht merklich schwächen.

§. 513. Ist die Natur der Kräfte bekannt, welche auf die einzelnen Stücke einer Verbindung dieser Art wirken, so kann man für jeden Theil das vortheilhafteste Material wählen. Die Wahl wird durch die Bedingung bestimmt, einen gegebenen Widerstand bei möglichst geringen Kosten zu erhalten. Hält man die respectiven Widerstände des Guß- und Schmiedeeisens gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung mit den Preisen dieser Materialien zusammen, so wird man finden, daß es stets vortheilhaft ist, für solche Stücke, welche eine Zusammenrückung erleiden, Gußeisen, hingegen für solche Stücke, welche eine Ausdehnung erleiden, Schmiedeeisen zu nehmen. Diese Anordnung bietet auch eine größere Sicherheit, wenn die Construction Stößen ausgesetzt ist, da das Schmiedeeisen oft eine plötzliche Ausdehnung erleiden kann, ohne zu zerreißen, welche Eigenschaft das Gußeisen fast gänzlich entbehrt.

Eichen- oder Tannen- (Fichten-) Holz kommt bei demselben Widerstande gegen Zerdrücken und gegen Ausdehnung billiger zu stehen, als Schmiede- oder Gußeisen; auch hat es weniger von der Wirkung der Stöße zu fürchten, aber es steht dem Eisen an Dauer nach, wenn die Feuchtigkeit darauf einwirken kann.

§. 514. Man hat oft vorgeschlagen, die Holzverbindungen durch Eisenarmierungen zu verstärken. Wirkt der Druck rechtwinklig gegen die Länge des Stabes, so ist die beste Anordnung die, wenn in die Seitenflächen des Stabes eine Eisenverbindung eingelassen wird, welche aus einem bogenförmigen und einem geraden Stücke besteht, wobei die Enden des Bogens sich gegen Vorsprünge an den Enden des geraden Stückes fügen. (Fig. 106.)

Fig. 106.



Eine ähnliche Eisenverbindung kann auch zwischen zwei neben einander gelegte und durch Bolzen verbundene Balken eingelassen werden. Nimmt man an, daß die Berührung, welche zwischen den einzelnen Punkten des Eisens und denen des Holzes stattfindet, während der Biegung genau in denselben Verhältnissen fortbauere, oder hat man zur größern Sicherheit die Eisenverbindung durch Querstücke, wie in Fig. 105, verstärkt, so kann man den Widerstand des ganzen Systemes als die Summe der Widerstände ansehen, welche der Balken und die Armierung einzeln leisten würden. Das gerade Stück muß stets von Schmiedeeisen sein; aber für den Bogen ist es vortheilhaft, Gußeisen zu nehmen.

### Versuche über den Widerstand der Stäbe, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind.

§. 515. Bei einem von Aubry<sup>1)</sup> angestellten Versuche

1) Mémoires sur différentes questions de la science des constructions publiques et économiques, pag. 65.



wurde ein Stab aus Eichenholz von 1 Zoll Breite und  $2\frac{1}{2}$  Zoll Höhe horizontal auf zwei Stützen gelegt, deren Entfernung von einander 5 Fuß betrug, und sodann in der Mitte belastet. Dieser Stab brach unter einem Gewichte von 755 Pfd., nachdem er sich 2 Zoll durchgebogen hatte.

Ein anderer Stab aus demselben Holze, von 1 Zoll Breite und 2 Zoll Höhe, bestand aus drei Theilen, die von 6 zu 6 Zoll bis 3 Linien tiefe Einschnitte (Verzahnungen) hatten und durch zwei Bolzen von  $1\frac{1}{4}$  Linien im Durchmesser zusammen gehalten wurden. Die Unterstützung und Belastung war mit dem vorigen Stabe übereinstimmend. Der Bruch erfolgte unter einem Gewichte von 475 Pfd., nachdem sich der Stab um 3 Zoll 2 Linien durchgebogen hatte.

§. 516. Die Versuche von Duleau <sup>1)</sup> haben die folgenden Resultate geliefert. Die Stäbe, welche horizontal auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet wurden, waren sämmtlich 0,06 Meter breit und durch Bolzen mit einander verbunden, welche 0,02 Meter im Durchmesser hielten und in Zwischenräumen von 0,4 Meter angebracht waren. Aus den directen Versuchsergebnissen ist die Durchbiegung jeder Verbindung unter einer Belastung von 10 Kil. berechnet.

Bezeichnung der Verbindung	Ent- fernung der Stützen von einander	Totalhöhe der Verbindung	Dicke Höhe zwi- schen den beiden Stäben	Größe der Durchbiegung
	Meter	Millimeter	Millim.	Millimeter
Zwei Stäbe aus Perigorbeisen, flach auf einander gelegt und ohne Bolzen . . . .	2	21,1	0	7
Desgl., flach auf einander ge- legt und verbolzt . . . .	4	21	0	11,5
Desgl., durch Keile um 0,011 Meter aus einander gehalten und durch Bolzen verbunden	4	32	11	4,57
Desgl., auf dieselbe Weise um 0,021 Meter aus einander gehalten . . . . .	4	42	21	2,6
Desgl., auf dieselbe Weise um 0,032 Meter aus einander gehalten . . . . .	4	53	32	1,8
Desgl., durch Kreuze um 0,153 Meter aus einander gehalten	5,8	174	153	0,275
Zwei Stäbe aus Perigorbeisen, auf einander gelegt und ver- bolzt . . . . .	4	40	0	2,2

1) Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé, pag. 40.

Der Biegungswiderstand des Systemes mit den Kreuzen weicht wenig von dem Werthe ab, den man nach der Formel in §. 511 finden würde. Bei den nur durch Bolzen mit einander verbundenen Stäben ist der Widerstand geringer, und um so mehr, je größer die lichte Weite zwischen den Stäben ist; der Grund für diese Erscheinung muß in der Biegung der Bolzen gesucht werden.<sup>1)</sup>

**Ueber die Eisenconstruktionen, welche zur Verlängerung der Stäbe oder zur Verbindung solcher Stäbe dienen, die in derselben Längsrichtung liegen.**

§. 517. Wir wollen zunächst solche Stäbe betrachten, gegen deren Länge die einwirkenden Kräfte rechtwinklig gerichtet sind. Diese lassen sich auf durchaus solide Weise verlängern oder mit einander verbinden, während sie in derselben Längsrichtung liegen, wenn man auf die zusammenstoßenden Enden zweier Stäbe ein kurzes Rohr schiebt und es darauf kräftig befestigt. Da aber die innere Wand des Rohres nicht in ihrer ganzen Ausdehnung einen Druck erfahren würde, so kann man einen Theil des Rohres weglassen und einfachere, jedoch auf demselben Principe beruhende Mittel anwenden. So können z. B. Hölzer, deren Enden horizontal eingemauert werden sollen, in der Einmauerung dadurch verlängert werden, daß man an jeder der beiden (verticalen) Seitenflächen derselben eine Armirung aus Gußeisen (Fig. 107) anbringt,

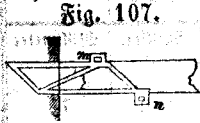


Fig. 107. und in *m* und *n* den nöthigen Verband durch Querstücke bewirkt. Zwischen diesen Querstücken und der obern und untern Seite der Hölzer muß mittelst dazwischen getriebener Keile oder mittelst Druckschrauben eine starke Spannung hergestellt werden. Bei einer solchen Anordnung kann der Bruch nur oberhalb des Querstückes *n* erfolgen, wenn die Hölzer einem von oben nach unten gerichteten Drucke nachgeben sollten.

Die Armirung, welche Fig. 108 darstellt, läßt sich zur Verlängerung von Hölzern anwenden, an deren einem Ende ein Gewicht aufgehängt werden soll, und in umgekehrter Lage kann man dieselbe Armirung zu den Enden eines Balkens gebrauchen; dies Letztere kann oft mit Nägeln geschehen, wenn solche Balken ausgebeßert werden sollen, bei denen die Enden versaut sind.

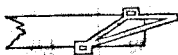


Fig. 108. Endlich kann man die in Fig. 109 dargestellte Armirung anwenden, um zwei Hölzer mit den Enden zusammenzufügen, oder um

1) Einige, den vorhergehenden analoge Versuche findet man in dem vierten Bande von Rondelet's *Art de bâtir*, pag. 529. Auch Barlow hat in seinem *Essay on the strength and stress of timber*, pag. 196 einige Versuche an Modellen von verstärkten Balken mitgetheilt.

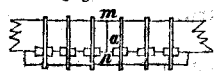
Fig. 109.



einen Balken zu consolidiren, der er unter der Belastung zerbrochen ist. In dem letzteren dieser beiden Fälle ist man aber eines guten Erfolges nicht so sicher, als in dem ersteren, weil in dem letztern Falle die Armirung da angebracht werden muß, wo der Balken die Neigung zu der größten Krümmung hat, wodurch eine vollkommenere Berührung zwischen dem Balken und der Armirung nöthig wird, wenn keine merkliche Biegung eintreten soll.<sup>1)</sup>

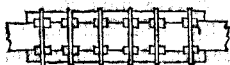
Bei derartigen Constructionen läßt sich der Widerstand der Armaturen nach §. 511 berechnen. Die Flächen, auf welche der Druck wirkt, müssen eine hinreichende Ausdehnung besitzen, damit das Holz an diesen Stellen nicht zerdrückt werden kann. Der Werth des Druckes wird sich immer leicht berechnen lassen. In dem Falle der Fig. 107 muß z. B. der Druck in  $m$  den Gewichten, mit denen der Stab belastet ist, gegen eine Drehung um den Punkt  $n$  das Gleichgewicht halten, und in  $n$  ist der Druck die Summe aus der Belastung des Stabes und dem in  $m$  stattfindenden Drucke.

§. 518. Die Theile eines Balkens, der einer Biegung nach unten ausgesetzt ist, können auch auf die in Fig. 110 angegebene Weise mittelst eines darunter gelegten Stückes



in Verband sein, wobei durch Keile von hartem Holze, welche in Einschnitten liegen, und durch herumgelegte eiserne Schienen dies Stück mit den Theilen des Balkens verbunden wird. Denn, da während der Biegung die Fasern in dem obern Theile  $am$  des Querschnittes zusammengeedrückt, und in dem untern Theile  $an$  ausgedehnt werden, so schadet die Fuge  $mn$  dem Widerstande der Fasern, welche zusammengeedrückt werden, nicht, und der Widerstand der zerschnittenen Fasern, welche ausgedehnt werden würden, findet sich durch den Widerstand des darunter gelegten Stückes ersetzt. Die Stärke dieses Stückes läßt sich aus der Bedingung bestimmen, daß das Widerstandsmoment seiner Fasern in Bezug auf die Gleichgewichtsbare  $a$  gleich sein muß dem auf dieselbe Are bezogenen Momente der durchschnittenen Fasern, welche in dem Intervalle  $an$  liegen.

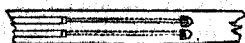
Fig. 111.



§. 519. Hölzer, von welchen die einen in der Verlängerung der andern liegen, und die einen Zug in der Richtung ihrer Länge ertragen müssen, lassen sich auf die in Fig. 111 angegebene Weise mittelst seitlich angelegter Stücke verbinden, die durch Keile und eiserne Schienen be-

<sup>1)</sup> Ein Verfahren, die verdorbenen Enden von Balken zu consolidiren, findet man auch in den Transactions of the society of arts and manufactures, 1820. Man sehe auch den Jahrgang 1824 derselben Sammlung, oder das Bulletin de la société d'encouragement, Juin 1825.

festigt werden. Man kann auch eiserne Anker anwenden, die entweder in das Holz eingelassen (Fig. 112), oder außerhalb



angebracht und an Querstücken befestigt werden. In allen Fällen findet an der Verbandsstelle eine Schwächung der Hölzer statt, da durch die Einschnitte die Querschnittsfläche vermindert wird. Der Widerstand der Anker muß demjenigen gleich sein, welche dem Holze noch bleibt, und die Holztheile, gegen welche die Anker fassen, müssen eine hinreichende Oberfläche haben, damit weder sie zerdrückt werden können, noch ihre Parallelschäßen mit den nebenliegenden Fasern aufgehoben werden könne.

## Achtes Kapitel.

### Die einfachsten Holzconstruktionen, welche zum Tragen und Aufziehen von Lasten dienen.

§. 520. Die Theile einer Holzconstruktion sind der Einwirkung verschiedenartiger Kräfte ausgesetzt, und sie müssen der Wirkung und dem Bruche auf eine unendlich verschiedene Weise widerstehen. In den vorhergehenden Kapiteln sind die einfachsten Gleichgewichtsfälle an einem einzelnen Stabe untersucht worden; in diesem Kapitel und in den folgenden sollen die Gleichgewichtsbedingungen für Construktionen, welche aus mehreren Stäben bestehen, aufgesucht werden, wobei wir uns auf diejenigen Systeme beschränken, welche in der Praxis am häufigsten vorkommen.

§. 521. Ein Gewicht wird von einem einzelnen Stabe auf die einfachste Weise getragen, wenn man das Gewicht auf das obere Ende des vertical gestellten Stabes legt. Die Gleichgewichtsbedingungen sind für diesen Fall bereits in §. 383 gefunden. Eine solche Vorrichtung besitzt nur dann Stabilität, wenn das untere Ende des Stabes eingemauert ist. Findet Letzteres nicht statt, so kann man entweder durch Streben oder sonstige feste Stützen, oder durch Seile, welche von festen Punkten ausgehen, das obere Ende des Stabes in seiner Lage erhalten. Der Grad von Stärke, welchen man den Seilen geben muß, läßt sich im Allgemeinen nicht mit Genauigkeit bestimmen, da die Seile keinen andern Zweck haben, als den, das obere Ende des Stabes zu verhindern, seine unstabile Gleichgewichtslage verlassen.

§. 522. Ein Gewicht kann vermittelt eines einzelnen verticalen Stabes auch so getragen werden, daß dasselbe in einiger Entfernung von der Ase des Stabes aufgehängt wird, und dies muß immer geschehen, wenn das Gewicht nicht allein getragen, sondern auch gehoben werden soll. In §. 406 ist der Fall untersucht, wenn das untere Ende des Stabes eingemauert ist, und das Gewicht nur getragen wird. Soll das Gewicht gehoben werden, so bringt man gewöhnlich in *C* und *D* (Fig. 113) zwei Rollen an

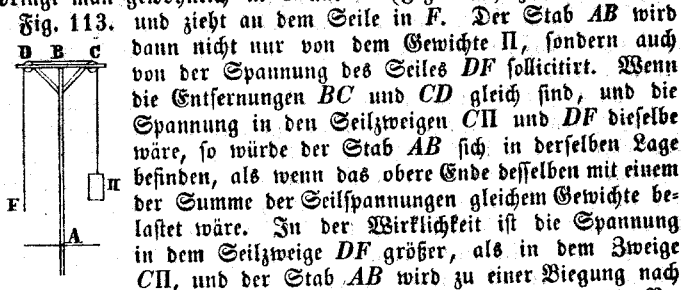
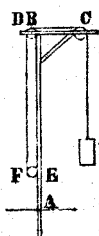


Fig. 113. und zieht an dem Seile in *F*. Der Stab *AB* wird dann nicht nur von dem Gewichte *II*, sondern auch von der Spannung des Seiles *DF* sollicitirt. Wenn die Entfernungen *BC* und *CD* gleich sind, und die Spannung in den Seilzweigen *CI* und *DF* dieselbe wäre, so würde der Stab *AB* sich in derselben Lage befinden, als wenn das obere Ende desselben mit einem der Summe der Seilspannungen gleichem Gewichte belastet wäre. In der Wirklichkeit ist die Spannung in dem Seilzweige *DF* größer, als in dem Zweige *CI*, und der Stab *AB* wird zu einer Biegung nach *DF* hin angeregt. Aus beiden Seilspannungen hat man die Resultante zu suchen, und dann die in §. 406 u. folgd. gefundenen Resultate in der Weise anzuwenden, daß in den Formeln der genannten Paragraphen für *II* die Resultante, und für *l* der Abstand der Resultanten von der Ase des Stabes gesetzt wird.

Die Stabilität des Gleichgewichtes hängt hier allein von dem Biegungswiderstande des Stabes ab, und eine Verschiebung des oberen Endes vergrößert den Hebelarm der einwirkenden Kräfte. Es ist durchaus nothwendig, dieses Ende des Stabes durch Seile in seiner Lage zu erhalten; der Widerstand dieser Seile kann aber, eben wie in dem vorhergehenden Falle, nicht zum Voraus mit Genauigkeit berechnet werden.

§. 523. Zuweilen sind die Constructionen dieser Art so angeordnet, daß mit dem Stabe *AB* (Fig. 114) nahe an dessen unterm Ende, in *E*, ein Haspel fest verbunden ist, mittelst welcher das Seil *DF* angezogen wird. In diesem Falle befinden sich die beiden Theile *AE*, *BE* in verschiedenen Gleichgewichtszuständen. Der Theil *AE* wird nur durch das Gewicht *II* zu einer Biegung angeregt, und man kann die in §. 406 u. folgd. gefundenen Resultate auf denselben anwenden. Der Theil *BE* unterliegt der Wirkung des Gewichtes *II* und der Spannung des Seiles *DF*. Vernachlässigt man die Biegung des Theiles *AE*, so läßt sich auf den Theil *BE* das in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte anwenden.



§. 524. Bei der in Fig. 115 dargestellten Construction ist der Horizontalstab *BB'*, welcher in der Mitte *C* mit einem

Fig. 115. Gewichte  $\Pi$  belastet ist, in dem Gleichgewichtszustande, welcher in den §§. 356 und 357 untersucht wurde. Die Verticalstäbe  $AB$ ,  $A'B'$  tragen jeder die Hälfte des Gewichtes  $\Pi$  und befinden sich in den Gleichgewichtszuständen, welche in §. 383 oder in §. 389 untersucht wurden, je nachdem die unteren Enden der Stäbe frei aufstehen oder eingemauert sind. Steht man von dem Widerstande der Verbindungen in  $B$  und  $B'$  ab, so ist das Gleichgewicht nicht stabil und die Construction muß durch schräg gestellte Stäbe oder durch Seile in ihrer Lage erhalten werden.

Sollte das in dem Punkte  $C$  aufgehängte Gewicht nicht bloß getragen, sondern mittelst eines Seiles gehoben werden, welche über eine oder mehrere in  $C$  angebrachte Rollen ginge, so müßte man offenbar die Summe aus dem Gewichte  $\Pi$  und der Spannung des Seilendes, auf welches die Kraft wirkt, die das Gewicht  $\Pi$  zu heben strebt, als die Belastung des Punktes  $C$  ansehen.

§. 525. Als eine Vereinigung von zwei solchen Systemen, wie sie eben betrachtet wurden, läßt sich die in Fig. 116 darge-

Fig. 116. stellte Construction ansehen, wenn das Horizontalstück  $BB'$  aus zwei Theilen besteht, welche in einer in  $B'$  befindlichen Fuge zusammenstoßen. Die Verticalstäbe  $AB$  und  $A'B'$ , tragen jeder die Hälfte von einem der Gewichte  $\Pi$  und der Stab  $A'B'$  trägt das Doppelte oder ein ganz  $\Pi$ . Besteht aber der horizontale Balken  $BB'$  aus einem einzigen Stücke, so leistet jede der beiden Hälften  $BB'$  und  $BB''$  denselben Widerstand, wie ein Ho-

rizontalstab, dessen eines Ende eingemauert ist, während das andere Ende frei auf einer Stütze liegt. Sieht man daher die Stäbe  $AB$ ,  $AB'$  und  $A'B'$  als unbiegsame Stützen an, so lassen sich hier die in §. 366 u. folgd. gewonnenen Resultate anwenden, welche mit der in §. 375 u. folgd. gegebenen Lösung übereinstimmen. Man wird demnach annehmen, daß der Druck auf die beiden äußern Stäbe  $AB$  und  $A'B'$  für jeden gleich  $\frac{5}{16} \Pi$  ist, weshalb für den mittlern Stab  $A'B'$  ein Druck von  $\frac{22}{16} \Pi$  übrig bleibt. Die Verbindung der beiden Theile des Horizontalstückes  $BB'$  vermehrt also sehr merklich die Belastung des mittlern Pfosten  $A'B'$ , während sie die der beiden andern vermindert.

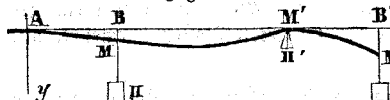
§. 526. Wir wollen noch die in Fig. 117 dargestellte Construction untersuchen, wo der horizontale Balken  $BB''$  aus einem einzigen Stücke besteht, von drei in gleichen Zwischenräumen angebrachten verticalen Pfosten getragen wird und mit drei gleichen Gewichten  $\Pi$  belastet ist. Sieht man die verticalen Träger als unbiegsame Stützen an, so läßt sich der Widerstand, welchen der Balken  $BB''$  leisten muß, und der Druck auf jeden einzelnen Träger

Fig. 117.



Stabe  $AMM'$  (Fig. 118) welcher in §. 371 untersucht wurde, für

Fig. 118.



den dritten Theil  $M'M'$  des selben unter Beibehaltung der in jenem Paragraphen gebrauchten Benennungen, gelten, wenn man die Constanten so bestimmt, daß sich für  $x=a'$ , dieselben Werthe für  $\frac{dy}{dx}$  und für  $y$  ergeben, wie aus den Gleichungen für den Theil  $MM'$ :

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi'' (a' - x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \frac{1}{2} a^2 - \Pi' \frac{1}{2} a'^2 + \Pi'' (a' x - \frac{1}{2} x^2),$$

$$\varepsilon y = \Pi (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi' (\frac{1}{2} a'^2 x - \frac{1}{6} a'^3) + \Pi'' (\frac{1}{2} a' x^2 - \frac{1}{6} x^3).$$

Wenden wir jetzt diese Gleichungen, so wie die, welche schon in den citirten Paragraphen gegeben sind, auf die Hälfte  $BC'$  des Balkens  $BB''$  (Fig. 117) an. Nennt man

$a$  die Hälfte von einem der gleichen Intervalle  $BB'$ ,  $B'B'$ ;

$Q$  den Druck auf den Pfosten  $AB$ ;

$Q'$  den Druck auf den Pfosten  $A'B'$ ;

so entsprechen die genannten Gleichungen dem vorliegenden Falle, wenn man  $Q$  für  $\Pi'$ ,  $\Pi$  für  $\Pi'$ ,  $Q$  für  $\Pi''$ ,  $2a$  und  $3a$  für  $a'$  und  $a''$  schreibt. Man erhält daher für die Theile  $B'C'$   $CB'$  und  $BC$  respective die Gleichungen

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3) - \Pi (a x^2 - \frac{1}{6} x^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3),$$

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi (a x^2 - \frac{1}{6} x^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3),$$

$$\varepsilon y = Q' (\frac{1}{2} a^2 x - \frac{1}{6} a^3) - \Pi (2 a^2 x - \frac{4}{3} a^3) + Q (\frac{3}{2} a x^2 - \frac{1}{6} x^3).$$

Setzt man hierin successive  $x=a$ ,  $x=2a$ ,  $x=3a$ , so erhält man für die Ordinaten der Punkte  $B'$ ,  $C$  und  $B$ , welche von der Horizontalen ausgezählt werden, die durch den Punkt  $C'$  geht.

$$\varepsilon y = (2 Q' - 5 \Pi + 8 Q) \frac{1}{6} a^3,$$

$$\varepsilon y = (5 Q' - 16 \Pi + 28 Q) \frac{1}{6} a^3,$$

$$\varepsilon y = (8 Q' - 28 \Pi + 54 Q) \frac{1}{6} a^3.$$

Die Ordinaten der Punkte  $B$  und  $B'$  müssen unter sich gleich sein; man hat daher

$$6 Q - 23 \Pi + 46 Q = 0.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Gewichten  $\Pi$  und den Drücken auf die Pfosten folgt außerdem

$$2 Q - 3 \Pi + 2 Q = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich  $Q = \frac{7}{20} \Pi$  als der Druck auf jeden der beiden äußeren Pfosten  $AB$  und  $A'' B''$ ; so wie  $Q = \frac{13}{20} \Pi$  als der Druck auf jeden der beiden mittleren. Es wird auch hier dadurch, daß der Balken  $BB''$  aus einem einzigen Stücke besteht, die Belastung der mittleren Pfosten vermehrt, und die der äußern vermindert.

§. 327. Was den Grad des Widerstandes anlangt, den der Balken  $BB''$  leisten muß, so beachte man, daß für die Theile  $B' C'$ ,  $B' C$  und  $CB$  desselben respective die Gleichungen gelten

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = Q (a - x) - \Pi (2 a - x) + Q (3 a - x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = - \Pi (2 a - x) + Q (3 a - x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = Q (3 a - x);$$

oder, wenn man für  $Q$  und  $Q'$  ihre eben gefundenen Werthe setzt,

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20} (4 a - 10 x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20} (-19 a + 13 x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\Pi}{20} (21 a - 7 x).$$

Die Maximalpunkte der Krümmung sind  $C$ ,  $B'$  und  $C'$ : in dem ersteren derselben ist die Krümmung und die Neigung zum Bruche am größten, man hat hier  $\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi \frac{7 a}{20}$ . Die Bedingungen für den Bruch dieses Stabes finden sich daher nach §. 358 durch die Gleichung ausgedrückt:

$$q = \Pi \frac{7 a}{20}.$$

Die verticalen Pfosten werden hier als unbiegsame Stützen betrachtet. Wollte man sie als biegsam oder zusammendrückbar ansehen, so wäre die Frage eine andere und verwickeltere. Es ist aber der Praxis wegen nicht nöthig, die Frage auf diese Weise zu

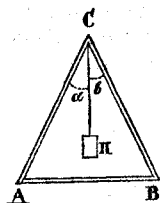


behandeln, und es ist durchaus kein gefährlicher Irrthum zu befürchten, wenn man jedem Pfosten eine Stärke giebt, die zu den oben gefundenen Drücken in einem passenden Verhältnisse steht.

§. 528. Ein Gewicht kann mittelst eines einzigen geneigten Stabes getragen werden, wenn das untere Ende desselben festgehalten (eingemauert) wird. In §. 412 u. folgd. ist dieser Fall des Gleichgewichtes untersucht worden. In Fig. 119 ist ein Gewicht dargestellt, welches

Fig. 119.

von zwei geneigten Stäben getragen wird, deren untere Enden frei auf Stützen stehen. Nennt man  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel, welche die Stäbe  $AC$  und  $BC$  mit dem verticalen Seile  $C\Pi$  bilden, so erhält man durch Zerlegung des Gewichtes  $\Pi$  in die Richtungen der beiden Stäbe respectiv die Kräfte



$$\Pi \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Diese Stäbe stützen sich in  $C$  gegen einander, und der Horizontaldruck, welcher in diesem Punkte stattfindet, ist

$$\Pi \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

In  $A$  und  $B$  suchen sie sich von einander zu entfernen, und dieselbe Formel giebt daher den Horizontalschub gegen die Stützen, von denen sie zurückgehalten werden, oder die Spannung eines Bandes an, wenn man sie mittelst eines Bandes verbinden will.

§. 529. Bilden die beiden Stäbe  $AC, BC$  mit der Verticalen denselben Winkel  $\alpha$ , so ist der Druck in der Richtung eines jeden Stabes

$$\frac{\Pi}{2 \cos \alpha},$$

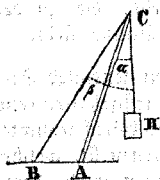
und der Horizontalschub wird ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha.$$

Bei den in Rede stehenden Constructionen befinden sich die beiden geneigten Stäbe in dem Gleichgewichtszustande, welcher in §. 383 untersucht wurde, wobei der Druck in der Richtung der Stäbe die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete Kraft ersetzt.

§. 530. Bei der Construction, welche Fig. 120 darstellt, wird der Stab  $AC$  zusammengedrückt, und der Stab  $BC$  ausge-

Fig. 120.



dehnt. Der Druck in der Richtung  $AC$  muß die Resultante aus den Spannungen der Seile  $BC$  und  $CH$  sein. Bezeichnet man daher durch  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel, welche  $AC$  und  $BC$  mit dem verticalen Seile  $CH$  bilden, so hat man respective

$$\Pi \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \text{ und } \Pi \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$$

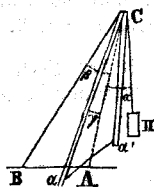
für den Druck in der Richtung  $AC$  und für die Spannung des Seiles  $BC$ . Der Stab  $AC$  hat ein Bestreben, auf seiner Stütze  $A$  zu gleiten, und der Horizontalschub gegen das Hinderniß, welches den Stab zurückhalten soll, ist

$$\Pi \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Die eben betrachteten Constructionen sind im stabilen Gleichgewichte in Bezug auf die Verschiebungen, welche in der Verticalebene eintreten könnten, in denen sich die geneigten Stäbe und das Seil befinden, an welchen das Gewicht aufgehängt ist. In dieser Ebene müssen die Constructionen aber durch Seile erhalten werden.

§. 531. Um die Stabilität des Systemes zu vermehren, ersetzt man den einzelnen Stab  $AC$  durch zwei Stäbe  $aC$  und  $a'C$  (Fig. 121), wodurch die Vorrichtung entsteht, welche unter dem Namen „Sebebock“ bekannt ist.

Fig. 121.



Es sei die Linie  $AC$  der Durchschnitt der Verticalebene, in welcher sich die Seilzweige  $BC$ ,  $CH$  befinden, mit der Ebene  $aCa'$ , welche auf der erstern normal steht, und man nenne  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel  $BC\pi$  und  $AC\pi$ , und  $\gamma$  einen der beiden gleichen Winkel  $aCA$  und  $a'CA$ . Das Gewicht  $\Pi$  wird in der Richtung eines jeden der beiden Stäbe  $aC$  und  $a'C$  einen Druck erzeugen, den die Formel ausdrückt

$$\Pi \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha) 2 \cos \gamma}.$$

Die Spannung in dem Bande  $aa'$  ist

$$\Pi \frac{\sin \beta \cdot \tan \gamma}{2 \sin (\beta - \alpha)}.$$

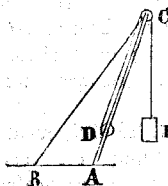
Die Spannung des Seiles  $BC$  und die Horizontalkraft, mit welcher die unteren Enden  $a$ ,  $a'$  der geneigten Stäbe in der Richtung parallel zu  $AB$  zu gleiten suchen, werden durch die in dem vorigen Paragraphen gegebenen Formeln ausgedrückt.

§. 532. Soll bei den Constructionen, welche wir so eben untersucht haben, das in  $C$  aufgehängte Gewicht nicht bloß getragen, sondern mittelst eines Seiles gehoben werden, welches über eine oder mehrere Rollen geht, die in  $C$  angebracht sind, so muß man, um den Druck in der Richtung der einzelnen Stäbe zu bestimmen, anstatt des Gewichtes  $\Pi$  die Resultante aus diesem Gewichte und der Spannung des Seiles, an welchem die bewegende Kraft wirkt, in Rechnung bringen. Außerdem muß der in Fig. 122 dargestellte Fall unterschieden werden, wo das Seil  $CD$

Fig. 122. mittelst welches das Gewicht  $\Pi$  aufgezo-gen wird,

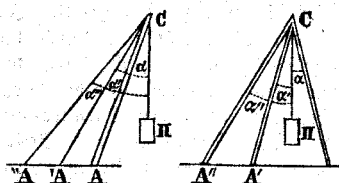
sich auf einem in  $D$ , nahe an dem untern Ende des Stabes  $AC$  befestigten Haspel aufrollt. In diesem Falle wird der Theil  $AD$  nur durch die Kraft zusammenge-drückt, welche sich durch die Zerlegung des Gewichtes  $\Pi$  ergibt, und die durch die Formeln in den vorhergehenden Paragraphen ausgedrückt wird. Die Spannung des Seiles  $BC$  behält ebenfalls den dafür in diesen Paragraphen gegebenen Werth. Aber der Theil  $CD$  des Hauptstückes wird in der Richtung seiner Länge mit einer Kraft zusammenge-drückt, welche gleich der Summe aus der von der Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  herrührenden Kraft und der Spannung des Seiles  $CD$  ist. Der Gleichgewichtszustand dieses Theiles  $CD$  kann, ohne gefahrbringenden Irrthum, als demjenigen analog angesehen werden in welchem sich der in §. 383 betrachtete Stab befindet.

§. 533. Wird ein Gewicht von mehr als zwei geneigten Stäben getragen, die sich in derselben Ebene befinden, oder von mehr als drei geneigten Stäben, die sich in verschiedenen Ebenen befinden, so lassen die Gleichgewichtsbedingungen den Druck in der Richtung jedes einzelnen Stabes innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Denn, obgleich es scheint, als müßte das Gewicht von den sämmtlichen Stäben gemeinschaftlich getragen werden, so verhindert doch nichts die Annahme, daß das Gewicht im erstern Falle nur von zweien, und im letztern Falle nur von dreien dieser Stäbe getragen werde. Diejenigen unter ihnen, welche zusammenge-drückt werden, befinden sich in dem Gleichgewichtszustande, welcher in §. 383 untersucht wurde, und die Resultate der Lösung, welche in diesem Paragraphen gegeben ist, zeigen, daß man solche Stäbe als feste, unverrückbare Stützen ansehen kann, so lange die Kräfte, welche darauf wirken, eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Betrachtet man das System auf diese Weise, so muß, wenn die Construction eine gänzliche Sicherheit gewähren soll, der größte Druck, welcher auf einen einzelnen Stab je nach den verschiedenen Arten, auf welche sich das Gewicht vertheilen läßt, kommen kann, noch unter der eben besprochenen Grenze liegen. Man übersehe aber nicht, daß die Lösung des §. 383, welche lehrt, daß ein Stab, der in



der Richtung seiner Länge einen Druck erleidet, demselben nicht nachgiebt, so lange dieser Druck eine gewisse Grenze nicht überschreitet, nur die Neigung des Stabes zu einer Biegung berücksichtigt. In der Wirklichkeit wird der Stab vor der Biegung mehr und mehr zusammengedrückt vermöge der Elasticität des Materials. Dieser Umstand muß bei solchen Fragen, wie sie hier in Rede stehen, berücksichtigt werden, und alsdann verschwindet jede Unbestimmtheit hinsichtlich der Vertheilung der Belastung auf die Stützpunkte.

Um hiervon ein Beispiel zu haben, nehme man an, das Gewicht  $\Pi$  (Fig. 123) werde von



den drei geneigten Stäben  $AC$ ,  $A'C$ ,  $A''C$ , die sich in derselben Ebene befinden, getragen, und man nenne

$\alpha, \alpha', \alpha''$  die Winkel, welche die Richtung der drei Stäbe mit dem verticalen Seile  $C\Pi$  einschließt;

$p, p', p''$  die Kräfte, welche sich in Folge der Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  in der Richtung eines jeden Stabes ergeben;

$F, F', F''$  die Elasticitätskräfte der drei Stäbe;

$a$  die Höhe des Punktes  $C$  über der Horizontalen  $AA''$ ;

$h, f$  die Größen, um welche der Punkt  $C$  durch die gleichzeitige Zusammendrückung der drei Stäbe in horizontaler und verticaler Richtung verschoben wird.

(Indem mit  $F$  die Elasticitätskraft des Stabes  $AC$  bezeichnet wird, soll darunter verstanden werden, daß ein Gewicht gleich  $F$  nöthig sei, um den Stab bis auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen, oder bis auf die Hälfte derselben zusammenzudrücken).

Nach diesen Vorbemerkungen findet man zunächst für die Bedingungen des Gleichgewichtes zwischen dem Gewichte  $\Pi$  und den Pressungen in der Richtung der einzelnen Stäbe

$$p \cos \alpha + p' \cos \alpha' + p'' \cos \alpha'' = \Pi,$$

$$p \sin \alpha + p' \sin \alpha' + p'' \sin \alpha'' = 0.$$

Da ferner die Verschiebung des Punktes  $C$  als sehr gering vorausgesetzt wird, so sind die Größen, um welche die einzelnen Stäbe zusammengedrückt werden, sehr nahe

$$f \cos \alpha - h \sin \alpha, f \cos \alpha' - h \sin \alpha', f \cos \alpha'' - h \sin \alpha'',$$

und da die Längen dieser Stäbe respective  $\frac{a}{\cos \alpha}, \frac{a}{\cos \alpha'}, \frac{a}{\cos \alpha''}$  sind, so hat man

$$\frac{f \cos^2 \alpha - h \sin \alpha \cos \alpha}{a}, \frac{f \cos^2 \alpha' - h \sin \alpha' \cos \alpha'}{a}, \frac{f \cos^2 \alpha'' - h \sin \alpha'' \cos \alpha''}{a},$$

als die Bruchtheile dieser Längen, um welche die einzelnen Stäbe zusammengedrückt worden sind. Es ergeben sich daraus die drei Gleichungen

$$p = F \cdot \frac{f \cos^2 \alpha - h \sin \alpha \cos \alpha}{a},$$

$$p' = F' \cdot \frac{f \cos^2 \alpha' - h \sin \alpha' \cos \alpha'}{a},$$

$$p'' = F'' \cdot \frac{f \cos^2 \alpha'' - h \sin \alpha'' \cos \alpha''}{a},$$

welche, mit den beiden vorhergehenden verbunden, die Werthe der Verschiebungen  $h$  und  $f$ , und der Kräfte  $p$ ,  $p'$  und  $p''$  liefern.

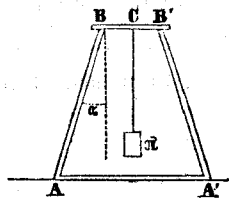
§. 534. Setzt man z. B. die Elasticitätskräfte der drei Stäbe als einander gleich, den mittlern Stab  $AC$  als vertical, und die Winkel  $\alpha$ ,  $\alpha'$  als gleich  $45^\circ$  voraus, so ist die horizontale Verschiebung  $h$  des Punktes  $C$  gleich Null und man kann die zweite von beiden Gleichgewichtsgleichungen weglassen. Man hat  $\cos \alpha' = 1$ ,  $\cos \alpha = \cos \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , und

$$f = \frac{\sqrt{2} \cdot \Pi a}{F(1 + \sqrt{2})}, \quad p = p'' = \frac{\Pi}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}, \quad p' = \frac{\sqrt{2} \cdot \Pi}{1 + \sqrt{2}};$$

der Druck auf den mittlern Stab ist demnach doppelt so groß, als auf die beiden andern.

§. 535. Wären die drei Stäbe auf derselben Seite von dem verticalen Seile  $\Pi$  (Fig. 123) angebracht, so würde nur der erste Stab zusammengedrückt werden und die beiden andern würden ausgedehnt werden. Die Gleichungen in §. 533 passen auch für diesen Fall, wenn man die Vorzeichen von  $p'$  und  $p''$  ändert.

§. 536. Bei einer Construction, wie sie Fig. 124 darstellt, wo die beiden geneigten Stäbe,  $AB$ ,  $A'B'$ , welche sich mit dem Seile  $\Pi$  in derselben Verticalebene befinden, das Gewicht  $\Pi$  mittelst eines horizontalen Stabes  $BB'$  tragen, ist es zum Gleichgewichte des Systemes nothwendig, daß die Neigung der Stäbe  $AB$ ,  $A'B'$  gleich groß sei, wosern von dem Widerstande des Verbandes abgesehen wird. Nennt man  $\alpha$  den Winkel, welchen die Stäbe mit der Verticalen ein-



schließen, so werden diese mit der Kraft  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$  in der Richtung

ihrer Länge zusammengedrückt, und sie befinden sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie der in §. 383 untersuchte Stab. Die Enden  $A, A'$  suchen sich mit einer Horizontalkraft gleich  $\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha$  von einander zu entfernen.

Was den Horizontalstab  $BB'$  anlangt, so befindet sich jede Hälfte  $BC$  oder  $B'C$  in derselben Lage, als wenn sie in  $C$  horizontal festgehalten würde, während an dem Ende  $B$  oder  $B'$  eine Kraft in der Richtung  $AB$  oder  $A'B'$  wirkt. Diese Hälften befinden sich also in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie der in §. 412 untersuchte Stab, wobei die in jenem Paragraphen mit  $P, Q$  und  $\Pi$  bezeichneten Kräfte hier respective  $\frac{1}{2} \Pi, \frac{1}{2} \Pi \tan \alpha$  und  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$ .

§. 537. In §. 528 wurde der Fall untersucht, wo ein Gewicht  $\Pi$  von zwei geneigten Stäben getragen wird, und es zeigte sich die Nothwendigkeit, die beiden unteren Enden dieser Stäbe, welche sich von einander zu entfernen streben, durch irgend ein Mittel zusammen zu halten. Das Letztere kann dadurch geschehen, daß man in einer gewissen Höhe die beiden Stäbe durch ein horizontales Band  $EF$  (Fig. 125) verbindet, während die untern Enden derselben frei auf der Horizontalebene stehen, von welcher sie getragen werden.

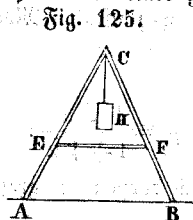


Fig. 125.

Man nenne

- $\alpha$  den Winkel, welchen die Stäbe  $AC, BC$  mit dem verticalen Seile  $CH$  bilden;
- $a$  die Länge der Theile  $CE, CF$ ;
- $a'$  die Länge der Theile  $AF, BF$ .

Die Stützpunkte  $A$  und  $B$  erleiden jeder einen Verticaldruck gleich  $\frac{\Pi}{2}$ . Jeder Stab  $AC, BC$  kann angesehen werden, als

würde er durch die Kraft  $\frac{\Pi}{2}$  zu einer Drehung um seinen obern Endpunkt angeregt, und in dem Bande  $EF$  muß sich die nöthige Spannung finden, um eine solche Bewegung zu verhindern. Diese Spannung wird also durch die Bedingung bestimmt, daß ihr auf den Punkt  $C$  bezogenes Moment dem auf denselben Punkt bezogenen Momente der in  $A$  oder  $B$  wirkenden Verticalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  gleich sein muß. Der Werth der in Rede stehenden Spannung ist demnach

$$\Pi \frac{a + a'}{2a} \tan \alpha;$$

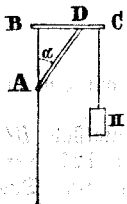
und diese Formel giebt zugleich den Horizontaldruck, welchen die beiden Stäbe in  $C$  gegen einander ausüben. Man sieht demnach,

daß sich die Theile dieser Stäbe in demselben Falle befinden, wie der in §. 512 u. folgd. untersuchte Stab. Der Theil  $AE$  muß angesehen werden, als werde er in  $E$  festgehalten und in  $A$  von der Vertikalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  sollicitirt, welche ihn zusammenzudrücken strebt. Der Theil  $CE$  muß angesehen werden, als würde er ebenfalls in  $E$  festgehalten, und in  $C$  von der Vertikalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  und der Horizontalkraft  $\Pi \frac{a+a'}{2a} \tan \alpha$  sollicitirt, welche Kräfte den Theil  $CE$  beide zusammenzudrücken streben.

§. 538. Bei der in §. 528 betrachteten Construction könnte man außer dem Bande  $AB$  (Fig. 119) sich noch ein Band  $EF$  (wie in Fig. 125) angebracht denken. In diesem Falle wird die Horizontalkraft  $\frac{1}{2} \Pi \tan \alpha$ , mit welcher die beiden Stäbe sich von einander zu entfernen suchen, noch immer entweder gänzlich von den Hindernissen in  $A$  und  $B$ , oder von dem Bande  $EF$  aufgenommen. Der Stab  $AC$  muß eben so angesehen werden, wie der in §. 383 untersuchte Stab, aber mit der Bedingung, daß ein Punkt dieses Stabes als fest betrachtet wird. Aus der in §. 383 angestellten Untersuchung ergibt sich, daß, wenn die Stäbe als biegsame, aber nicht zusammendrückbare Ruthen angesehen werden und der feste Punkt  $E$  sich in einem Theilpunkte befindet, durch welche der Stab in 2, 3 u. gleiche Theile getheilt wird, die Kraft, welche im Stande ist, den Stab zu biegen, das 4fache, 9fache derjenigen Kraft beträgt, welche stattgefunden haben würde, wenn kein fester Punkt da gewesen wäre. Außerdem ist auf das in §. 403 Gesagte Rücksicht zu nehmen, wenn man die Grenze der zulässigen Belastungen für den Stab bestimmen will.

Das in einem der Theilpunkte des Stabes  $AC$  angebrachte Band  $EF$  erleidet keine Horizontalspannung. Denn, obgleich die Existenz eines auf diese Weise befestigten Punktes eine besondere Art der Biegung bei diesem Stabe bedingt, so erleidet dieser Punkt doch keinen Druck.

Die eben gemachten Bemerkungen lassen sich auch auf die in §. 536 betrachtete und in Fig. 124 dargestellte Construction an Fig. 126. wenden, wenn man sich in einer gewissen Höhe ein horizontales Band zwischen den Stäben  $AB$  und  $A'B'$  angebracht denkt.



§. 539. Bei der in Fig. 126 dargestellten Construction ist ein Gewicht  $\Pi$  an dem Ende  $C$  des horizontalen Stabes  $BC$  aufgehängt, der durch die Strebe  $AD$  verstärkt ist. Die Punkte  $A, B$  sind fest, es werden aber die Theile der Construction als um diese Punkte drehbar gedacht. Man nenne  $l, l'$  die Entfernungen  $BD, CD$ ;

$\alpha$  den Winkel  $BAD$ .

Auf den festen Punkt  $B$  wirkt eine von unten nach oben gerichtete Verticalkraft  $\Pi \frac{l}{l}$ , die (in entgegengesetzter Richtung gedacht) dem Gewichte  $\Pi$  das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt  $D$  hält. Der Punkt  $D$  ist mit der Summe aus dem Gewichte  $\Pi$  und der genannten Verticalkraft, also mit  $\Pi \frac{l+l}{l}$  belastet. Da diese Kraft von der Strebe  $AD$  aufgenommen werden muß, so entsteht in der Richtung dieses Stabes die Pressung  $\Pi \frac{l+l}{l \cos \alpha}$ , und zugleich in der Richtung  $BD$  die Spannung  $\Pi \frac{l+l}{l} \tan \alpha$ , welche von dem Widerstande des festen Punktes  $B$  vernichtet wird. Will man sich also Gewißheit verschaffen, ob die Construction stark genug ist, um das Gewicht  $\Pi$  zu tragen, so untersuche man zunächst, ob die Strebe  $AD$ , welche dem im §. 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden muß, den Druck  $\Pi \frac{l+l}{l \cos \alpha}$  in der Richtung ihrer Ase ertragen kann. Bei dem Stabe  $BC$  werden darauf die Punkte  $B$  und  $D$  als fest angesehen, während er sollicitirt wird von einer Arespannung  $\Pi \frac{l+l}{l} \tan \alpha$ , die im Theile  $BD$  thätig ist, und von einer Drehkraft, deren Moment  $\Pi l$  ist, und die den Stab in  $D$  abzubrechen sucht, in welchem Punkte sie eine Krümmung zu bewirken strebt, deren Halbmesser die Größe  $\frac{\Pi l}{\varepsilon}$  als reciproken Werth hat. Soll demnach, wie in §. 387, die größte Kraft, von welcher die Flächeneinheit des Querschnittes in Anspruch genommen wird, die Grenze  $R$  nicht überschreiten, so hat man die Gleichung zu setzen

$$\frac{R}{E} = \Pi \left\{ \frac{(l+l) \tan \alpha}{E \omega \cdot l} + \frac{v' l}{\varepsilon} \right\};$$

aus welcher man erhält, wenn der Querschnitt ein Rechteck ist, dessen Breite und Höhe durch  $b$  und  $c$  bezeichnet werden,

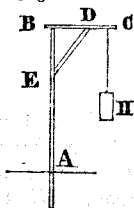
$$R = \frac{\Pi}{b c^2} \left\{ \frac{c(l+l) \tan \alpha}{l} + 6 l \right\},$$

und diese Formel wird das größte Gewicht  $\Pi$  geben, mit dem die Construction belastet werden darf.

§. 540. Man nehme jetzt an, daß der Horizontalstab  $BC$  and die Strebe  $DE$  mit einem Verticalstabe  $AB$  (Fig. 127) verbunden seien, dessen unteres Ende in  $A$  eingemauert ist. Das oben über die Theile  $BC, DE$  Gesagte, gilt auch hier. Der Stab



Fig. 127.



$AB$  wird in  $E$  von einer Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{l \cos \alpha}$  sollicitirt, welche in der Richtung  $DE$  wirkt und sich in eine Horizontalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$ , und in eine Verticalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l}$  zerlegen läßt. Derselbe Stab wird außerdem in  $B$  von einer Horizontalkraft  $\Pi \frac{l+l'}{l} \tan \alpha$  in der Richtung  $BD$ , und von einer von unten nach oben gerichteten Verticalkraft  $\Pi \frac{l'}{l}$  sollicitirt. Man nehme nun

der größern Einfachheit wegen an, daß die Krümmung des Stabes  $AB$  außerordentlich klein sei, so daß die Verschiebungen der Punkte  $B, E$  im Vergleich zu der Länge des Stabes vernachlässigt werden können (was auch in den Fällen, die in der Praxis am häufigsten vorkommen, geschehen kann). Man sieht alsdann

1) daß der Stab  $AB$ , welcher in dem Intervalle  $AE$  durch die Kraft  $\Pi$  in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird, zum Bruche in einem beliebigen Punkte dieses Intervalles von einer Drehkraft angeregt wird, deren Moment gleich  $\Pi(l+l')$  ist und die daher eine Krümmung zu erzeugen strebt, deren Halbmesser die Größe  $\frac{\Pi(l+l')}{2}$  als reciproken Werth hat. Nach dem in

§. 387 Gesagten wird demnach die Grenze der Werthe von  $\Pi$ , wenn die Fasern auf jeder Flächeneinheit des Querschnittes keinen größern Druck als  $R$  erleiden soll, durch die Gleichung gegeben

$$\frac{R}{E} = \Pi \left\{ \frac{1}{E \omega} + \frac{v'(l+l')}{\varepsilon} \right\},$$

welche sich auf die folgende reducirt, wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist,

$$R = \frac{\Pi}{b c^2} [c + 6(l+l')].$$

2) daß derselbe Stab  $AB$ , welcher in dem Intervalle  $BE$  in der Richtung seiner Länge durch die Kraft  $\Pi \frac{l'}{l}$  ausgedehnt wird zum Bruche in  $E$  durch eine Kraft angeregt wird, deren Moment gleich  $\Pi(l+l')$  ist. Die Grenze der Werthe von  $\Pi$  wird demnach, wenn die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes keine größere Spannung als  $R$  erleiden sollen, durch die Gleichung gegeben

$$\frac{R}{E} = \Pi \left\{ \frac{l'}{E \omega l} + \frac{v'(l+l')}{\varepsilon} \right\},$$

welche sich auf die folgende reducirt, wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck ist,

$$R = \frac{\Pi}{bc^2} \left\{ \frac{cl}{l} + 6(l+l') \right\};$$

Liegt der Punkt  $D$  in der Mitte von  $BC$ , so ist in dem Stabe  $AB$  die Neigung zum Bruche in einem beliebigen Punkt des Intervalles  $AE$  und dem Punkte  $E$  gleich groß. Der Stab hat hingegen eine größere Neigung in dem Intervalle  $AE$  zu brechen, als in  $E$ , wenn  $BD$  kleiner ist, als  $CD$ . Der Gleichgewichtszustand des Stabes ist von der Neigung der Strebe  $DE$  unabhängig.

§. 541. Wegen der Krümmung, welche der Stab  $AB$  annimmt, und auf welche die vorhergehenden Formeln keine Rücksicht nehmen, fallen die nach jenen Formeln berechneten Werthe von  $\Pi$  etwas zu groß aus, und die Neigung des Stabes zum Bruche ist in dem Punkte  $A$  größer, als in irgend einem andern Punkte des Intervalles  $AE$ .

Wir wollen jetzt den Gleichgewichtszustand des verticalen Stabes  $AB$  auf eine vollständige Weise untersuchen. Man nenne

$a$  die Länge des Theiles  $AE$ ;

$a'$  die Länge des Theiles  $BE$ ;

$x, y$  die verticale Abscisse und die horizontale Ordinate eines Punktes der Curve, welche die Arc des Stabes bildet,  $A$  als Ursprung des Coordinatensystemes gedacht;

$f$  die Ordinate des Punktes  $E$ ;

$f'$  die Ordinate des Endpunktes  $B$ .

Beachtet man, daß  $a' = \frac{l}{\tan \alpha}$ , so sieht man aus dem Vorhergehenden, daß der Stab  $AB$  sollicitirt wird 1) in  $E$  von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{l}$ , welche horizontal von rechts nach links wirkt, und von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{a}$ , welche vertical von oben nach unten wirkt; und 2) in  $B$  von der Kraft  $\Pi \frac{l+l'}{a}$ , welche horizontal von links nach rechts wirkt, und von der Kraft  $\Pi \frac{l'}{l}$ , welche vertical von unten nach oben wirkt. Es ist demnach

1) die Gleichung, welche die Bedingungen für das Gleichgewicht des Theiles  $AE$  des Stabes ausdrückt,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = & - \Pi \frac{l+l'}{a} (a-x) + \Pi \frac{l+l'}{l} (f-y) \\ & + \Pi \frac{l+l'}{a} (a+a'-x) - \Pi \frac{l'}{l} (f'-y), \end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} - y \right\}. \quad (\alpha)$$

2) Die Gleichung, welche die Bedingungen für das Gleichgewicht des Theiles *BE* ausdrückt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{\varepsilon} \left\{ \frac{l+l'}{a'} (a + a' - x) - \frac{l'}{l} (f' - y) \right\}. \quad (\beta)$$

Verfährt man wie in §. 406, so erhält man als das Integral der Gleichung ( $\alpha$ )

$$y = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \left\{ 1 - \cos x \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\}. \quad (\gamma)$$

welches die Gleichung der Curve ist, die der Theil *AE* des Stabes bildet.

Nennt man  $\varphi$  die Neigung der Tangente der Curve in dem Punkte, welche dem Punkte *E* entspricht, so muß für  $x=a$  aus der letzten Gleichung  $y=f$  und  $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$  folgen. Daher

$$f = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \left\{ 1 - \cos a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \right\},$$

$$\tan \varphi = \left\{ l + l' + \frac{(l+l')f - l'f'}{l} \right\} \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}} \sin a \sqrt{\frac{\Pi}{\varepsilon}}.$$

Verfährt man wie in §. 415, so erhält man als das Integral der Gleichung ( $\beta$ ), oder als die Gleichung der Curve, welche der Theil *BE* des Stabes bildet,

$$f' - y = A \left\{ e^{a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} (a + a' - x)} - e^{-a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} (a + a' - x)} \right\} + \frac{l(l+l')}{a'l} (a + a' - x), \quad (\delta)$$

wo *A* eine willkürliche Constante ist. Aus dieser Gleichung muß ebenfalls  $y=f$  und  $\frac{dy}{dx} = \tan \varphi$  folgen, wenn  $x=a$  gesetzt wird, daher ergibt sich

$$f' - f = A \left\{ e^{a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} - e^{-a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} \right\} + \frac{l(l+l')}{l},$$

$$\tan \varphi = A \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}} \left\{ e^{a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} + e^{-a \sqrt{\frac{\Pi l'}{\varepsilon l}}} \right\} + \frac{l(l+l')}{a'l}.$$

Da man also jetzt vier Gleichungen des ersten Grades zwischen den Größen  $f, f', \tan \varphi$  und  $A$  hat, so lassen sich die beiden letzteren leicht eliminiren und die Werthe von  $f$  und  $f'$  bestimmen. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (γ) und (δ), so erhält man die Gleichungen der beiden Theile der Curve, welche der Stab bildet.

§. 542. Da hier nur sehr geringe Biegungen betrachtet werden, so läßt sich mit einem sehr geringen Fehler  $f$  und  $f'$  auf der rechten Seite der erstern beiden von den vier in Rede stehenden Gleichungen vernachlässigen. Man erhält demnach

$$f = (l + l') \left\{ 1 - \cos a \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \right\},$$

$$\tan \varphi = (l + l') \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sin a \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}};$$

woraus

$$A = (l + l') \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sin a \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} - \frac{l}{a'l'}}{\sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} e \left\{ a \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} + a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} \right\}}$$

Aus der Gleichung (γ) folgt für den Punkt  $A$ , in welchem die Krümmung des Theiles  $AE$  des Stabes am größten ist,

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{\pi}{\varepsilon} (l + l').$$

Aus der Gleichung (δ) folgt für den Punkt  $E$ , in welchem die Krümmung des Theiles  $EB$  am größten ist,

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = A \cdot \frac{\pi l'}{\varepsilon l} \left\{ e \frac{a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}}}{-e} - a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} \right\}.$$

oder, wenn man für  $A$  seinen obigen Werth setzt

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} \cdot (l + l') \left\{ \frac{l}{a'l'} - \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \sin x \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} \right\} \cdot \frac{a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}} - a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}}}{e \frac{a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}}}{+e} - a' \sqrt{\frac{\pi l'}{\varepsilon l}}}$$

Multipliziert man diese Ausdrücke mit  $v'$ , so geben sie die größte Spannung an, welche die Fasern wegen der Biegung er-

leiden, und können daher dazu dienen, die Dimensionen zu bestimmen, welche man dem Stabe geben muß, damit derselbe einer gegebenen Kraft widerstehen kann, wie man dies in den vorhergehenden Kapiteln gesehen hat.

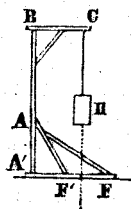
Die Größe  $\frac{\Pi}{z}$  wird in den meisten Fällen der Praxis sehr klein sein, und man kann daher den Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  in dem Punkte  $E$ , wenn man die Größen von der Ordnung  $\frac{\Pi l}{sl}$  vernachlässigt, auf

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\Pi}{z} (l + l')$$

reduciren, welcher Werth mit den Resultaten des §. 540 übereinstimmt.

§. 543. Zuweilen ist der Stab  $AB$  mit seinem untern Ende nicht eingemauert und statt dessen durch einen geneigten Stab  $AF$  (Fig. 128) verstärkt. In diesem Falle gilt alles in den vorherge-

henden Paragraphen Gesagte für den Theil der Construction, welcher oberhalb des Punktes  $A$  liegt. Was den Theil der Construction unterhalb dieses Punktes anlangt, so nehme man zuerst an, daß der Punkt  $F$  jenseit (rechts von) der Verticalen liege, welche durch den Aufhängepunkt des Gewichtes  $\Pi$  geht. Man nenne  $h$  die Entfernung  $AA'$ ,  $\varphi$  den Winkel  $AAF$  und  $l + l'$  bezeichne die Entfernung  $BC$ . Das Gewicht  $\Pi$  sucht den Stab  $AB$  um den Punkt  $A$  zu drehen und zwar mit einem Mo-



mente gleich  $\Pi (l + l')$ . Um diese Drehung zu verhindern, muß der Stab  $AF$  in der Richtung seiner Länge einen Widerstand  $\Pi \frac{l + l'}{h \sin \varphi}$  leisten, welcher in dem Punkte  $A$  und in der Richtung

$FA$  thätig wird und sich in eine Horizontalkraft  $\Pi \frac{l + l'}{h}$  und eine von unten nach oben gerichtete Vertikalkraft  $\Pi \frac{l + l'}{h \tan \varphi}$  zerlegen läßt.

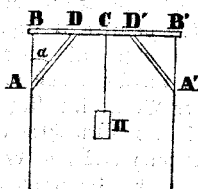
Es muß daher 1) der Stab  $AF$  dem in §. 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden und die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete Kraft ist hier  $\Pi \frac{l + l'}{h \sin \varphi}$ ; und 2) wird der Theil  $AA'$  des verticalen Stabes in der Richtung seiner Länge nur noch mit einer Kraft  $\Pi \left\{ 1 - \frac{l + l'}{h \tan \varphi} \right\}$  zusammengedrückt. Da aber der gegen  $A$  von dem Stabe  $AF$  ausgeübte Horizontaldruck durch einen ent-

gegenseitig gerichteten Druck in dem Stützpunkte  $A'$  ersetzt werden muß, so befindet sich der Theil  $AA'$  in demselben Falle, wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist, während an dem andern Ende ein Druck  $\frac{l+p}{h \tan \varphi}$  in der Are des Stabes und eine Kraft  $\Pi \frac{l+p}{h}$ , welche rechtwinklich gegen diese Are gerichtet ist, wirken.

Wenn nun der geneigte Stab  $AF$  so angebracht wäre, daß der Punkt  $F$  dieselbe (links von) der Verticalen läge, welche durch den Aufhängepunkt des Gewichtes  $\Pi$  geht, so würde die Construction eine Neigung haben, sich um den Punkt  $F$  zu drehen. Die den Stab  $AF$  zusammendrückende Kraft wird auch dann durch  $\Pi \frac{l+p}{h \sin \varphi}$  ausgedrückt und der Theil  $AA'$  des verticalen Stabes erleidet

die Arenspannung  $\Pi \left\{ \frac{l+p}{h \tan \varphi} - 1 \right\}$ . Dieser letztere Stab muß alsdann auf seinem Stützpunkte  $A'$  befestigt werden.

§. 544. Bei der in Fig. 129 dargestellten Construction ist das Gewicht  $\Pi$  in der Mitte des horizontalen Stabes  $BB'$  aufgehängt, dessen Enden von festen Punkten gestützt werden, und der durch die Streben  $AD, A'D'$  verstärkt wird, die mit dem Stabe  $BB'$  verbunden sind und selbst von den festen Punkten  $A, A'$  gestützt werden. Indem das Gewicht  $\Pi$  den Stab  $BB'$  biegt und die Streben  $AD, A'D'$  zusammendrückt, vertheilt sich dadurch die Wirkung dieses Gewichtes auf die vier festen Punkte. Auf demselben Wege,



welcher bei verschiedenen, oben behandelten Fragen eingeschlagen wurde, würden sich die Bedingungen für die Biegung und den Bruch einer solchen Construction finden lassen, da es sich aber in der Praxis weniger darum handelt, das Gewicht zu bestimmen, bei welchem der Bruch erfolgen würde, als eine Grenze zu kennen, über welche hinaus dieses Gewicht nothwendig liegen muß, so kann man hier und in ähnlichen Fällen auf folgende Weise die verwickelte Rechnung vermeiden, welche man sonst vornehmen müßte.

Man unterscheide bei der vorliegenden Construction zwei Systeme, von denen man sich ein jedes allein das Gewicht  $\Pi$  tragend denkt, wo sich dann bei jedem Systeme die Bedingungen für die Biegung und den Bruch sofort angeben lassen; nämlich 1) den Stab  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B, B'$ , ohne Rücksicht auf die beiden Streben; 2) das Polygon  $ADD'A'$  mit den Stützpunkten  $A, A'$ , ohne Rücksicht auf die Verbindung des Theiles  $DD'$  der Schwelle  $BB'$  mit den Theilen  $BD, B'D'$  derselben. Da jedes dieser beiden Systeme für sich betrachtet schwächer ist, als die Construction, welche hier untersucht werden soll, so ist man sicher, daß

das Gewicht, welches den Bruch der Construction bewirken würde, größer ist, als das, welches den Bruch des stärksten dieser beiden Systeme bewirken würde.

Wenn der Stab  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B, B'$  allein das Gewicht  $\Pi$  trüge, so müßte dieses Gewicht, dessen Werth durch die Bedingung bestimmt wird, daß der Stab nicht in  $C$  abgebrochen werden soll, nach §. 122 berechnet werden.

Wenn das System  $ADD'A'$  allein das Gewicht  $\Pi$  trüge, ohne daß ein Druck auf die Punkte  $B, B'$  stattfände, so läge hier der Fall des §. 536 vor. Bezeichnet man daher mit  $\alpha$  den Winkel  $BAD$ , so muß 1) damit das Gewicht  $\Pi$  nicht den Bruch des Stückes  $DD'$  in  $C$  veranlasse, dasselbe aus den Gleichungen in den §§. 413 und 414 bestimmt werden, wo  $a$  die Entfernung  $CD$  bezeichnet, und  $\frac{1}{2}\Pi$  und  $\frac{1}{2}\Pi \tan \alpha$  für  $P$  und  $Q$  an die Stelle gesetzt werden muß; 2) muß das Gewicht  $\Pi$ , damit die beiden Streben demselben widerstehen können, nach den §§. 383 u. 403 bestimmt werden, wo  $\frac{\Pi}{2 \cos \alpha}$  als der Druck anzusehen ist, welcher in der Richtung der Are dieser Streben stattfindet.

In der Praxis wird die Gleichung in §. 414 in der Regel sehr wenig von  $R' = \frac{1}{bc^2} (Qc + 6Pa)$ , oder, wenn man für  $P, Q$  ihre obigen Werthe setzt, von

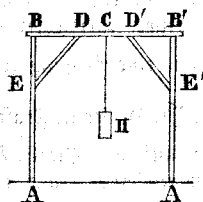
$$R' = \frac{\Pi}{2bc^2} (c \tan \alpha + 6a)$$

abweichen. Andererseits folgt aus §. 122, wenn man  $a'$  die Entfernung  $BB'$  nennt, durch Betrachtung des Gleichgewichtes des Stabes  $BB'$  mit den Stützpunkten  $B, B'$ ,

$$R' = \frac{\Pi \cdot 6(a+a')}{2bc^2}.$$

Bei einem Stabe mit einem rechteckigem Querschnitt leistet also das System  $ADD'A'$  einen größern Widerstand, als der Stab  $BB'$ , wenn  $\tan \alpha < \frac{6a'}{c}$  ist, vorausgesetzt, daß die Streben  $AD, A'D'$  eine genügende Stärke besitzen.

§. 545. Wir wollen jetzt annehmen, daß die Schwelle  $BB'$  und die Streben  $DE, D'E'$  (Fig. 130) mit verticalen Posten  $AB, A'B'$  verbunden seien. Wären bei einer solchen Construction die untern Enden  $A, A'$  der beiden Pfosten frei, so daß sie auf der Ebene, von welcher sie getragen werden, gleiten könnten, so würden die Streben dem Systeme nur ein stabiles Gleichgewicht verschaffen, ohne die Tragkraft desselben zu vermehren, und der Stab  $BB'$  würde auf die nämliche Weise zum Bruche in  $C$  angeregt werden, als ob die Streben nicht vorhanden



wären. In der That wirkt in beiden Fällen in dem Punkte *A* eine von unten nach oben gerichtete Kraft  $\frac{1}{2}\Pi$  mit dem Hebelarm *BC*, welche den Stab *BB'* in *C* abzubrechen sucht.

§. 546. Nimmt man im Gegentheil bei der in Fig. 130 dargestellten Construction die untern Enden *A*, *A'* der beiden Pfosten als fest an, so können diese Punkte auch einen Druck in schiefer Richtung aufnehmen, wodurch das Kraftmoment verringert wird, welches den Bruch des Stabes *BB'* in *C* zu bewirken sucht. Auf eine solche Construction läßt sich das in §. 544 befolgte Verfahren anwenden, indem man zwei Systeme unterscheidet, von denen jedes einzeln das Gewicht  $\Pi$  tragen können muß; nämlich 1) den Stab *BB'*, insofern er nur von den Pfosten *AB*, *A'B'* unterstützt wird, und 2) das Polygon *EDDE'*, welches sich in *E*, *E'* gegen dieselben Pfosten stützt.

Damit das erste System das Gewicht  $\Pi$  tragen könne, darf dieses Gewicht den Stab *BB'* nicht zerbrechen, wenn derselbe nur an seinen Enden unterstützt ist, und die Pfosten *AB*, *A'B'* müssen einem Drucke  $\frac{1}{2}\Pi$  in der Richtung ihrer Axe widerstehen.

Damit das zweite System dasselbe Gewicht tragen könne, müssen erstens das Stück *DD'* und die Streben *DE*, *D'E'* die nöthige Stärke besitzen, welche sich nach §. 544 ergibt. Sodann beachte man, daß in dem Punkte *E* und in der Richtung *DE* ein Druck  $\frac{\Pi}{2\cos\alpha}$  stattfindet, welcher einer Horizontalkraft  $\frac{\Pi \tan\alpha}{2}$  und

einer Vertikalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  gleich gilt. Der Verticaldruck wird auf den Stützpunkt *A* übertragen, und die Horizontalkraft zerlegt sich in zwei andere, welche in *A* und *B* angreifen. Nennt man *h* und *h'*

die Entfernungen *AE* und *BE*, so hat man  $\frac{\Pi h \tan\alpha}{2(h+h')}$  für die in *A* angreifende Composante, welche durch den Widerstand des Stützpunktes vernichtet wird, und  $\frac{\Pi h' \tan\alpha}{2(h+h')}$  für die in *B* angreifende

Composante, welche eine Spannung in dem Theile *BD* hervorbringt. Es müssen daher zweitens die Theile *BD*, *B'D'* einer Spannung in der Richtung der Axe von  $\frac{\Pi h \tan\alpha}{2(h+h')}$  widerstehen können.

Was drittens die verticalen Stäbe *AB*, *A'B'* anlangt, so kann man den Stab *AB* als in *E* festgehalten ansehen, während er an dem Ende *A* sollicitirt wird, von einer Vertikalkraft  $\frac{\Pi}{2}$  und einer Horizontalkraft, deren Moment, um eine Biegung des

Stabes in *E* zu bewirken, gleich  $\Pi \frac{h h' \tan\alpha}{2(h+h')}$  ist. Die Horizontalkraft, welche den Stab in *B* angreift, hat in Bezug auf den Punkt *E* ein eben so großes Moment. Vernachlässigt man daher, wie in



§. 540, die Betrachtung der Krümmung der Stäbe, so wird, in Uebereinstimmung mit §. 387, die Grenze der Werthe von  $\Pi$  durch die folgende Gleichung gegeben, wenn die verticalen Stäbe in den Bruchstellen  $E, E'$  für jede Flächeneinheit des Querschnittes keinen größern Druck als  $R$  erleiden sollen,

$$\frac{R}{E} = \frac{\Pi}{2} \left( \frac{1}{E\omega} + \frac{v' \cdot hh' \tan \alpha}{s(h+h')} \right).$$

Ist der Querschnitt der Stäbe ein Rechteck, so reducirt sich die Gleichung auf

$$R = \frac{\Pi}{2bc^2} \left\{ c + \frac{6 \cdot hh' \tan \alpha}{h+h'} \right\}.$$

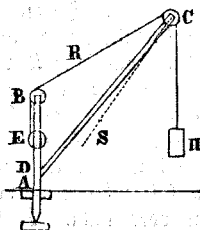
Diese Formeln werden, wegen der vernachlässigten Krümmung der Stäbe, etwas zu große Werthe für  $\Pi$  geben, die aber in den gewöhnlichen Fällen der Praxis wenig von den wahren Werthen abweichen werden.

Ist das Gewicht  $\Pi$  so bestimmt worden, daß es von jedem der beiden genannten Systeme getragen werden kann, so wird es um so mehr von der in Rede stehenden Construction getragen werden können.

### Gleichgewicht der Krähne.

§. 547. Man unterscheidet unter den Krähnen zwei Arten: 1) diejenigen, deren Are im Boden oder an der Mauer so befestigt ist, daß sie nicht von der Stelle gerückt werden können, und 2) die beweglichen Krähne, die frei auf dem Boden stehen und von einem Orte zum andern transportirt werden können.

In Fig. 131 ist ein Krahn der ersten Art dargestellt, welcher nur aus dem Krahnbaum  $AB$  und dem geneigten Stücke  $DC$  besteht, welches mit dem Baume so verbunden ist, daß sich der Winkel, den die beiden Theile mit einander bilden, nicht ändern kann. Der Baum hat an seinem untern Ende einen Zapfen, mittelst welchen er drehbar ist, und ein Halslager, wodurch er gehalten wird. Das Seil, mittelst welches das Gewicht  $\Pi$  aufgewunden wird, geht in  $C$  und  $B$  über Rollen und wickelt sich in  $E$  auf einen Haspel, dessen Are an dem Krahnbaum  $AB$  angebracht ist. Die Spannung



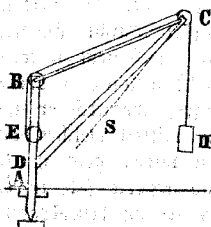
$R$  in dem Theile  $CB$  des Seiles kann etwas größer oder kleiner als das Gewicht  $\Pi$  sein, je nachdem dieses Gewicht mittelst einer einfachen Rolle oder mittelst eines Flaschenzuges gehoben wird; die Resultante aus  $\Pi$  und der Spannung  $R$  wollen wir durch  $S$  bezeichnen. Den Stab  $CD$  muß man als nur in  $D$  festgehalten

und in *C* von der Kraft sollicitirt ansehen, man muß ihn daher dem in §. 412 betrachteten Stabe gleichstellen, indem *S* für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft gesetzt wird. Sieht man von der Krümmung des Krahnbaumes ab, so kann man den Theil *BE* des Baumes als einen Stab betrachten, der in *E* festgehalten und in *B* von der Resultanten aus den Spannungen in den beiden Theilen *BC*, *BE* des Seiles sollicitirt wird. Der Theil *DE* widersteht auf dieselbe Weise, wie ein Stab, der in *D* festgehalten und in *B* von der Spannung *R* sollicitirt wird; derselbe muß daher dem in §. 415 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, indem man *R* für die in jenem Paragraphen mit  $\Pi$  bezeichnete Kraft, und *DB* für die mit *a* bezeichnete Entfernung setzt. Der Theil *AD* widersteht wie ein in *A* festgehaltener Stab, auf den das Gewicht  $\Pi$  wirkt; derselbe muß dem in §. 406 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, indem man für *a* und *l* respective die Entfernung *AD* und die horizontale Entfernung des Punktes *C* von dem Punkte *A* setzt. Was endlich den Theil *AA'* des Krahnbaumes anlangt, so beachte man, daß in *A'* gegen die Stütze ein horizontaler Druck entstehen muß, dessen Moment dem Momente des Gewichtes  $\Pi$  gleich sein muß, wenn beide auf den Punkt *A* bezogen werden. Man muß daher den Theil *AA'* ansehen, als würde er in *A* festgehalten und in *A'* von der in Rede stehenden Horizontalkraft und einer Verticalkraft  $\Pi$ , welche den Theil *AA'* zusammen zu drücken sucht, sollicitirt.

Die Richtung der Kraft *S* kann fast mit *CD* zusammenfallen, so daß der Verband in *D* sehr wenig in Anspruch genommen wird. Ein Krahn von dieser Art kann also eine ziemlich Solidität besitzen.

§. 548. Das Ende *C* des Stabes *CD* läßt sich durch das Band *BC* (Fig. 132) aufrecht halten und dann ist die Unveränderlichkeit des Winkels *BDC* nicht mehr von dem Verbande in *D* abhängig. In diesem

Fig. 132.



Falle zerlege man die Resultante *S* aus dem Gewichte  $\Pi$  und der Spannung *R* des Seilzweiges *BC* in zwei Kräfte nach den Richtungen *CD* und *CB*. Der Stab *CD* widersteht, wie einer der beiden Stäbe, die in §. 383 und §. 389 betrachtet wurden, je nachdem dieser Stab *CD* sich frei um den Punkt *D* drehen kann oder nicht. Sieht

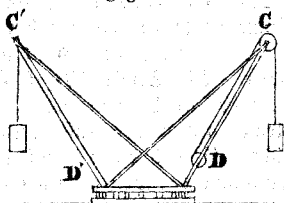
man wieder von der Krümmung ab, welche der Krahnbaum annehmen kann, so muß der Theil *BE* als ein in *E* festgehaltener Stab angesehen werden, der in *B* von der Resultanten aus den Spannungen der beiden Seilzweige *BE* und *BC* und von der Spannung des Bandes *BC* sollicitirt wird. Der Theil *DE* muß angesehen werden, als würde er in *D* festgehalten und in *B* von

der Spannung  $R$  des Seilzweiges  $BC$  und von der Spannung des Bandes  $BC$  sollicitirt würde. Der Theil  $AD$  endlich, und der Theil  $AA'$  werden auf die oben angegebene Weise zum Bruche in  $A$  angeregt.

Das Stück  $CD$ , welches stets zusammengeedrückt wird, muß von Holz oder von Gußeisen sein. Das Band  $BC$  kann, wenn es nur ausgedehnt wird, aus Stabeisen gemacht werden. Biegt aber die Resultante in dem Winkel  $BCD$ , so werden die Theile  $CD$ ,  $CB$  beide zusammengeedrückt und müssen daher ebenfalls einer Druckkraft widerstehen können.

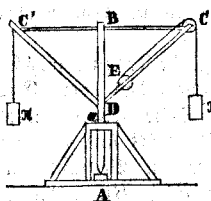
§. 549. Ein Krahn, der frei auf dem Boden stehen soll, ohne daran befestigt zu sein, muß so construirt werden, daß die Verticale, in welcher der Schwerpunkt der Gesamtlast liegt, stets innerhalb der Basis des Krahnes bleibt, weshalb gewöhnlich die Anwendung eines Gegengewichtes nöthig wird.

Fig. 133.



In Fig. 133 ist ein solcher Krahn dargestellt, der von einer kreisförmigen mit Rädern versehenen Scheibe getragen wird, wodurch der Krahnbaum unnöthig gemacht ist. Die Stärke der Theile  $CD$  und  $C'D$  ist nach §. 532 zu bestimmen.

§. 550. In Fig. 134 ist ein Krahn dargestellt mit drehbarem Baume, der in  $A$  einen Zapfen hat und in  $a$  von einem Halbbande gehalten wird. Das ganze Gewicht der Construction wird auf den Baum nach dem Punkte  $D$  übertragen. Das Stück  $CC'$  ist ein einfaches, horizontales Band, welches in  $B$  an dem Ende des Baumes befestigt werden muß. Die Stärke der Theile  $CD$ ,  $BC$ , oder  $C'D$ ,  $BC'$  ist nach §. 532 zu bestimmen. Der Theil  $BD$  des Baumes widersteht, wie ein Stab, der in  $D$  festgehalten und in  $B$  von einer Kraft sollicitirt wird, die gleich der Differenz der Spannungen in den Theilen  $BC$ ,  $BC'$  des Zugseiles ist. Der Theil  $DC$  widersteht, wie ein Stab, der in  $a$  festgehalten und von dem Totalgewichte der Construction sollicitirt wird; hat man daher die Entfernung der Ase  $AB$  von dem Schwerpunkte der sämtlichen Gewichte gefunden, die von dem Punkte  $D$  getragen werden, so stelle man diesen Theil  $Da$  dem in §. 406 betrachteten Stabe gleich, indem man für  $II$  die Summe dieser sämtlichen Gewichte, für  $l$  die horizontale Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Punkte  $a$ , und für  $a$  die Entfernung  $Da$

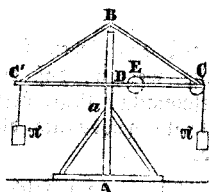


der Differenz der Spannungen in den Theilen  $BC$ ,  $BC'$  des Zugseiles ist. Der Theil  $DC$  widersteht, wie ein Stab, der in  $a$  festgehalten und von dem Totalgewichte der Construction sollicitirt wird; hat man daher die Entfernung der Ase  $AB$  von dem Schwerpunkte der sämtlichen Gewichte gefunden, die von dem Punkte  $D$  getragen werden, so stelle man diesen Theil  $Da$  dem in §. 406 betrachteten Stabe gleich, indem man für  $II$  die Summe dieser sämtlichen Gewichte, für  $l$  die horizontale Entfernung ihres Schwerpunktes von dem Punkte  $a$ , und für  $a$  die Entfernung  $Da$

einsetzt. Der Theil  $aa$  des Baumes endlich widersteht, wie ein in  $a$  festgehaltener Stab, dessen Ende  $A$  sollicitirt wird von einer Vertikalkraft, die dem Gewichte der Construction gleich ist, und einer Horizontalkraft, die groß genug ist, um diesem Gewichte das Gleichgewicht gegen eine Drehung um den als fest angenommenen Punkt  $a$  zu halten.

§. 551. Bei der in Fig. 135 dargestellten Construction ist der Baum nicht drehbar und er trägt das Gewicht der Construction

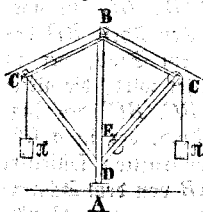
Fig. 135.



auf seinem obern Ende  $B$ . Die Stücke  $BC$  und  $BC'$  sind zwei geneigte Bänder und  $CC'$  ist ein horizontales Stück, welches den Baum mittelst eines Halsbandes umfaßt. Durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  wird in dem Bande  $BC$  eine Spannung erzeugt, die durch die Bedingung bestimmt wird, daß die verticale Componente dieser Spannung gleich  $\Pi$  sein muß. Das Stück  $CD$  wird in der Richtung seiner Länge durch eine Kraft zusammengedrückt, die der horizontalen Componenten dieser selben Spannung gleich ist. Analoge Wirkungen hat der Punkt  $C'$  zu erleiden. Die Stücke  $CD$ ,  $C'D$  müssen dem in §. 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden. Der Theil  $CE$  des Stückes  $CD$  erleidet außer der Zusammendrückung durch die Wirkung des Gewichtes  $\Pi$  noch einen Druck in der Richtung der Ase, welcher der Spannung des Seilzweiges  $CE$  gleich ist. Der Theil  $BD$  des Kranebaumes widersteht wie ein Stab, der in  $D$  festgehalten und in  $B$  sollicitirt wird, die der Resultanten aus den Spannungen der Bänder  $BC$ ,  $BC'$  gleich ist. Die Theile  $Da$  und  $aa$  werden hier eben so in Anspruch genommen und widerstehen auf dieselbe Weise, wie es in dem vorhergehenden Paragraphen angegeben wurde.

§. 552. Es soll endlich noch der bewegliche Krane besprochen werden, den Fig. 436 darstellt, und bei welchem das obere Ende

Fig. 136.



des Baumes durch starke Seile gehalten wird. Die geneigten Stücke  $CD$ ,  $C'D$  sind mit dem untern Ende des Baumes in Verband und werden durch die Bänder  $BC$ ,  $BC'$ , die an dem obern Ende des Baumes befestigt sind, gehalten. Der Arendruck bei den Stücken  $CD$ ,  $C'D$  und die Spannung der Bänder  $BC$ ,  $BC'$  wird wie in den vorhergehenden Fällen bestimmt. Der Baum  $AB$  kann sich nach der einen oder andern Seite überbiegen, und er wird dazu durch die Differenz der horizontalen Componenten der Spannungen der Bänder  $BC$ ,  $BC'$  angeregt. Es muß daher stets in den Seilen, welche das obere Ende des Baumes halten, eine solche Spannung stattfinden, daß durch die horizontale Componente die in Rede

stehende Differenz vernichtet wird. Ist diese Bedingung erfüllt, so muß der Baum dem in §. 383 betrachteten Stabe gleichgestellt werden, indem man für die in jenem Paragraphen mit  $Q$  bezeichnete Kraft die Summe aus den verticalen Componenten der Spannungen der beiden Bänder  $BC$ ,  $BC'$  und denen der Spannungen der Seile einsetzt.

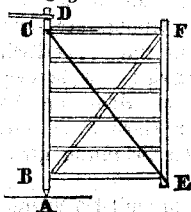
## Neuntes Kapitel.

### Widerstand der Schleusenthore.

§. 553. Bei den Schleusenthoren haben die einzelnen Theile zu gleicher Zeit die Wirkung ihres eigenen Gewichtes und den horizontalen Druck des Wassers auszuhalten. Die Untersuchung wird sich in dem Folgenden auf solche Thore beschränken, die die Form eines rechteckigen Rahmens haben, dessen verticale Seiten durch horizontale Querbölzer verbunden sind, auf welche die Bohlcn genagelt sind.

### Wirkung der Schwere auf die Schleusenthore.

§. 554. In Fig. 137 ist ein Schleusenthor dargestellt, dessen Haupttheil in dem Rahmen  $BCFE$  besteht. Die Wendesäule  $BC$  steht in  $A$  auf einem Zapfen und geht in  $D$  durch ein Halsband, welches von mehreren Eisenstangen gehalten wird, die eine solche Spannung besitzen müssen, daß die Resultante der verschiedenen Spannungen dem Gewichte des Thores gegen eine von oben nach unten gerichtete Drehung um den Punkt  $A$  das Gleichgewicht hält.



§. 555. Die Säule  $BC$  mittelst des Halsbandes  $D$  in verticaler Stellung erhalten wird, so ruht das ganze Gewicht auf dem untern Theile dieser Säule und der Stütze  $A$ . Durch die Wirkung der Schwere sucht sich von der Säule  $BC$  der ganze übrige Theil des Thores durch eine Drehung um den Punkt  $B$  abzulösen. Diese Bewegung läßt sich durch Bänder verhindern,

mittels welcher der oberste Querriegel oder auch sämtliche Querriegel mit der Säule  $BC$  verbunden werden, wo dann die Wirkung der Schwere der Säule  $EF$  nur herabzuziehen und die Form des Rechtecks in die eines schiefwinkligen Parallelogrammes zu verändern sucht. Damit nun die Construction die nöthige Solidität besitze, muß 1) das Zimmerwerk des Thores sich nicht von der Wendesäule  $BC$  ablösen können, und 2) muß die rechtwinklige Gestalt des Rahmens unverschiebbar sein.

§. 556. Den eben aufgestellten Bedingungen geschieht Genüge, wenn der oberste Querriegel  $CF$  mit der Wendesäule  $BC$  durch ein eisernes Band verbunden wird, oder wenn man in dem Rahmen die Strebe (bracon)  $BF$  anbringt, wo übrigens die Querriegel als drehbar um ihre Verbandstellen angesehen werden können. Nennt man  $G$  ein Gewicht, welches, wenn es in  $F$  aufgehängt würde, in Bezug auf den Punkt  $B$  dasselbe Moment hätte, wie das Gewicht des Schleusenthores, und  $\varphi$  den Winkel  $CBF$ , so hat man  $\frac{G}{\cos \varphi}$  für den Druck, welchen die Strebe  $BF$  in der Richtung ihrer Ase erleidet, so wie  $G$  tang  $\varphi$  für die Arenspannung in dem obersten Querriegel  $CF$  und dem Bande  $C$ .

§. 557. Denselben Bedingungen kann auch Genüge geschehen mittels eines schräg liegenden Ankers  $CE$ , der in  $C$  an der Wendesäule befestigt wird. Die Querriegel können auch hier als frei drehbar um ihre Verbandstellen mit den Säulen angesehen werden. Die Arenspannung des Ankers drückt sich durch  $\frac{G}{\cos \varphi}$  aus, wenn man  $\varphi$  die Winkel  $CEF$  nennt.

§. 558. Will man weder eine Strebe (bracon) noch einen Anker anwenden, so muß wenigstens einer unter den Querriegeln (z. B. der oberste  $CF$ ) mit der Wendesäule so verbunden werden, daß eine Drehung um die Verbandstelle nicht stattfinden kann. Diese Bedingung genügt, um dem Rahmen die rectanguläre Form zu erhalten. Der Querriegel, dessen Verband auf eine solche Weise ausgeführt ist, trägt, wenn alle übrigen Querriegel frei drehbar bleiben, das ganze Gewicht des Schleusenthores mit Ausnahme der Wendesäule, und er widersteht wie ein mit dem einen Ende horizontal eingemauerter Stab, über dessen Länge die Belastung gleichförmig vertheilt ist.

Die Festigkeit des Ganzen gewinnt, wenn man mit der Wendesäule auf die oben angegebene Weise nicht nur den obersten Querriegel  $CF$ , sondern auch den untersten  $BE$ , oder selbst alle übrigen Querriegel verbindet. Das Gewicht des Thores vertheilt sich so dann auf die verschiedenen, so verbundenen Querriegel.

§. 559. Eine noch größere Festigkeit wird erhalten, wenn man die Querriegel nicht nur mit der Wendesäule  $BC$ , sondern

auch mit der Aufschlagssäule  $EF$  so verbindet, daß ihre Richtung in der Verbandstelle sich nicht ändern kann.

§. 560. Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß die Querriegel sich in drei verschiedenen Gleichgewichtszuständen befinden können.

1. Sind die Querriegel, so mit den beiden Säulen verbunden, daß sie sich frei um ihre Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, der mit seinen Enden frei auf Stützen liegt. Demnach muß man nach §. 90 schließen, daß die größte Zusammendrückung oder Ausdehnung der Fasern, welche in einem beliebigen Punkte in Folge der Biegung in der Verticalebene eintritt, gleich

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{2\varepsilon} (a^2 - x^2),$$

ist, wenn  $p$  das von der Einheit der Länge getragene Gewicht,  $a$  die halbe Länge des Querriegels,  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von der Mitte des Querriegels,  $\varepsilon$  das Widerstandsmoment gegen eine Biegung in der Verticalebene und  $v'$  die Entfernung der äußersten Fasern, welche zusammengebrückt oder ausgedehnt werden, von der durch den Querschnitt gehenden Gleichgewichtsaxe bezeichnet.

§. 561. 2. Sind die Querriegel nur mit der Wendesäule so verbunden, daß sie sich nicht um die Verbandstelle drehen können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist. Demnach ergibt sich aus §. 89 für die größte Zusammendrückung der Fasern

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{\varepsilon} \left( \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right);$$

wo  $a$  die Länge der Querriegel und  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von dem festgehaltenen Ende bezeichnet.

§. 562. 3. Sind die Querriegel mit beiden Säulen so verbunden, daß ihre Richtungen in den Verbandstellen sich nicht ändern können, so widerstehen sie auf dieselbe Weise, wie ein Stab, dessen eines Ende eingemauert ist, und für dessen anderes Ende die Bedingung besteht, daß hier die Tangente an die Curve, welche die Ase des Stabes während der Biegung bildet, horizontal bleiben soll. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Stabes läßt sich, wenn man die Belastung als gleichförmig über seine Länge vertheilt ansieht, auf die folgende Weise näher bestimmen.

Man nenne

$p$  das constante Gewicht, welches von jeder Längeneinheit des Stabes  $AM$  (Fig. 138) getragen wird;

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve, welche die Ase des Stabes bildet;

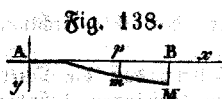


Fig. 138.

$a$ ,  $f$  die Abscisse  $AB$  und die Ordinate  $MB$  des Endpunktes  $M$  der Curve;  
 $\varepsilon$  behalte die in §. 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung des Stabes  $AM$  ist alsdann

$$\varepsilon \frac{dy^2}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + A,$$

wo  $A$  eine Constante bezeichnet. Es folgt hieraus

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} + Ax;$$

und bestimmt man die Constante  $A$  so, daß in dem Punkte  $M$   $\frac{dy}{dx} = 0$  wird, wenn man  $x = a$  setzt, woraus  $A = -\frac{pa^2}{6}$  folgt, so hat man

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{3} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\},$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{6} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\},$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{a^4}{24}.$$

Die Durchbiegung des Endpunktes  $M$  ist nur ein Dritteltheil so groß, als sie sein würde, wenn dieser Punkt ganz frei wäre, wie dies in §. 89 angenommen wurde. Die größte Zusammendrückung der Fasern ist

$$v \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{3} - ax + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

wo  $a$  die Länge des Querholzes und  $x$  die Entfernung des betrachteten Punktes von dem festgehaltenen Ende ist.

**Untersuchung des Falles, in welchem die Schlenfenthore zum Theil von einer Rolle getragen werden.**

§. 563. Befindet sich unter der Säule  $EF$  (Fig. 137) oder in der Nähe derselben eine Rolle, durch welche das Thor mit getragen wird, so hat der Rahmen  $BCEF$  keine Neigung, sich zu verschieben. Man kann dann die Strebe  $BF$ , so wie den Anker  $CE$  weglassen und die Construction wird doch noch eine genügende Solidität besitzen, wenn nur die Querriegel mit den beiden Säulen durch Bänder verbunden werden.

§. 564. Wird die Anschlagssäule  $EF$  auf solche Weise unterstützt, so widerstehen die Querriegel den Gewichten, welche sie



zu tragen haben, im Allgemeinen auf eine andere Weise, als in §. 560 u. folgd. angegeben wurde.

1. Sind die Querriegel mit den beiden Säulen so verbunden, daß sie sich frei um ihre Verbandstellen drehen können, so läßt sich das in §. 560 Gesagte anwenden.

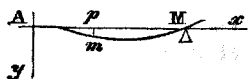
§. 565. 2. Sind die Querriegel nur mit der Wendesäule so verbunden, daß sie sich nicht um ihre Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie, wie ein Stab, der mit dem einen Ende horizontal eingemauert ist, und mit dem andern Ende auf einer Stütze ruhet. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Stabes läßt sich auf die folgende Weise näher bestimmen.

Man nenne

$p$  das constante Gewicht, mit dem jede Einheit der Länge des Stabes  $AM$  (Fig. 139) belastet ist;

Fig. 139.

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes  $m$  der Curve, welche die Arc des Stabes bildet;  $a$  die Länge  $AM$ ;



$\Pi$  der Druck, welchen der Stab auf die an dem Ende  $M$  befindliche Stütze ausübt;

$\varepsilon$  behalte die in §. 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist dann

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi(a-x),$$

woraus

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2 x}{2} - \frac{ax^2}{6} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\},$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} - \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\}.$$

Bestimmt man das Gewicht  $\Pi$  aus der Bedingung, daß  $y=0$  werden soll, wenn man  $x=a$  setzt, so hat man  $\Pi = \frac{2}{3} pa$  und

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2 x^2}{16} - \frac{5ax^3}{48} + \frac{x^4}{24} \right\}.$$

Die größte Zusammendrückung der Fasern ist

$$v \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{v \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{8} - \frac{5ax}{8} + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

§. 566. 3. Sind die Querriegel mit beiden Säulen so verbunden, daß sie sich nicht um die Verbandstellen drehen können, so widerstehen sie, wie ein Stab, dessen beide Enden eingemauert sind. Unter Beibehaltung der in dem vorhergehenden Paragraphen ge-

brauchten Benennungen hat man für die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi(a-x) + A,$$

wo  $A$  eine Constante bezeichnet. Man erhält hieraus

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = p \left\{ \frac{a^2x}{2} - \frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} + Ax,$$

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2x^2}{4} - \frac{ax^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right\} - \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + A \frac{x^2}{2};$$

und bestimmt man die Constanten  $\Pi$  und  $A$  so, daß man  $\frac{dy}{dx} = 0$  und  $y = 0$  für den Endpunkt, wo  $x = a$  ist, erhält, so

hat man  $\Pi = \frac{pa}{2}$ ,  $A = \frac{pa^2}{12}$ , und

$$\varepsilon y = p \left\{ \frac{a^2x^2}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{x^4}{24} \right\}.$$

Setzt man  $x = \frac{a}{2}$ , so erhält man  $\frac{p}{\varepsilon} \frac{a^4}{384}$  für die Ordinate des Mittelpunktes oder den Pfeil der Curve. Vergleicht man dieses Resultat mit dem des §. 90, so sieht man, daß diese Durchbiegung nur  $\frac{1}{8}$  so groß ist, als sie sein würde, wenn beide Enden frei auf Stützen lägen. Vergleicht man das Resultat aber mit dem des §. 373, so findet man, daß hier die Durchbiegung halb so groß ist, als sie sein würde, wenn das Gewicht  $pa$  in der Mitte des Stabes aufgehängt wäre, anstatt gleichförmig über die Länge desselben vertheilt zu sein.

Die größte Zusammendrückung der Fasern ist

$$v' \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{v' \cdot p}{\varepsilon} \left\{ \frac{a^2}{12} - \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{2} \right\}.$$

### Wirkung des Wasserdruckes auf die Schleusenthore.

§. 567. Ist das Thor geschlossen und so dem Wasserdrucke ausgesetzt, so sind die beiden Säulen  $AD$ ,  $EF$  (Fig. 137) in ihrer ganzen Höhe gestützt, und der Druck des Wassers kann daher nur auf die Querriegel so wirken, daß eine Biegung derselben eintritt. Bei der Berechnung des Wasserdruckes muß man einen Unterschied machen zwischen den einfachen Thoren und den Stemmthoren (wo zwei Flügel unter einem Winkel zusammenstoßen). Bei den ersten läßt sich die Wirkung des Wasserdruckes auf die einzelnen Querriegel mit der eines Gewichtes vergleichen, welches gleichförmig über die Länge eines horizontalen Stabes vertheilt ist, der

mit seinen Enden auf Stützen ruhet. Bei den letzteren entsteht in der Richtung der Länge der Querriegel ein Druck, der mit in Betracht gezogen werden muß.

§. 568. Man nehme jetzt an, daß jeder Querriegel erstens den Druck aufnehme, den das Wasser auf den Raum ausübt, der von den beiden Linien begrenzt wird, die sich in dem halben Abstände der beiden nächsten Querriegel befinden; so wie zweitens den Druck, der sich in Folge dieses Wasserdruckes ergiebt. Nennt man  $p_1$  den Druck, welcher in Folge des Wasserdruckes auf jede Einheit der Länge eines beliebigen Querriegels stattfindet,  $2a$  diese Länge  $MM'$  (Fig. 140) und  $\varphi$  den Winkel  $CMM'$ , so hat man  $p_1 2a$  für den Druck normal auf  $MM'$ , und  $p_1 a$  für die Componenten, denen an den Enden  $M$  und  $M'$  das Gleichgewicht gehalten werden muß. Der Druck, den zwei Querriegel  $MM'$  in  $M'$  gegen einander ausüben, ist also eine parallel zu  $CM$  gerichtete Kraft, deren auf  $MM'$  normal stehende Componente gleich  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  ist. Man muß daher den Riegel  $MM'$  wie einen Stab ansehen, der mit den Enden auf Stützen ruhet und mit einem über seine Länge gleichförmig vertheilten Gewichte belastet ist, während er zugleich einen Druck  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  in der Richtung seiner Axe erleidet.

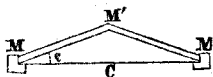


Fig. 140.

§. 569. Jede Hälfte eines solchen Stabes widersteht also wie ein Stab  $AM$  (Fig. 141), der in  $A$  horizontal eingemauert und mit einem gleichförmig über seine Länge vertheilten Gewichte belastet ist, während er zugleich in  $M$  von einer von unten nach oben wirkenden Verticalkraft  $P$  und einer Horizontalkraft  $Q$  sollicitirt wird.



Man nenne

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate  $Ap, pm$  eines beliebigen Punktes der Curve  $AM$ ;

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes  $M$ ;

$p_1$  das Gewicht, welches von der Einheit der Länge des Stabes getragen wird;

$\varepsilon$  behalte die in §. 80 angegebene Bedeutung.

Die Gleichgewichtsgleichung ist dann

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p_1 \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) + Q(f-y),$$

oder, wenn man beachtet, daß in dem vorliegenden Falle  $P = p_1 a$  ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p_1}{2\varepsilon} (a^2 - x^2) + \frac{Q}{\varepsilon} (f - y)$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f - y = A \sin \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} (x + B) - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1}{2Q} (a^2 - x^2),$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Für den Punkt  $A$  muß  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  sein, und für den Punkt  $B$ ,  $x = a$ ,  $y = f$ ; daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$f = A \sin B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} - \frac{p_1 a^2}{2Q},$$

$$0 = A \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} \cos B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

$$0 = A \sin (a + B) \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon p_1}{Q^2};$$

woraus folgt

$$\cos B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 0, \quad \sin B \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} = 1, \quad A = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2 \cdot \cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}},$$

$$f = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - 1 \right\} - \frac{p_1 a^2}{2Q};$$

und für die Gleichung der Curve,

$$y = \frac{\varepsilon p_1}{Q^2} \cdot \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}}{\cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - \frac{p_1 x^2}{2Q},$$

worin man für  $Q$  seinen Werth  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  setzen muß.

§. 570. Mit Hülfe der in §. 387 gegebenen Regeln lassen sich die Dimensionen des Querschnittes so bestimmen, daß der Stab der in Rede stehenden Wirkung widerstehen kann. Der Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  wird ein Maximum in dem Punkte  $A$  und ist hier

$$\frac{\tan \varphi}{a} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{p_1 a}{\varepsilon \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

Soll daher der größte Druck, den die Fasern für jede Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R$  nicht übersteigen, so hat

man, unter Beibehaltung der in dem citirten Paragraphen angegebenen Benennungen, die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{p_1 a}{E \omega \cdot \tan \varphi} + \frac{v' \cdot \tan \varphi}{2a} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{p_1 a}{\varepsilon \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

### Gleichzeitige Wirkung der Schwere und des Wasserdruckes auf die Schleusenthore.

§. 571. Durch das Gewicht der Construction wird bei den Querriegeln eine Biegung in der verticalen, und durch den Druck des Wassers eine Biegung in der horizontalen Ebene bewirkt. Da diese beiden Biegungen sehr klein sind, so kann man die Verlängerungen und Verkürzungen, welche als die gemeinschaftliche Folge derselben eintreten, als die Summe derjenigen Veränderungen ansehen, welche jede Biegung für sich bewirken würde. Die Längenveränderungen, welche wegen der verticalen Biegung eintreten, finden sich in §. 560 u. folgd. angegeben. Um also den Totalwerth der Zusammendrückung zu erfahren, welche die Fasern wegen der beiden Biegungen erleiden, muß man einen der für  $v' \frac{dy}{dx}$  in jenem Paragraphen gegebenen Werthe zu dem Werthe hinzufügen, welcher für dieselbe Größe sich aus der Gleichung in §. 569 ergibt. Die Werthe, welche man für die Summe erhält, werden je nach den einzelnen Punkten der Länge verschieden sein, und der größte derselben darf den Bruch  $\frac{R}{E}$  nicht übertreffen, wenn der Druck auf jede Flächeneinheit der Fasern die Grenze  $R$  nicht übersteigen soll.

§. 572. In dem Falle z. B., welcher in den §§. 560 und 564 untersucht wurde, in welchem die Querbölzer am meisten in Anspruch genommen werden, findet die größte Längenänderung der Fasern, sowohl in der verticalen, als in der horizontalen Richtung, in der Mitte der Länge der Querriegel statt. Setzt man einen rechteckigen Querschnitt voraus und nennt  $b$  die Breite und  $c$  die Höhe desselben, so hat man als die Gleichung, von welcher die Dimensionen des Querschnittes abhängen

$$\frac{R'}{E} = \frac{3pa^2}{Ebc^3} + \frac{p_1 a}{Ebc \cdot \tan \varphi} + \frac{b \tan \varphi}{2a} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{12p_1 a}{Eb^3 c \cdot \tan \varphi}}} - 1 \right\}.$$

§. 573. Nennt man  $l$  die Entfernung  $CM$  (Fig. 140), so

hat man  $a = \frac{l}{2\cos\varphi}$  und aus der vorhergehenden Gleichung wird

$$\frac{R}{E} = \frac{3p_1^2}{4Ebc^2 \cdot \cos^2\varphi} + \frac{p_1 l}{2Ebc \cdot \sin\varphi} + \frac{b \sin\varphi}{l} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{l}{2\cos\varphi} \sqrt{\frac{6p_1 l}{Eb^3 c \sin\varphi}}} - 1 \right\}.$$

### Gekrümmte Schleusenthore.

§. 574. Zuweilen giebt man den Thoren, welche den Druck des Wassers aufnehmen sollen, eine Krümmung in der horizontalen Richtung. Diese Krümmung ist schwach genug, um Alles, was in §. 554 u. folgd. über den Widerstand gegen die verticale Wirkung der Schwere gesagt wurde, auch bei einer solchen Anordnung der Thore anwenden zu können.

Fig. 142.



§. 575. Was den Druck des Wassers auf die gekrümmten Querriegel anlangt, so wollen wir annehmen, daß die Form  $MEM'$  (Fig. 142) dieser Stücke ein Kreisbogen sei.

Man nenne

- $p_1$  den Normaldruck des Wassers auf eine Einheit der Länge eines Querriegels;
- $l$  die Entfernung  $CM$ ;
- $a$  die Hälfte  $MD$  der Sehne  $MM'$ ;
- $d$  den Pfeil  $DE$  der Curve;
- $r$  den Halbmesser des Bogens  $MEM'$ ;
- $\varphi$  den Winkel  $CMM'$ .

Man hat dann nach §. 306 für den Druck in der Richtung der Curve, welcher sich wegen des Wasserdruckes ergibt,  $p_1 r$  oder

$$p_1 \frac{a^2 + d^2}{2d}.$$

Sieht man die Curve als einen Bogen an, der sich mit den beiden Enden  $M, M'$  gegen feste Punkte stützt und beachtet, daß der Winkel, den die Curve in diesen Punkten mit  $MM'$  bildet  $\frac{2ad}{a^2 + d^2}$  als Sinus, und  $\frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2}$  als Cosinus hat, so sieht man, daß der Druck der Curve gegen diese festen Punkte, die Kräfte

$$p_1 \frac{a^2 - d^2}{2d} \text{ und } p_1 a$$

resp. als die beiden Componenten hat, welche parallel und normal zu  $MM'$  gerichtet sind.

Andererseits findet nach §. 568, ungeachtet der Krümmung

der Querriegel, in  $M'$  ein Druck  $\frac{p_1 a}{\sin \varphi}$  derselben gegen einander statt, wodurch ein Druck  $\frac{p_1 a}{\tan \varphi}$  in der Richtung  $MM'$  hervorgebracht wird. Wenn daher die Relation besteht

$$\frac{p_1 a}{\tan \varphi} = p_1 \frac{a^2 - d^2}{2d},$$

woraus

$$d = a \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad r = \frac{a}{\sin \varphi},$$

folgt, so ist die Kraft, welche aus dem Wasserdrucke resultirt, gleich der Kraft, welche sich dadurch ergibt, daß die beiden Thorflügel sich gegen einander stützen, und die gekrümmten Querriegel haben keine Neigung, sich zu biegen, sondern werden nur in der Richtung ihrer Länge zusammengedrückt. Ist die Form des Thores so bestimmt, daß dieser Bedingung Genüge geschieht, so gehört die Curve der beiden Flügel zu einem Kreisbogen, welcher durch die drei Punkte  $M, M', M$  geht und der Druck in der Richtung der Länge der Curve ist  $\frac{p_1 a}{\sin \varphi}$ .

§. 576. Um daher die Stärke der Querriegel so abzumessen, daß sie der gleichzeitigen Wirkung der Schwere und des Wasserdruckes widerstehen können, muß man die größte Zusammendrückung der Fasern, welche durch die verticale Biegung verursacht wird (und die nach den §. 560 u. folgd. gegebenen Formeln zu berechnen ist) zu der Größe  $\frac{p_1 a}{E \omega \sin \varphi}$  hinzufügen und die Summe gleich  $\frac{R'}{E}$  setzen.

§. 577. In dem Falle z. B., welcher in den §§. 560 und 564 untersucht wurde, würde man anstatt der Gleichung des §. 572 hier haben

$$R' = \frac{3pa^2}{bc^2} + \frac{p_1 a}{bc \sin \varphi}.$$

§. 578. Setzt man  $\frac{l}{2 \cos \varphi}$  für  $a$  an die Stelle, so wird aus der vorhergehenden Gleichung

$$R' = \frac{3pl^2}{4bc^2 \cos^2 \varphi} + \frac{p_1 l}{2bc \sin \varphi \cdot \cos \varphi}.$$

Macht man von diesen Formeln Gebrauch, so wird man finden, daß bei großen Thoren es vortheilhaft ist, gekrümmte Querriegel anzuwenden.

# Zehntes Kapitel.

## Widerstand der hölzernen und eisernen Brücken.

§. 579. Die Bahn der hölzernen Brücken wird von mehreren Rippen oder Tragwänden getragen, die entweder aus einem Systeme von horizontalen und geneigten, geraden Stücken gebildet werden, oder aus einer Verbindung von gekrümmten Stücken bestehen, die einen Bogen bilden, dessen Conexität nach oben gekehrt. Diese Rippen unterstützen die Brückenbahn entweder von unten oder tragen sie von oben (Sprengwerke, Hängewerke). Bei der Ausführung solcher Constructionen sind besonders die drei folgenden Bedingungen zu berücksichtigen: 1) muß das Gleichgewicht ein stabiles sein; 2) müssen die einzelnen Stücke die nöthige Stärke besitzen, um sowohl das bleibende Gewicht der Construction, als die (zufälligen) Belastungen, welche außerdem über die ganze Fläche der Brückenbahn vertheilt werden könnten, tragen zu können; 3) müssen auch die zufälligen Belastungen getragen werden können, die auf bestimmte Punkte der Bahn gebracht werden könnten.

## Von den Brücken, welche von Balken und Streben getragen werden.

§. 580. Der einfachste Fall ist der, wo die Weite zwischen den Stützpunkten wenig beträchtlich ist und man daher für jede Rippe mit einem einzigen Balken ausreicht, von dem die Bahn getragen wird. Die Stärke dieses Balkens läßt sich nach den §§. 125 und 126, 359 u. folgd. berechnen.

§. 581. Ist die Entfernung der Stützpunkte zu groß, als daß ein einfacher Balken ausreicht, so versichert man diesen durch Streben (Fig. 143). Der Verticaldruck, den die Streben an

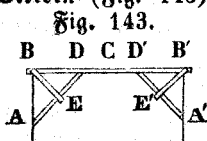


Fig. 143. ihren oberen Enden erleiden, sucht diese Stücke um ihre unteren Enden zu drehen und es muß in dem Theile  $DD'$  des Balkens nothwendig eine gewisse Pressung stattfinden, wenn diese Bewegung verhindert werden soll. Man kann sich die Drehung der

Streben auch durch die Wirkung einer Spannung in den Theilen  $BD, B'D'$  des Balkens verhindert denken, dann müssen aber die Enden  $B, B'$  dieses Stückes an den Brückenpfeilern befestigt sein. Da nun die Enden des Balkens meistens einfach auf den Pfeilern aufliegen, so ist es dem Gleichgewichtszustande dieser Constructionen angemessen, eine Zusammenbrückung des Theiles  $DD'$  anzunehmen.

Der Verband der Streben mit dem Balken in den Punkten  $D, D'$  vermindert die Tragkraft des Letzteren, und man darf demselben in diesen Punkten keinen eben so großen Widerstand vor-



aussehen, als er an allen andern Stellen leistet. Der größern Einfachheit wegen denke man sich die Theile des Balkens in  $D$  und  $D'$  gänzlich von einander getrennt. Nimmt man nun an, daß das Eigengewicht der Construction und die Belastungen über die Strecke  $BB'$  gleichförmig vertheilt seien, so widerstehen die Theile  $BD$ ,  $B'D'$  wie ein Stab, dessen Enden auf Stützen liegen. Die obern Enden  $D$ ,  $D'$  der Streben tragen die Hälfte von dem Gewichte, welches zu den Strecken  $CD$ ,  $CD'$  gehört. Nennt man  $p$  die Belastung des Balkens für jede Längeneinheit;  $a$ ,  $a'$  die Längen  $CD$ ,  $BD$ ;  $\alpha$  den Winkel  $BAD$ ,

so hat man  $p(a + \frac{1}{2}a')$  für den Verticaldruck in  $D$ ,  $\frac{p(a + \frac{1}{2}a')}{\cos \alpha}$  für die Pressung in der Richtung  $DA$  der Strebe, und  $p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  für die Pressung in dem Theile  $DD'$ . Die Streben  $AD$ ,  $A'D'$  können den Stäben gleichgestellt werden, welche in §. 383 u. folgd. betrachtet wurden, und ihre Stärke läßt sich nach dem in §. 402 u. folgd. Gesagten bestimmen.

§. 582. Das Stück  $DD'$  muß man als ein Prisma ansehen, das mit seinen Enden auf Stützen ruht, in der Richtung seiner Länge zusammengeedrückt wird und zugleich mit einem Gewichte  $p$  auf jeder Längeneinheit gleichförmig belastet ist. Die Hälfte  $CD$  dieses Stückes muß man daher dem Stabe  $AM$  (Fig. 141) gleichstellen, welcher horizontal festgehalten und auf die in §. 569 bezeichnete Weise in Anspruch genommen wird. Die in jenem Paragraphen angenommene Analyse kann daher hier Anwendung finden, so daß, wenn man  $p$  für  $p_1$  schreibt, die Gleichung der Curve ist

$$y = \frac{ep}{Q^2} \cdot \frac{1 - \cos x \sqrt{\frac{Q}{z}}}{\cos a \sqrt{\frac{Q}{z}}} - \frac{px^2}{2Q},$$

wo man für  $Q$  den Werth  $p'(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  der Pressung in der Are des Stückes zu setzen hat.

Als die Gleichung zur Bestimmung der Dimensionen dieses Stückes hat man, wie in §. 570,

$$\frac{R}{E} = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha}{E \omega} + \frac{v'}{(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{p(2a + a') \tan \alpha}{2z}}} - 1 \right\}.$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck, welches  $b$  zur Breite und  $c$  zur Höhe hat, so ist  $\omega = bc$ ,  $v' = \frac{c}{2}$ ,  $z = E \frac{bc^3}{12}$ , und die vorstehende Gleichung reducirt sich auf

$$R' = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha}{bc} + \frac{E \cdot c}{(2a + a') \tan \alpha} \left\{ \cos \alpha \sqrt{\frac{1}{6p(a + a') \tan \alpha}} - 1 \right\} \frac{1}{Ebc^3}$$

§. 583. Es läßt sich für  $R'$  ein angenäherter, aber zu kleiner Werth finden, wenn man die Krümmung des Theiles  $DD'$  (Fig. 143) als klein genug vorausgesetzt, um den Theil dieser Krümmung in Bezug auf die Länge des Stückes vernachlässigen zu können. Die Gleichgewichtsgleichung in §. 569 reducirt sich alsdann auf  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{2s}(a^2 - x^2)$  und der größte Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ist  $\frac{pa^2}{2s}$ . Die Gleichung zur Bestimmung der Dimensionen ist

$$\frac{R'}{E} = \frac{p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha}{E\omega} + \frac{v' \cdot pa^2}{2s};$$

und reducirt sich für den Fall eines rechteckigen Querschnittes auf

$$R' = \frac{p}{bc} \left\{ [a + \frac{1}{2}a'] \tan \alpha + \frac{3a^2}{c} \right\}.$$

Der Werth, welchen man aus dieser Gleichung für  $R'$  findet, wird in den gewöhnlichen Fällen der Praxis wenig von demjenigen verschieden sein, welchen die Gleichung in dem vorhergehenden Paragraphen giebt.

§. 584. Unabhängig von der über die Länge  $BB'$  (Fig. 143) gleichförmig vertheilten Belastung kann in einem bestimmten Punkte dieses Intervalles noch ein Gewicht  $\Pi$  angebracht sein. Befände sich dieses Gewicht zwischen den Punkten  $B$  und  $D$ , so würde es auf den Theil  $BD$  eine Wirkung ausüben, die sich leicht nach den Regeln berechnen ließe, die in den vorhergehenden Kapiteln gegeben sind. Es würde ferner einen Verticaldruck auf den Punkt  $D$  ausüben. Wäre das Gewicht  $\Pi$  z. B. in dem Punkte  $D$  selbst angebracht, so würde das obere Ende der Stäbe eine Last  $\pi + p(a + \frac{1}{2}a')$  zu tragen haben, wenn man, wie oben mit  $p$  das Gewicht bezeichnet, welches über jede Einheit der Länge in dem Intervalle  $BB'$  verbreitet ist. Die Pressung in der Ase der Stäbe wäre  $\frac{\pi + p(a + \frac{1}{2}a')}{\cos \alpha}$  und die Pressung in der Richtung  $DD'$  wäre  $[\pi + p(a + \frac{1}{2}a')] \tan \alpha$ . Die letzte Größe müßte für  $Q$  in die Gleichung des §. 582 gesetzt werden, welche zur Bestimmung der Stärke des Stückes  $DD'$  dient. Zu beachten ist außerdem, daß der Punkt  $D'$  nur den Verticaldruck  $p(a + \frac{1}{2}a')$  erleidet und die Pressung in der Richtung  $DD'$  also nur  $p(a + \frac{1}{2}a') \tan \alpha$  beträgt. Der Theil  $\Pi \tan \alpha$  der Pressung in der Richtung  $DD'$  wird also in dem Punkte  $D$  nicht vernichtet und folglich auf das Stück  $BD$  übertragen: so daß dieses Stück, dessen Enden unterstützt sind, die Pressung  $\Pi \tan \alpha$  in der Ase und das Gewicht  $p$  auf jeder

Längeneinheit zu tragen hat. Man hat darauf die Formeln des §. 582 anzuwenden und  $Q = \Pi \tan \alpha$  zu setzen.

§. 585. Befindet sich das Gewicht  $\Pi$  in dem Intervall  $DD'$ , so vertheilt sich der daher rührende Verticaldruck auf die beiden Punkte  $D, D'$ . Ist dieses Gewicht z. B. in der Mitte  $C$  des Balkens befindlich, so erleiden die Enden jeder Stäbe einen Verticaldruck  $\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')$ . Die Pressung in der Ase der beiden Stäben ist  $\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')$  und die Pressung in der Ase des Stückes  $DD'$  ist  $[\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')] \cos \alpha$ . Jede Hälfte  $CD$  dieses letzten Stückes ist also auch hier noch in demselben Gleichgewichtszustande, wie der Stab  $AM$  (Fig. 141), welche in §. 569 betrachtet wurde, und die Gleichgewichtsgleichung ist ebenfalls

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a - x) + Q(f - y),$$

wo man  $P = \frac{1}{2} \Pi + pa$ , und  $Q = [\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')] \tan \alpha$  hat. Das Integral dieser Gleichung ist, wenn man  $q^2$  für  $\frac{Q}{2}$  setzt,

$$f - y = A \sin q(x + B) + \frac{p}{Q} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} - \frac{P}{Q}(a - x) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Für den Punkt  $A$  muß  $x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ , und für den Punkt  $B$  muß  $x = a, y = f$  sein; daher hat man die drei Bedingungen

$$f = A \sin qB + \frac{pa^2}{2Q} - \frac{Pa}{Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = A \cos qB - \frac{pa}{Q} + \frac{P}{Q},$$

$$0 = A \sin q(a + B) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

woraus folgt

$$A \sin qB = \frac{p}{Q q \cos qa} + \frac{P - pa}{Qq} \tan qa,$$

$$A \cos qB = -\frac{P - pa}{Qq},$$

$$f = \frac{pa^2}{2Q} - \frac{Pa}{Q} + \frac{p}{Qq} \left\{ \frac{1}{\cos qa} - 1 \right\} + \frac{P - pa}{Qq} \tan qa;$$

und durch Substitution in die vorhergehende Gleichung,

$$y = \frac{P - pa}{Qq} \sin qx + \left\{ \frac{p}{Qq \cos qa} + \frac{P - pa}{Qq} \tan qa \right\} (1 - \cos qx) - \frac{Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2)}{Q},$$

wo man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe zu setzen hat.

§. 586. Der Ausdruck  $\frac{d^2y}{dx^2}$  wird im Maximum für  $x=0$ , sodas das betrachtete Stück in der Mitte zu brechen sucht; der Maximalwerth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ist

$$-\frac{p}{Q \cos a \sqrt{\frac{Q}{q}}} + \frac{P - pa}{V Q \varepsilon} \tan a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}} - \frac{P}{Q}.$$

Will man daher nach dem in §. 387 Gesagten die Dimensionen des Stückes so wählen, daß die größte Pressung, welche die Fasern auf jeder Einheit der Querschnittsfläche erleiden, die Grenze  $R$  nicht überschreitet, so setze man die Gleichung

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' \cdot p}{Q} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}}} - 1 \right\} + \frac{v' \cdot \Pi}{2 V Q \varepsilon} \tan a \sqrt{\frac{Q}{\varepsilon}},$$

wo für  $Q$  der Werth  $[\frac{1}{2} \Pi + p(a + \frac{1}{2} a')] \tan a$  zu substituiren ist.

Ist der Querschnitt des Stückes ein Rechteck, dessen Breite  $b$ , und dessen Höhe  $c$  genannt wird, so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf,

$$R' = \frac{Q}{bc} + \frac{Epc}{2Q} \left\{ \frac{1}{\cos a \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} - 1 \right\} + \frac{3\Pi}{b c^2 \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}} \tan a \sqrt{\frac{12Q}{Ebc^3}}.$$

§. 587. Man kann hier, wie in §. 583, einen angenäherten Werth für  $R$  erhalten, wenn man in der Gleichgewichtsgleichung das Glied  $Q(f - y)$  vernachlässigt. Der Maximalwerth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ist alsdann  $-\frac{pa^2}{2\varepsilon} + \frac{Pa}{\varepsilon}$ , und daher

$$\frac{R'}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v'(Pa - \frac{1}{2}pa^2)}{\varepsilon};$$

oder wenn man für  $P$  und  $Q$  ihre Werthe setzt,

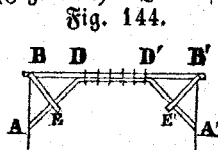
$$\frac{R'}{E} = \frac{[\Pi + p(2a + a')] \tan a}{2E\omega} + \frac{v'(\Pi a + pa^2)}{2\varepsilon};$$

für den Fall eines rechteckigen Querschnittes wird aus dieser Gleichung

$$R' = \frac{[\Pi + p(2a + a')] \operatorname{tanga}}{2bc} + \frac{3(\Pi + pa)a}{bc^2}.$$

§. 588. Die in Fig. 143 dargestellte Construction besitzt kein stabiles Gleichgewicht, wenn man annimmt, daß die Streben in den Verbindungsstellen um ihre Enden frei drehbar und der Balken mit den Enden  $B, B'$  frei auf Stützen liegt. Man muß daher einer Formänderung zuvorkommen und wendet zu diesem Zwecke die Zangen  $BE, B'E$  an. Diese Zangen können auch zur Verstärkung der Streben dienen, indem sie die Biegung derselben in der Richtung der Ebene, in welcher die Tragrippe liegt, erschweren.

§. 589. Ist die Entfernung der Stützpunkte zu groß, als daß der Balken aus einem einzigen Stücke bestehen könnte, so verbindet man die Enden der Streben mit einem Spannriegel  $DD'$  (Fig. 144). In diesem Falle wird der Spannriegel mit den be-



nachbarten Theilen des Balkens gewöhnlich so verbunden, daß beide sich gegenseitig verstärken. Denkt man sich die Theile des Balkens wieder in den Punkten  $D, D'$  ohne Verbindung mit einander, so läßt sich Alles, was in den letzten Paragraphen gesagt

wurde, auch auf diese Construction anwenden. Man beachte nur 1) daß bei der Berechnung der Verticalpressungen auf die Punkte  $D, D'$  das Gewicht des Spannriegels berücksichtigt werden muß; 2) daß der Arcendruck in dem Intervalle wenig auf den Balken übertragen werden kann und daher gänzlich von dem Spannriegel aufgenommen werden muß. Es folgt hieraus, daß bei der Anwendung der Gleichungen der §§. 582 und 583, 586 und 587 in dem ersten Gliede der rechten Seite für  $\omega$  nur der Inhalt der Querschnittsfläche des Spannriegels gesetzt werden darf, während man in den übrigen Gliedern das Biegemoment  $\varepsilon$ , nach Anleitung des §. 508 u. folgd., unter der Voraussetzung berechnen kann, daß der Spannriegel und der Balken der Biegung gemeinschaftlich widerstehen.

§. 590. Ist die Entfernung zwischen den Stützpunkten beträchtlich, so kann man eine Construction, die der vorhergehenden analog ist, anwenden, indem man mehrere Reihen von Spannriegeln und Streben anbringt (Fig. 145). Der größern Einfachheit wegen sehen wir die Theile des Balkens und der Spannriegel immer als



in den Punkten  $D, D_1, D_2$  von einander getrennt an. Ohne Schwierigkeit lassen sich dann die Verticalpressungen auf die oberen Enden der einzelnen Streben, die sich dadurch ergebenden

Pressungen in der Ase dieser Stücke, und die sich ebenfalls dadurch ergebenden Pressungen in der Ase der Spannriegel berechnen. Der Widerstand jedes einzelnen Stückes der Construction ist nach Anleitung der vorhergehenden Paragraphen zu bestimmen.

Die Streben können sehr lange Hölzer oder mehrere mit den Hirnenden zusammenstoßende Stücke erfordern. In diesem Falle muß die Biegung verhindert werden, nicht allein durch Zangen in der Ebene der Rippen, sondern auch durch horizontale und geneigte Stücke, durch welche die Rippen mit einander verbunden werden. Die Anwendung der Zangen wird außerdem schon durch die fehlende Stabilität des Gleichgewichtes nothwendig.

§. 591. Wollte man annehmen, daß die Streben durch die Wirkung eines Zuges gehalten würden (siehe §. 581), der an ihren oberen Enden nach den Pfeilern der Brücke hin stattfindet, so könnte man eine Verbindung von Streben und horizontalen Stücken (welche hier Sattelhölzer genannt werden), auf die in Fig. 146 angegebene Weise anordnen. Zur Solidität des Systems

Fig. 146.  
BD, D<sub>1</sub> D C D'

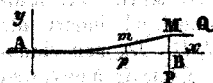


ist es nothwendig, daß sowohl diese Sattelhölzer unter sich durch eiserne Schienen verbunden, als auch ihre Enden an den Pfeilern der Brücke befestigt werden. Da eine sichere Befestigung dieser Enden an dem obern Theile eines Landpfeilers schwierig ist, so eignet sich diese Construction besonders für Brücken mit mehreren Oeffnungen, weil die zwei Hälften der beiden Rippen, welche einem Pfeiler zunächst liegen, sich gegenseitig das Gleichgewicht halten können.

§. 592. Nimmt man wieder an, daß in den Punkten  $D, D_1, D_2, \dots$  die Theile des Balkens und der Sattelhölzer ohne Zusammenhang sind, so ist wie vorhin die Pressung in der Ase der einzelnen Streben und die Spannung der Sattelhölzer leicht zu berechnen. Um die Stärke dieser letztern Stücke bestimmen zu können, muß man die Gleichgewichtsbedingungen eines Stabes kennen, der mit seinen Enden auf Stützen ruhet, mit über seine Länge vertheilten Gewichten belastet ist und einer Spannung in der Richtung seiner Länge zu widerstehen hat.

Jede Hälfte eines solchen Stabes kann dem Stabe  $AM$  (Fig. 147) gleichgestellt werden, welcher in  $A$  horizontal befestigt und mit über seine Länge vertheilten Gewichten belastet ist, während er in  $M$  von der Verticalkraft  $P$ , welche von unten nach oben wirkt, und von der Horizontalkraft  $Q$ , welche eine Spannung in der Richtung  $AB$  hervorbringt, in Anspruch genommen wird. Nennt man

Fig. 147.



$p$  das von jeder Einheit der Länge getragene Gewicht;  
 $x, y$  die horizontalen und verticalen Coordinaten  $Ap, pm$  der Curve  $AM$ ;

$a$  die Entfernung  $AB$ ;

$f$  die Ordinate  $BM$  des Endpunktes, während

$\varepsilon$  die in §. 80 angegebene Bedeutung behält;

so ist die Gleichgewichtsgleichung

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + F(a-x) - Q(f-y),$$

oder, da hier  $P=pa$  ist

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{2\varepsilon} (a^2 - x^2) - q^2(f-y) - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

wenn man zur Abkürzung  $q^2$  für  $\frac{Q}{\varepsilon}$  schreibt.

Das Integral dieser Gleichung ist

$$f-y = Ae^{qx} + Be^{-qx} + \frac{p}{2Q} (a^2 - x^2)$$

wo  $A$  und  $B$  zwei willkürliche Constanten bezeichnen und  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Für den Punkt  $A$  muß

$x=0$ ,  $y=0$ ,  $\frac{dy}{dx}=0$ , und für den Punkt  $B$  muß  $x=a$ ,  $y=f$  sein; daher hat man die drei Bedingungen

$$f = A + B + \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = A - B,$$

$$0 = Ae^{qa} + Be^{-qa} - \frac{\varepsilon p}{Q^2}.$$

woraus folgt

$$A = B = \frac{\varepsilon p}{Q^2 (e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\};$$

und als die Gleichung der Curve,

$$y = \frac{px^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \frac{e^{qx} + e^{-qx} - 2}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$

§. 593. Der Ausdruck  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  hat seinen größten Werth in

dem Punkte  $A$  und ist hier  $\frac{p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\}$ . Zur Bestimmung

der Dimensionen des Querschnittes hat man daher, wie in §. 407, die Gleichung

$$\frac{R}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v' \cdot p}{Q} \left\{ 1 + \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\},$$

worin für  $Q$  der Werth der Spannung in der Ase des Stückes gesetzt werden muß.

§. 594. Wollte man in der Voraussetzung, daß die Krümmung des Stückes sehr gering ausfallen werde, das Glied  $Q(f-y)$  in der Differentialgleichung vernachlässigen, so würde das Resultat mit dem in §. 583 erhaltenen übereinstimmen.

§. 595. Um nun den Fall zu untersuchen, wo in der Mitte des Stückes ein Gewicht  $\Pi$  angebracht ist, lasse man der Differentialgleichung ihre allgemeine Form

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = -p \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + P(a-x) = Q(f-y),$$

das Integral ist dann

$$f-y = Ae^{q(a-x)} + Be^{-q(a-x)} - \frac{p}{Q} \left\{ \frac{a^2}{2} - ax + \frac{x^2}{2} \right\} + \frac{P}{Q}(a-x) - \frac{\varepsilon p}{Q^2}.$$

Aus den Bedingungen für die Endpunkte folgt

$$f = Ae^{qa} + Be^{-qa} - \frac{pa^2}{2Q} + \frac{Pa}{Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2},$$

$$0 = Aqe^{qa} - Bq^{-qa} - \frac{pa}{Q} + \frac{P}{Q},$$

$$0 = A + B - \frac{\varepsilon p}{Q^2};$$

woraus sich ergibt

$$A = \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}} - \frac{P-pa}{qQ(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$B = \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{e^{qa}}{e^{qa} + e^{-qa}} + \frac{P-pa}{qQ(e^{qa} + e^{-qa})},$$

$$f = \frac{Pa}{Q} - \frac{pa^2}{2Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} - \frac{P-pa}{qQ} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}},$$

und durch Substitution in die vorhergehende Gleichung,

$$y = \frac{Px - p(ax - \frac{1}{2}x^2)}{Q} - \frac{\varepsilon p}{Q^2} \cdot \frac{e^{qx} + e^{-qx} - 2}{e^{qa} + e^{-qa}} - \frac{P-pa}{Q} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa} - e^{q(a-x)} + e^{-q(a-x)}}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$



§. 596. Der größte Werth von  $\frac{dy}{dx^2}$  findet für  $x=0$  statt und ist

$$\frac{p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} + \frac{P - pa}{qQ} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}}.$$

Man hat also wie vorhin zur Bestimmung der Dimensionen des Querschnittes die Gleichung

$$\frac{K}{E} = \frac{Q}{E\omega} + \frac{v \cdot p}{Q} \left\{ 1 - \frac{2}{e^{qa} + e^{-qa}} \right\} + \frac{v(P - pa)}{qQ} \cdot \frac{e^{qa} - e^{-qa}}{e^{qa} + e^{-qa}},$$

worin für  $P$  und  $Q$  ihre Werthe gesetzt werden müssen, wie dies in den §§. 584 und 585 angegeben ist.

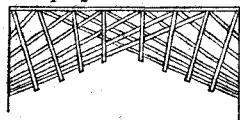
§. 597. Die Gleichung des §. 587 läßt sich auf den in Rede stehenden Fall anwenden, wenn man die Krümmung des Stückes als sehr gering voraussetzt.

§. 598. Bei den letzten Constructionen, welche hier betrachtet wurden, ist das Gleichgewicht stabil, da die Sattelhölzer an unverrückbaren Punkten befestigt sind, und die Zangen, durch welche die einzelnen Streben mit einander verbunden werden, dienen daher nur dazu, die Biegung dieser Stücke zu verhüten.

§. 599. In Fig. 148 ist eine andere Anordnung der Streben dargestellt, bei welcher die Straßbalken keinen Zug in der

Fig. 148.

B D<sub>1</sub> D<sub>2</sub> D D'



Richtung ihrer Länge erleiden. Nimmt man wieder an, daß in den Punkten  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2 \dots$  die Theile dieser Balken ohne Verbindung mit einander seien, so widersteht jeder dieser Theile  $DD'$ ,  $DD_1$ ,  $DD_2 \dots$  der Belastung, welche sich auf dem dazu gehörenden Intervalle der Brückenbahn

befindet, wie ein Stab, der mit seinen Enden auf Stützen ruhet. Die Verticaldrücke auf die Punkte  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2 \dots$  zerlegen sich nach den Richtungen der beiden Streben, welche von diesen Punkten ausgehen und erzeugen eine Pressung in der Arc dieser Stücke.

Diese letzte Construction wird zu keiner Formänderung angeregt, wie auch die Belastung vertheilt sein mag, und sie ist daher durch sich selbst in einem stabilen Gleichgewichte. In der Regel wird aber die Anwendung der in der Figur angedeuteten Zangen nothwendig sein, um die Biegung der Streben zu verhüten und das Gewicht dieser Stücke so zu tragen, als wäre es in den Punkten  $D$ ,  $D_1$ ,  $D_2 \dots$  aufgehängt.

## Wirkung der von Balken und Streben getragenen Brücken auf die Pfeiler oder Widerlager.

§. 600. Wird die Bahn einer Brücke nur von einfachen Balken getragen, wie dies in §. 580 angenommen wurde, so üben die Enden dieser Stücke nur einen Verticaldruck auf ihre Stützpunkte aus, der sich nach den Gesetzen über das Gleichgewicht beim Hebel leicht berechnen läßt.

§. 601. In dem Falle, welcher in §. 581 untersucht wurde, erleiden die Stützpunkte  $A$  und  $A'$  (Fig. 149) jeder einen Vertical-

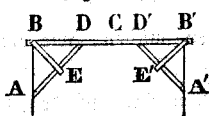


Fig. 149.

druck, welcher gleich dem Drucke auf die oberen Enden  $D, D'$  der Streben, und einem Horizontalschub, welcher gleich der Pressung in der Axt des Stückes  $DD'$  ist. Die Punkte  $B, B'$  erleiden den Verticaldruck, welcher von den über  $BD, B'D'$  vertheilten Gewichten herrührt.

Sind mehrere Streben vorhanden, so übt das untere Ende jeder Strebe stets eine ähnliche Vertical- und Horizontalpressung gegen die Widerlager aus. Die Summe der Horizontalschübe gegen jedes Widerlager ist gleich der Summe der Pressungen in der Axt der Stücke, welche in dem Intervalle  $DD'$  liegen (Fig. 150).

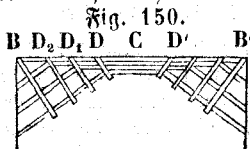


Fig. 150.

Die Horizontalschübe suchen die Landpfeiler fortzudrängen; die Verticaldrücke suchen sie auf ihrem Fundamente festzuhalten. Das Kraftmoment, von welchem die Pfeiler umgekantet werden könnten, wird daher durch die Differenz der Momente des Vertical-

druckes und des Horizontalschubes gemessen, wo beide Momente auf die Axt bezogen werden müssen, um welche eine Drehung der Pfeiler erfolgen könnte.

§. 602. Bei der Construction (Fig. 151), welche in §. 591 untersucht wurde, üben die untern Enden der Streben dieselben

Fig. 151.

$D, D, D, BC, D'$



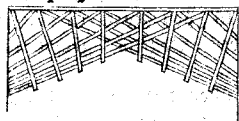
oben besprochenen Vertical- und Horizontalpressungen auf die Pfeiler aus. Die oberen Theile dieser Pfeiler, an denen die Sattelhölzer befestigt werden müssen, werden aber auch noch durch den Zug, welcher in der Axt dieser Stücke stattfindet, in Anspruch genommen.

Die Summe der Spannungen in der Axt der Zugbänder ist gleich der Summe der Horizontalpressungen, welche die unteren Enden der Streben ausüben, und da die ersteren Kräfte zum Umwerfen der Pfeilermasse an einem längeren Hebelarm wirken, als die letzteren, so werden die Pfeiler zu einem Umkanten nach innen angeregt.

§. 603. Bei der in §. 599 betrachteten Construction (Fig. 152) drückt das untere Ende jeder Strebe gegen die Widerlager

Fig. 152.

B D<sub>1</sub> D<sub>2</sub> D D'



mit einer Vertical- und einer Horizontalkraft, die resp. gleich der verticalen und der horizontalen Componenten der Pressung in der Arc der Strebe ist. Die Summe der Verticalpressungen durch die Streben DA, DA', die von demselben Punkte A ausgehen, ist gleich dem in D

stattfindenden Verticaldrucke, und die Horizontalpressungen, welche diese beiden Streben ausüben, sind unter sich gleich.

§. 604. Bei einer solchen Construction, wie in §. 590 betrachtet wurde, läßt sich jeder Horizontalschub gegen die Stützpunkte dadurch verhindern, daß man einen Durchzug anbringt, dessen Spannung dem Schube der Streben widerstehen können muß

Fig. 153.

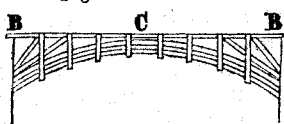


(Fig. 153). In diesem Falle trägt der Durchzug gewöhnlich die Brückenbahn, während er selbst an den Spannriegeln und den Streben aufgehängt ist <sup>1)</sup>.

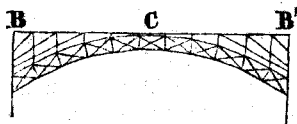
### Von den Brücken, welche von Bögen getragen werden.

§. 605. Wir betrachten die Bögen, welche den Haupttheil der Rippen bei den Brücken dieser Art (Fig. 154 u. 155) abge-

Fig. 154. 155.



ben, zunächst als homogene Körper, B' auf welche sich die in dem sechsten Kapitel gefundenen Resultate anwenden lassen.



Wäre das Gewicht der Construction und die Belastung der Brückenbahn gleichförmig über den Raum BB' vertheilt, so würde man nach §. 442 dem krummen Theile der Rippen die Form eines Parabelbogens geben müssen, wenn derselbe keine Neigung zu einer Biegung besitzen sollte. In der

Wirklichkeit ist aber die Belastung an den Enden etwas größer, als in der Mitte, und man giebt dem in Rede stehenden Stücke gewöhnlich die Form eines Kreisbogens. Wegen der Dicke dieses Stückes und der geringen Weite seiner Krümmung kann

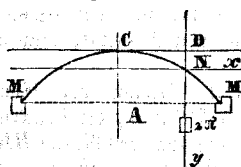
1) Nach diesem Principe waren die Brücken zu Schaffhausen (über den Rhein) und Bettingen (über die Aimmat) ausgeführt. (Die erstere Brücke hatte zwei Oeffnungen von 165 $\frac{1}{2}$  und 187 $\frac{1}{2}$  rhein. Fuß. Die letztere hatte eine Oeffnung von 370 rhein. Fuß, die größte, welche es bis jetzt bei hölzernen Brücken gegeben hat. Beide Brücken wurden 1799 von den Franzosen verbrannt).

man es aber doch ansehen, als würde es, ohne durch das Gewicht der Construction und die Belastung der Brückenbahn zu einer Biegung angeregt zu werden, nur in der Richtung seiner Axe mit einer Kraft zusammengeedrückt, deren Werth nach den §§. 440 und 441 zu berechnen ist. Der Werth für  $Q$  in den Formeln dieser Paragraphen giebt den Horizontalschub des Bogens gegen die Stützpunkte.

§. 606. Wäre, unabhängig von der über das Intervall  $BB'$  gleichförmig vertheilten Belastung, ein Gewicht in dem Scheitel der Curve angebracht, so würde der Bogen nicht mehr im Gleichgewichte sein. Nach den §§. 466 und 467 berechnet man die Vermehrung des Horizontalschubes gegen die Stützpunkte und der Pressung in der Richtung der Länge bei den verschiedenen Theilen des Bogens, welche durch dieses Gewicht bewirkt wird. Nach §. 480 kann dann die Wirkung dieses Gewichtes, insofern es den Bogen zu biegen sucht, und der größte Druck, den die Theile des Bogens zu erleiden haben, gefunden werden.

§. 607. Die Mitte  $C$  des Intervalles  $BB'$  ist nicht derjenige Ort, in welchem ein Gewicht die größte Wirkung in einer Biegung des Bogens hervorbringt. Es müssen daher die Gleichgewichtsbedingungen für den Fall gesucht werden, daß das Gewicht als in einem beliebigen Punkte dieses Intervalles befindlich gedacht wird.

Betrachten wir den Bogen  $MCM'$  (Fig. 156), welcher aus zwei symmetrischen Theilen besteht, die durch die Verticalare  $AC$  geschieden sind, und dessen Enden  $M, M'$ , die sich auf derselben Horizontalen befinden, von Stützen getragen werden, die ihnen nicht erlauben, sich von einander zu entfernen. Wird nun in einem beliebigen Punkte das Gewicht  $2\Pi$  aufgehängt, so wird dieses Gewicht den Bogen verbiegen, den Punkt  $N$  aus seiner Stelle drängen



und gegen die Stützpunkte gewisse Vertical- und Horizontalpressungen ausüben. Jeder der Theile  $NM, NM'$  des Bogens befindet sich in demselben Gleichgewichtszustande, als ob der Bogen in  $N$  von einem festen Punkte gestützt und in den Endpunkten von den Pressungen sollicitirt würde, welche die Stützpunkte erleiden. Die Verschiebungen der Endpunkte, welche in diesem letzteren Falle eintreten würden, entsprechen den Verschiebungen des Punktes  $N$ , welche in dem ersten Falle stattfinden. Durch Anwendung der Formeln des §. 448 lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen für jeden der beiden Theile des Bogens finden; man beachte nur, daß hier der Bogen in dem Punkte  $N$  nur als gestützt angesehen werden darf, weshalb die Richtung der Tangente der Curve für diesen Punkt nicht zum Voraus bestimmt ist, wie dies bei einem

Bogen stattfindet, dessen oberes Ende eingemauert ist. Man nenne

$a, b$  die Entfernungen  $AM, AC$ ;

$\alpha$  die horizontale Entfernung des Punktes  $N$  von dem Scheitel der Curve;

$x, y$  die horizontalen und verticalen Coordinaten der Punkte der Curve, wenn  $N$  als Ursprung des Coordinatensystemes angesehen wird.

Sieht man die Curve als einen Parabelbogen an, so hat man für ihre Gleichung, wenn der Ursprung des Coordinatensystemes in  $C$  ist,  $y = \frac{bx^2}{a^2}$ . Da hier der Ursprung in  $N$  liegen

soß, so hat man für den Theil  $NM$  die Gleichung  $y = \frac{b}{a^2} (2\alpha x + x^2)$ ,

woraus  $\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a^2} (\alpha + x)$ . Substituirt man diese Werthe in die

Formeln des §. 448, wo  $\frac{b}{a^2} (a^2 - \alpha^2)$  für  $b$  an die Stelle gesetzt

werden muß, und vernachlässigt die höhern Potenzen von  $\frac{dy}{dx}$ , so erhält man für den Theil  $NM$  der Curve

$$dx' - dx = -\frac{1}{\varepsilon} dx \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left\{ [a - \alpha] \alpha x + \left[ a - \frac{3}{2} \alpha \right] x^2 - \frac{x^3}{2} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{Qb}{a^2} \left\{ [a^2 - \alpha^2] \alpha x - \alpha^2 x^2 + [a^2 - \alpha^2] x^2 - \frac{4\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{3} \right\} \right\},$$

$$dy' - dy = \frac{1}{\varepsilon} dx \left\{ P \left\{ [a - \alpha] x - \frac{x^2}{2} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{Qb}{a^2} \left\{ [a^2 - \alpha^2] x - \alpha x^2 - \frac{x^3}{3} \right\} + m \right\},$$

wo  $m$  eine durch die Integration hinzugekommene Constante ist, deren Werth von der Neigung abhängt, welche die Curve an der Stütze  $N$  besitzt. Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man

$$x' - x = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left\{ [a - \alpha] \frac{\alpha x^2}{2} + \left[ a - \frac{3}{2} \alpha \right] \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{Qb}{a^3} \left\{ [a^2 - \alpha^2] \frac{\alpha x^2}{2} + [a^2 - 2\alpha^2] \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^4}{3} - \frac{x^5}{15} \right\} \right\};$$

$$y' - y = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left\{ [a - \alpha] \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + \frac{Qb}{a^2} \left\{ [a^2 - \alpha^2] \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right\} + mx \right\};$$

und, wenn man  $x = a - \alpha$  setzt, um die Verschiebungen  $h$  und  $f$  des Punktes  $M$  zu erfahren,

$$-h = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P \left[ \frac{5a^4}{24} - \frac{a^3\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{2} + \frac{a\alpha^3}{4} - \frac{\alpha^4}{8} \right] + \frac{Qb}{a} \left[ \frac{4a^3}{15} - \frac{a^2\alpha}{2} + \frac{a\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{10} \right] \right\},$$

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P \left[ \frac{a^3}{3} - a^2\alpha + a\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right] + \frac{Qb}{a^2} \left[ \frac{5a^4}{12} - a^3\alpha + \frac{a^2\alpha^2}{2} + \frac{a\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} \right] - m \left[ a - \alpha \right] \right\}.$$

Diese selben Formeln werden für den Theil  $NM$  der Curve gelten, wenn man die Zeichen von  $\alpha$  und  $m$  in die entgegengesetzten verwandelt. Bezeichnet man daher mit  $P_1, Q_1$  die Kräfte, welche in dem Punkte  $M'$  thätig sind, und mit  $h_1, f_1$  die Verschiebungen dieses Punktes, so hat man

$$-h_1 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2b}{a^2} \left\{ P_1 \left[ \frac{5a^4}{24} + \frac{a^3\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{4} - \frac{a\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^4}{8} \right] + \frac{Q_1b}{a^2} \left[ \frac{4a^3}{15} + \frac{a^2\alpha}{2} - \frac{a\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^3}{10} \right] \right\},$$

$$f_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left\{ P_1 \left[ \frac{a^3}{3} + a^2\alpha + a\alpha^2 + \frac{\alpha^3}{3} \right] + \frac{Q_1b}{a^2} \left[ \frac{5a^4}{12} + a^3\alpha + \frac{a^2\alpha^2}{2} - \frac{a\alpha^3}{3} - \frac{\alpha^4}{4} \right] - m \left[ a + \alpha \right] \right\}.$$

§. 608. In dem vorliegenden Falle hat man  $P = -\Pi \frac{a+\alpha}{a}$ ;  $P_1 = -\Pi \frac{a-\alpha}{a}$ ;  $Q = Q_1$ ; und es muß  $h = -h_1, f = f_1$  sein. Aus den Gleichungen, welche diese Bedingungen ausdrücken, ergeben sich die folgenden

$$m = -\frac{\Pi}{a} \left\{ \frac{2a^2\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{3} \right\} + \frac{Qb}{a^2} \left\{ a^2\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right\},$$

$$Q = \frac{5\Pi}{32} \cdot \frac{5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4}{a^3b},$$

$$h = -h_1 = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(19a^8 - 60a^6\alpha^2 + 66a^4\alpha^4 - 28a^2\alpha^6 + 3\alpha^8)b\alpha}{96a^7},$$

$$-f = -f_1 = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{5a^8 + 104a^6\alpha^2 - 102a^4\alpha^4 - 5\alpha^8}{384a^5},$$

welche Formeln den Horizontalschub gegen die Stützen und die Verschiebung des Punktes  $N$ , in welchem das Gewicht  $2\Pi$  aufhängt, angeben.

§. 609. Was die Wirkung dieses Gewichtes, insofern es den Bogen zusammendrückt und dadurch verbiegt, anlangt, so

beachte man zunächst, wie in §. 475, daß der Werth des Druckes  $T$ , wenn der Bogen, während er in  $N$  mit dem Gewichte  $2\Pi$  belastet ist, zugleich das Gewicht  $p$  auf Längeneinheit des Intervalles  $MM'$  trägt, durch die Verbindung der in §. 441 und in §. 449 gegebenen Ausdrücke gefunden wird, indem man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe setzt. Man hat demnach für den Theil  $NM$  des Bogens, bei steter Vernachlässigung des Quadrates von  $\frac{b}{a}$ ,

$$T = \frac{pa^2}{2b} + \Pi \frac{2b(a+\alpha)(\alpha+x)}{a^3} + \frac{5\Pi}{32} \cdot \frac{5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4}{a^3b},$$

Man beachte sodann, daß

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'}{\varepsilon} \left\{ P[a - \alpha - x] + \frac{Qb}{a^2} [a^2 - \alpha^2 - 2\alpha x - x^2] \right\},$$

wo für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe zu setzen sind. Mit Hülfe der beiden vorstehenden Ausdrücke lassen sich, in Uebereinstimmung mit §. 475, die Dimensionen des Bogens bestimmen. Diese Gleichungen werden für den Theil  $NM'$  des Bogens gelten, wenn man das Zeichen von  $\alpha$  in das entgegengesetzte verwandelt.

§. 610. Setzt man in dem vorhergehenden Ausdrucke  $x=0$ , so erfährt man das Resultat der Biegung in dem Aufhängepunkte des Gewichtes  $2\Pi$ ; man erhält alsdann

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = \frac{v'}{\varepsilon} \left\{ P[a - \alpha] + \frac{Qb}{a^2} [a^2 - \alpha^2] \right\},$$

oder, wenn man für  $P$  und  $Q$  ihre obigen Werthe substituirt

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = - \frac{v' \Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(a^2 - \alpha^2)(7a^4 + 30a^2\alpha^2 - 5\alpha^4)}{32a^5}.$$

Nimmt man  $\alpha=0$ , oder das Gewicht  $2\Pi$  als im Scheitel  $C$  des Bogens aufgehängt an, so stimmt diese Formel mit der in §. 476 gegebenen überein. Der Punkt  $C$  ist aber nicht der Ort, in welchem das Gewicht  $2\Pi$  aufgehängt sein müßte, um die größte mögliche Biegung zu veranlassen; denn das Maximum des vorste-

henden Ausdruckes entspricht dem Werthe  $\alpha = a \sqrt{\frac{7}{3}} - \sqrt{\frac{176}{45}}$ ,

oder  $\alpha = 0,3556a$ . Demnach bringt das Gewicht  $2\Pi$  die größte mögliche Biegung in seinem Aufhängepunkte  $N$  hervor, wenn die Entfernung  $CD$  etwas größer ist, als ein Drittel der Entfernung  $AM$ . Der dieser Biegung entsprechende Werth der größten Zusammenrückung oder Ausdehnung der Fasern in dem Aufhängepunkte  $N$  ist, sehr nahe

$$v' \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds} = - \frac{v' \Pi}{\varepsilon} \cdot 0,382a.$$

§. 611. Man beachte, daß der Ausdruck für  $v \frac{d\varphi' - d\varphi}{ds}$  in §. 609 ein positives Maximum hat, für  $x = -\alpha - \frac{Pa^2}{2Qb}$ . Substituiert man diesen Werth von  $x$  in den in Rede stehenden Ausdruck, so erhält man

$$\frac{v'}{\varepsilon} \cdot \frac{(Pa + 2Qb)^2}{4Qb},$$

als den Maximalwerth. Setzt man hierin für  $P$  und  $Q$  ihre in §. 608 gegebenen Werthe, so kommt

$$\frac{v' \Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(9a^4 - 16a^2\alpha - 30a^2\alpha^2 + 5a^4)^2}{160a^3(5a^4 - 6a^2\alpha^2 + \alpha^4)}$$

Diese Formel reducirt sich auf  $\frac{v' \Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{81a}{800}$ , wenn  $\alpha = 0$ , d. h. wenn das Gewicht  $2\Pi$  im Scheitel des Bogens befindlich ist. Der Werth des Ausdruckes nimmt zu, wenn man für  $\alpha$ , von Null ausgehend, wachsende negative Werthe annimmt, und der Maximalwerth findet für einen Punkt statt, dessen Entfernung vom Scheitel etwas weniger als  $\frac{2}{5}$  des Intervalles  $AM$  beträgt, und ist hier sehr nahe  $\frac{v' \Pi}{\varepsilon} \cdot 0,177a$ . Da dieser Werth geringer ist, als der in dem vorhergehenden Paragraphen gefundene, so schließt man daraus, daß das in  $N$  aufgehängte Gewicht die Krümmung des Bogens in seinem Aufhängepunkte mehr vermindert, als es sie in dem Theile  $CM'$  vergrößert. Man darf jedoch nicht vergessen, daß, um die Anstrengung der Fasern beurtheilen zu können, neben dem Einflusse der Biegung des Bogens auch der Einfluß des Druckes  $T$  in der Längsachse desselben berücksichtigt werden muß.

Fig. 157.

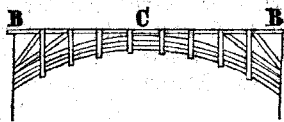
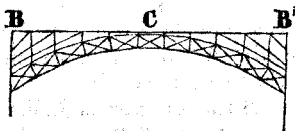


Fig. 158.



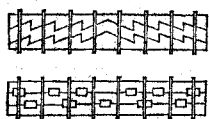
§. 612. Bei den meisten hölzernen (Fig. 157) oder eisernen (Fig. 158) Bogenbrücken bringt man noch Streben an, die mit dem Bogen zusammen das Gewicht derjenigen Theile der Brückenbahn tragen, die in der Nähe der Pfeiler liegen. Diese Streben können entweder parallel zum Bogen oder nach einem Punkte gerichtet sein, welcher unmittelbar über den Anfängen des Bogens liegt. Sie würden von geringem Nutzen sein, wenn die Construction nur eine gleichförmig über den Raum zwischen den beiden Stützen vertheilte Belastung zu tragen hätte. Da aber die Lasten, welche eine Brücke zu tragen hat, successive sich an den verschiedenen Stellen dieses



Raumes befinden, so ist die Anwendung der Streben vorthailhaft, insofern dadurch die Wirkung auf dem Bogen in demjenigen Falle vermindert, in welchem sie den Bogen mit der größten Kraft zu biegen sucht. Man vergesse nicht, daß die Verticalbrücke auf die oberen Enden der Streben, wie in §. 381 gezeigt ist, Pressungen in der Richtung der Straßbalken hervorbringen, denen diese widerstehen müssen <sup>1)</sup>.

§. 613. Bestehen die Lagen aus mehreren Lagen von gekrümmten Hölzern, so kann man die Pressung in der Ase des Bogens als über alle diese Stücke gleichförmig vertheilt ansehen. Das Biegunngsmoment  $\epsilon$  muß nach Angabe des §. 508 und der folg. berechnet werden, mit Rücksicht darauf, daß jede Lage der gekrümmten Hölzer gewöhnlich in der Richtung ihrer Länge in mehrere Stücke zerfällt. Berühren sich diese Hölzerlagen und werden sie, bei verwechselten Stößen durch herumgelegte eiserne Bänder zusammengehalten, so ist das Biegunngsmoment wenigstens gleich der um ein Moment verringerten Summe der Biegunngsmomente der einzelnen Lagen. Sind diese Lagen nicht einfach auf einander gelegt, sondern durch eine Verzahnung oder durch Keile (Dübel) mit einander verbunden (wie es in Fig. 160 dargestellt ist) und sind die Stöße, wie es eben

sagt wurde, verwechselt, so wird an den schwächsten Stellen das Biegunngsmoment wenig von dem eines aus einem Stücke bestehenden Körpers abweichen, der zur Höhe die Summe der Höhen der sämtlichen Lagen mit Ausnahme einer hat.



§. 614. Bei den eisernen Brücken besteht die Bogenconstruktion gewöhnlich aus zwei Lagen von krummen Stücken, die durch normale Querstücke und durch Kreuze mit einander verbunden sind. Die Theile jeder Lage, die mit den Enden zusammenstoßen, müssen durch fest angetriebene Bänder aus Schmiedeeisen, die der Spannung einen gleichen Widerstand leisten, wie diese Theile, mit einander verbunden werden. Ein solcher Bogen kann als ein

1) Bei mehreren hölzernen oder eisernen Bogenbrücken sind Hängebänder (Zangen, moises pendantes) oder sonstige Stücke, mittelst welcher das Gewicht der Brückendahn von dem Bogen getragen wird, normal zu diesem gerichtet. Alsdann entstehen an den obern Enden dieser Stücke horizontale Pressungen oder Spannungen in der Richtung der Straßbalken, und an den Punkten, in welchen die Hängebänder den Bogen fassen, entstehen Horizontalpressungen, die den ersteren gleich und nach der Mitte des Bogens gerichtet sind. Der Bogen wird also nicht nur durch den Verticaldruck des Gewichtes der Construktion, sondern auch durch die Horizontalpressungen solidirt, welche bei verticalen Tragbändern nicht existiren. Man kann auch beachten, daß, wenn die Stücke, mittelst welcher das Gewicht der Brückendahn vom Bogen getragen wird, normal zu diesem gerichtet sind, dieses Gewicht nicht gleichförmig auf dem Raume zwischen den Widerlagern vertheilt ist. Die Belastung ist in der Mitte des Bogens größer, und in der Nähe der Widerlager geringer, wodurch von Seiten des Boges ein größerer Widerstand nöthig gemacht wird.

Körper angesehen werden, der aus einem einzigen Stücke besteht, und dessen Biegemoment  $\varepsilon$  nach Anleitung des §. 511 gefunden wird. Der Druck in der Richtung der Länge muß als auf die beiden Lagen der krummen Stücke gleichförmig vertheilt angesehen werden.

### Sicherung der Rippen vor dem Ausweichen.

§. 615. Die Constructionen, welche in dem Vorhergehenden betrachtet wurden, befinden sich, mit Ausnahme des im §. 585 angegebenen Falles, im stabilen Gleichgewichte, insofern die Formveränderungen in Frage kommen, die in der Verticalebene der Rippen eintreten könnten. Die Stabilität fehlt aber hinsichtlich der Verschiebungen, welche die Theile einer Rippe nach der einen oder andern Seite dieser Ebene erleiden könnten. Die einzige Ausnahme bildet hier der Fall, wo die Brückenbahn von Balken getragen wird, die, in gerader Linie von einem Pfeiler zum andern gehend, an diesen befestigt sind und aus Stücken bestehen, deren Hirnenden mit einander verbunden sind.

Da diese letztere Einrichtung fast niemals vorkommt, so ist es unumgänglich nothwendig, daß die geeigneten Vorsichtsmaßregeln genommen werden, um die Rippen in ihren respectiven Ebenen zu erhalten. Es läßt sich dies durch zwischen zwei Rippen anzubringende horizontale Querbalken erreichen, deren Enden mit den Rippen so verbunden werden müssen, daß der Winkel, welchen sie mit der Ebene derselben bilden, sich nicht ändern kann. Bei einer solchen Anordnung kann eine Rippe nur dann durch eine Drehung um ihre Stützen umkanten, wenn alle übrigen Rippen dieselbe Bewegung machen, und wenn die sämmtlichen Querbalken an beiden Enden abgebrochen werden <sup>1)</sup>.

§. 616. Auf eine noch größere Sicherheit gewährende Weise lassen sich die Rippen dadurch halten, daß man außer den Querbalken noch Stücke in der Diagonale ihrer Zwischenräume (also Kreuzverstreben) anwendet. Solche Stücke, welche Kreuzbänder (Windstreben, *controvents*) genannt werden, kann man zwischen den Rippen anbringen in den geneigten Ebenen, in denen sich die Streben befinden, in der Brückenbahn und in den verticalen oder normalen Ebenen, welche die Hängebänder (Zangen) enthalten. Wegen dieser Kreuzbänder können die Rippen nicht umkanten, wenn nicht ein Theil diese Stücke gedehnt und der andere verkürzt wird. Ihre Enden müssen mit den Stücken, welche die

1) Eine solche Anordnung paßt besonders für eiserne Brücken. Das Beispiel der Auferligbrücke in Paris, deren Bogen 32 Meter Oeffnung haben, beweiset, daß die Kreuzbänder nicht unentbehrlich sind. Bei dem großen gußeisernen Bogen von 72 Meter Oeffnung der Sunderlandbrücke waren ursprünglich keine Kreuzbänder angebracht; später, nach der Vollendung der Construction, hat man einige diagonal liegende Bänder hinzugefügt.

Rippen bilden, durch fest angetriebene eiserne Bänder verbunden werden. Bei Anwendung solcher Kreuzbänder ist es zur Stabilität des Gleichgewichts nicht mehr nöthig, daß die Querbalken mit den Stücken der Rippen so verbunden werden, daß sich der Winkel an der Verbindungsstelle nicht ändern kann; doch müssen noch immer die Enden der Querbalken an den Stücken der Rippen befestigt werden.

§. 617. Die hauptsächlichsten Ursachen des Umkantens der Rippen einer Brücke sind der Druck des Windes und die Stöße, welche beim Passiren von Fuhrwerken erfolgen können. Sie lassen sich nicht genau genug abschätzen, um die Anordnung der Stücke, welche das Umkanten verhindern sollen, von einer Berechnung abhängig machen zu können.

---

### **Elftes Kapitel.**

#### **Widerstand der Lehrgerüste, welche zur Construction der Gewölbe dienen.**

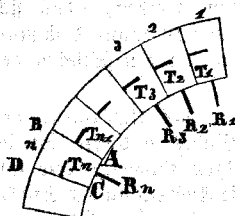
§. 618. Die Anordnung der Lehrgerüste oder Lehrbogen verlangt, daß man die Pressungen kenne, die sie während der Ausführung des Gewölbes zu tragen haben.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Lehrbogen: 1) solche, deren Stützpunkte auf den Raum zwischen den Widerlagern vertheilt sind; 2) solche, die gesprengte Lehrbogen genannt werden, und deren Stützpunkte sich sämmtlich am Fuße der Widerlager, unterhalb der Anfänge des Gewölbes befinden.

#### **Druck der Gewölbesteine auf die Lehrgerüste.**

§. 619. Bei der Construction eines Gewölbes wird jede Schicht oder Lage der Gewölbesteine auf ein Horizontalsstück, das sogenannte Schalholz gelegt, welches auf dem Umfange des Lehrgerüsts ruhet. Diese Schalhölzer üben auf das Zimmerwerk des Lehrbogens gewisse Pressungen in der Richtung der Fugen des Gewölbes aus, deren Werth aufgefunden werden muß.

Man betrachte den in Fig. 157 dargestellten Gewölbbteil, welcher auf einem Lehrbogen ruhet. Jeder Gewölbfstein, wie *ABDC* erleidet von dem unmittelbar darauf liegenden Gewölbfsteine einen Druck, dessen Richtung zu der Fuge *AB* normal ist.



Da ferner dieser letztere Gewölbfstein auf *AB* hinabzugleiten sucht und hieran nur zum Theil durch den Widerstand des Lehrbogens, zum Theil aber durch die Wirkung der Reibung und der Cohäsion, welche in der Fuge *AB* stattfindet, verhindert wird, so folgt daraus, daß der Gewölbfstein

*ABDC* auch noch in der Richtung *BA* von einer Kraft in Anspruch genommen wird, die diesem Widerstande an Größe gleich ist. Endlich wird dieser selbe Gewölbfstein in verticaler Richtung durch sein eigenes Gewicht sollicitirt. Man kann ihn daher als einen Körper betrachten, der gegen die geneigte Ebene *CD* gestützt, von den drei eben angegebenen Kräften sollicitirt und durch den Widerstand des Lehrbogens, welchen man sich parallel zur Fuge *CD* zu denken hat, zurückgehalten hat. Nach diesen Vorbetrachtungen nenne man

$G_1, G_2, G_3 \dots G_n$  respective das Gewicht für eine Einheit in der Länge des Gewölbes vom 1ten, 2ten, 3ten...nten Gewölbfstein, diese vom höchsten Gewölbfsteine aus gezählt;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$  die Winkel, welche die unteren Fugen dieser selben Gewölbfsteine mit einer Verticallinie bilden;

$z_1, z_2, z_3 \dots z_n$  die Länge der unteren Fugen;

$T_1, T_2, T_3 \dots T_n$  die Normaldrücke, welche in diesen Fugen stattfinden;

$R_1, R_2, R_3 \dots R_n$  die Drücke, welche auf das Lehrgerüst parallel zur unteren Fuge jedes Gewölbfsteines wirken;

$f$  und  $\gamma$  behalten die in §. 290 angegebenen Bedeutungen.

Beachtet man erstens, daß die zu *AB* normal gerichtete Kraft  $T_{n-1}$  sich normal und parallel zu *CD* in die beiden Kräfte  $T_{n-1} \cdot \cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  und  $-T_{n-1} \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  zerlegt; zweitens, daß der Widerstand der Reibung und der Cohäsion in der Fuge *AB* gleich  $fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}$  ist und daß diese Kraft, welche in der Richtung *BA* wirkt, sich normal und parallel zu *CD* in die beiden Kräfte  $(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}) \sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})$  und

$$(fT_{n-1} + \gamma z_{n-1}) \cos(\alpha_n - \alpha_{n-1})$$

zerlegt; drittens, daß das Gewicht  $G_n$  des Gewölbfsteines *ABDC* sich normal und parallel zu *CD* in die beiden Kräfte  $G_n \sin \alpha_n$  und  $G_n \cos \alpha_n$  zerlegt: so sieht man zunächst, daß der Normaldruck, den der Gewölbfstein *ABDC* auf die untere Fuge *CD* ausübt, gleich

$$T_n = T_{n-1} [\cos (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f \sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})] \\ + \gamma z_{n-1} \sin (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n \sin \alpha_n;$$

ist, und ferner daß das Gleichgewicht dieses Gewölbsteines durch die Gleichung ausgedrückt wird;

$$R_n = -T_{n-1}(1 + f^2) \sin (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \gamma z_{n-1} [\cos (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ - f \sin \alpha_n - \alpha_{n-1})] \\ + G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n) - \gamma z_n.$$

§. 620. Mitteltst der vorstehenden Gleichungen lassen sich die mit  $R$  bezeichneten Pressungen leicht berechnen, indem man bei dem höchsten Gewölbstein anfängt und beachtet, daß  $T_0 = 0$  und  $\gamma z_0 = 0$  ist, so daß man für diesen Gewölbstein hat

$$T_1 = G_1 \sin \alpha_1, \\ R_1 = G_1 (\cos \alpha_1 - f \sin \alpha_1) - \gamma z_1.$$

§. 621 Sieht man die Cohäsion als gleich Null an, was in der Praxis meist geschehen muß, so wird aus den Gleichungen des §. 619

$$T_n = T_{n-1} [\cos (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f \sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})] + G_n \sin \alpha_n, \\ R_n = -T_{n-1} (1 + f^2) \sin (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + G_n (\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n);$$

und für den höchsten Gewölbstein hat man

$$T_1 = G_1 \sin \alpha_1, \\ R_1 = G_1 (\cos \alpha_1 - f \sin \alpha_1).$$

§. 622. Aus den vorstehenden Formeln sieht man, daß der Normaldruck, welchen dieselbe Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausübt, sich fortwährend in dem Maße ändert, in welchem das Legen der Steine fortschreitet. Mit der Schicht, für welche zum ersten Male  $\tan \alpha < \frac{1}{f}$  ist, beginnt die Belastung des Lehrbogens. (Man sehe die in §. 280 u. folgd. und in §. 315 angegebenen Werthe von  $f$ ). Der Druck, welchen diese Schicht auf den Lehrbogen ausübt, vermindert sich, wenn man mit dem Legen der Steine fortfährt und er kann selbst zu Null oder negativ werden. Eben so verhält es sich mit den folgenden Schichten, und aus diesem Grunde sieht man zuweilen, wenn der Lehrbogen eines Gewölbes vor dem Schlusse desselben gesenkt wird, daß sich eine gewisse Zahl von Gewölbsteinen in der Luft hält, die auf den Lehrbogen drückten, als sie gelegt wurden <sup>1)</sup>).

Der Druck, welchen jede Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausüben kann, ist dann am größten, wenn sie noch nicht von der folgenden Schicht bedeckt ist. Mit dem Legen dieser Schicht wird der in Rede stehende Druck geringer; er wird von

1) Man sehe oben §. 312 u. folgd., so wie die in den Noten citirten Werke.

Neuem geringer mit dem Legen der darauf folgenden Schicht, und so fort.

§. 623. Will man sich eine vollkommene Bekanntschaft verschaffen mit den Kräften, welche auf ein Lehrgerüst wirken, und den verschiedenen Gleichgewichtszuständen, in denen sich diese Construction während des Legens der Gewölbsteine befinden wird, so muß man also nach den Formeln der §§. 619 oder 621 die verschiedenen Werthe berechnen, welche der Normaldruck, den jede Schicht der Gewölbsteine auf das Lehrgerüst ausübt, in dem Maße annimmt, in welchem das Legen der Steine fortschreitet. Will man sich aber darauf beschränken, für jeden Punkt der Curve des Lehrgerüsts eine Grenze zu kennen, welche der in diesem Punkte stattfindende Normaldruck nicht überschreiten kann, so genügt es dem Druck, welchen jede Schicht der Gewölbsteine auf den Lehrbogen ausübt unter der Voraussetzung zu berechnen, daß diese Schicht die zuletzt gelegte sei, d. h. man hat die Formel anzuwenden

$$R_n = G_n(\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n) - \gamma z_n;$$

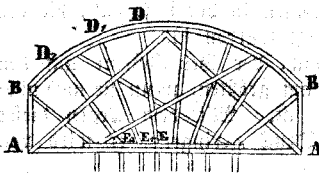
oder, bei Vernachlässigung der Cohäsion, die Formel

$$R_n = G_n(\cos \alpha_n - f \sin \alpha_n).$$

### Anordnung der Lehrgerüste.

§. 624. Die Aufgabe, welche man sich bei der Construction eines Gewölbes zu stellen hat, ist die, eine solche Anordnung zu treffen, daß jeder auf das Lehrgerüst gebrachte Gewölbstein seine Lage nicht vor dem Schlusse des Gewölbes ändern kann, und daß nach der Ausrüstung die sämtlichen Gewölbsteine sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Während des Ausrüstens und nach demselben kann das Gewölbe ohne Nachtheil ein geringes Setzen erleiden, welches durch die Elasticität der Gewölbsteine und die Zusammendrückung des Mörtels oder der Keile, die sich in den Fugen befinden, hervorgebracht wird. Aber die Verschiebung der Gewölbsteine, welche eintritt, bevor das Gewölbe geschlossen ist, muß nothwendig Schaden bringen. Die Lehrgerüste müssen demnach so angeordnet werden, daß während des Legens der Gewölbsteine das System kein Bestreben haben kann, seine Form zu ändern, und daß die Stücke nicht zu einer Drehung um ihre Verbindungsstellen angeregt werden.

Fig. 158.



und daß die Stücke nicht zu einer Drehung um ihre Verbindungsstellen angeregt werden.

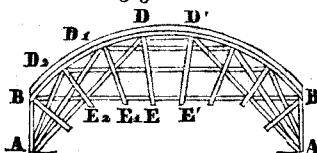
§. 625. In Fig. 158 ist ein Lehrgerüst dargestellt, dessen Stützpunkte zwischen den Widerlagern liegen. Die Pressungen, welche die Stücke  $DD_1, D_1, D_2, \dots$  durch die Gewölbsteine in der Rich-

tung der Normale der Curve erleiden, werden durch die Streben  $DE, D_1E_1, D_2E_2, \dots$  welche in den Richtungen dieser Pressungen liegen, auf die Stüppunkte übertragen. Man kann die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  ohne merklichen Fehler wie Prismen betrachten, die mit über ihre Länge vertheilten Gewichten belastet sind und mit ihren Enden horizontal auf Stützen ruhen. Nach dem Obigen wird es leicht sein, die Belastung eines jeden dieser Stücke, so wie die sich dadurch ergebenden Pressungen in den Richtungen der Streben  $DE, D_1E_1, \dots$  zu berechnen.

§. 626. Dieses System wird während der Dauer der Ausführung des Gewölbes stets im Gleichgewicht sein und kein Bestreben haben, seine Form zu ändern. Sind die Punkte  $B, B'$  fest und die drei Stücke, welche in den Punkten  $D, D_1, D_2, \dots$  zusammentreffen, hier an einander befestigt, so ist das Gleichgewicht stabil, und dies selbst dann noch, wenn man sich alle Stücke als um ihre Verbindungsstellen drehbar denkt. Doch wird es von Nutzen sein, einige Kreuzbänder anzubringen, wie dies in der Figur angedeutet ist, da diese Stücke zur Versicherung der Streben dienen und eine Wiegung derselben in der Ebene der Rippen zu verhindern suchen <sup>1)</sup>.

§. 627. Müssen die Stüppunkte am Fuße der Widerlager genommen werden, so kann man die Anordnung eines Lehrgerüsts

Fig. 159.



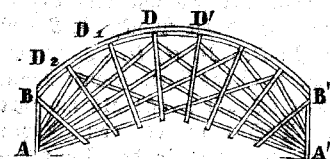
auf die in Fig. 159 dargestellte Weise treffen. Die Pressungen, welche die Gewölbesteine in den Richtungen der Normale der Curve ausüben, werden durch die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  nach drei Punkten  $A, D, D_1, D_2, \dots$  geleitet, in denen diese Stücke mit einander verbunden sind. Der auf den Punkt  $D$  stattfindende Normaldruck zerlegt sich nach den Richtungen der Strebe  $DA$  und des horizontalen Spannriegels  $DD'$ . Der sich dadurch ergebende Druck in der Richtung der Strebe wird durch den Widerstand des Stüppunktes  $A$  vernichtet, und der Druck in der Richtung des Spannriegels wird durch einen entgegengesetzten Druck vernichtet, welcher von der Pressung auf den Punkt  $D'$  herührt. Eine ähnliche Zerlegung findet in den Punkten  $D_1, D_2, \dots$  statt. Die Stücke  $DD_1, D_1D_2, \dots$  befinden sich in dem nämlichen Gleichgewichtszustande, wie bei dem in §. 625 betrachteten Systeme, und es wird leicht sein, die Pressungen in der Arc der Streben und der Spannriegel zu berechnen.

§. 628. Dieses System wird während der ganzen Dauer der Ausführung des Gewölbes im Gleichgewicht sein und kein Bestre-

1) Den Entwurf eines nach diesem Principe angeordneten Lehrgerüsts findet man in den Reports von Emeaton Bd. III. pag. 349.

ben haben, seine Form zu ändern, wosern nur das Ergen der Gewölbsteine von beiden Seiten zu gleicher Zeit geschieht. Unter Zulassung der in §. 626 gemachten Annahmen ist das Gleichgewicht stabil. Die Stücke  $DE, D_1E_1, D_2E_2, \dots$  welche in der Figur angedeutet sind, dienen nur dazu, die Spannriegel und Streben zu versichern und das Gewicht derselben auf die Punkte  $D, D_1, D_2, \dots$  zu übertragen.

§. 629. Die Anordnung eines gesprengten Lehrbogens kann noch auf die in Fig. 160 angegebene Weise stattfinden. In diesem Falle wird der auf den Punkt  $D$  ausgeübte Normaldruck mittelst der Streben  $DA, DA'$  unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen; dasselbe geschieht hinsichtlich der Punkte  $D_1, D_2, \dots$ . Die Streben erleiden nur einen leicht zu berechnenden Druck in der Richtung ihrer



Art.

§. 630. Bei diesem letzten Systeme ist das Gleichgewicht selbst dann noch stabil und keine Neigung zu einer Formänderung vorhanden, wenn auf der einen Seite mehr Gewölbsteine gelegt worden sind, als auf der andern. Die Stücke  $DE, D_1E_1$  haben denselben Zweck wie bei der vorhergehenden Construction 1).

§. 631. Auf die Lehrgerüste lassen sich die Bemerkungen anwenden, die in §. 615 u. folgd. bei den hölzernen Brücken über die Nothwendigkeit, die Rippen unter sich zu verbinden, gemacht wurden.

1) Das Princip, welches dieser Anordnung zum Grunde liegt, kam zum ersten Male bei der Westminster-Brücke (gebaut von King 1740) zur Anwendung. Dies geschah ferner bei der Black-Friars-Brücke (gebaut von Mylin 1769), deren mittlerer Bogen eine Oeffnung von 100 engl. Fuß hat. Man sehe das Werk von Robison: *A system of mechanical philosophy* Bd. I. pag. 637. Auf dieselbe Weise wurden von Rennie die Lehrgerüste für die Bogen der Waterloo-Brücke, die eine Oeffnung von 120 engl. Fuß haben, ausgeführt. Man sehe den 3. Theil der *Voyages dans la Grande-Bretagne* von Ch. Dupin, oder Fredgold's *Principles of carpentry*. Die Gewölbhogen dieser Brücken, und besonders bei der letzten, welche aus Granit construirt ist, sind von bedeutendem Gewichte, da die Gewölbsteine mehr als 6 Fuß Höhe haben.



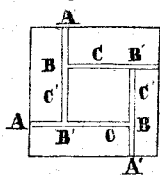
## Zwölftes Kapitel.

### Widerstand der Fußböden.

§. 632. Wir unterscheiden hier besonders 1) die gewöhnlichen Fußböden mit parallelen Trägern oder Lagerhölzern, welche auf den Mauern oder auf Balken liegen, welche von Mauer zu Mauer gehen; 2) die Fußböden aus Stücken, die nicht von Mauer zu Mauer gehen, aber mit einander verbunden sind; 3) die Fußböden aus mehreren Schichten von durch Ruth und Feder mit einander verbundenen Diefen (Bohlen), die kreuzweise auf einander genagelt sind.

Die Fußböden der ersten Art verlangen keine besondere Untersuchung. Man wird stets nach den Resultaten, welche in §. 88 u. folgd., sowie in §. 123 u. folgd. gefunden sind, den Widerstand der Stücke mit den Lasten, welche von ihnen getragen werden müssen, vergleichen können.

§. 633. Die Fußböden der zweiten Art, welche man gewöhnlich Parkettirungen nennt, können auf eine unendlich verschiedene Weise angeordnet sein. Der Zweck, den man bei ihnen im Auge hat, ist der, die Construction mit Stücken auszuführen, deren Länge geringer als der Abstand der Mauern ist. Wir wollen hier Fig. 161. nur eine der einfachsten Anordnungen untersuchen, welche in Fig. 161 dargestellt ist. Dieses



System, welches aus vier Stücken besteht, die symmetrisch in einem quadratischen Rahmen zusammengefügt sind, kann man sich belastet denken mit Gewichten, die über die ganze Ausdehnung des Rahmens gleichförmig vertheilt sind, oder mit einem einzigen Gewichte im Mittelpunkte, dessen Wirkung auf die Punkte  $C, C', B, B'$  übertragen wird, u. s. w. In allen Fällen, wo die Belastung gleichförmig vertheilt ist, wird sich das System unter der Last so biegen, daß die vier Punkte  $B, B', C, C'$  sich um gleiche Längen senken und in derselben Horizontalebene bleiben. Betrachtet man daher die beiden Stücke  $AB, A'B'$  mit ihren Belastungen für sich, so kann man sie als ein System ansehen, in welchem diese Stücke so mit einander verbunden sind, daß während der Biegung die Punkte  $B$  und  $B'$  nothwendig in derselben Horizontalebene bleiben müssen. Dasselbe gilt von den Stücken  $A'B, A'B'$ .

Man nehme an, daß ein Gewicht  $4\Pi$  im Mittelpunkte des Rahmens angebracht sei, und daß sich dadurch ein Verticaldruck  $\Pi$  in jedem der Punkte  $C, C', B, B'$  ergebe. Die Enden  $A, A', A', A'$  der Stücke werden alle auf die Punkte des Rahmens, von denen

sie resp. gestützt werden, einen Druck  $\Pi$  ausüben. Man kann daher die Gleichgewichtsbedingungen der in Rede stehenden Construction auf die Weise suchen, daß man das System der beiden Stücke  $AB, AB$  als in den Punkten  $C, C$ , von einer festen Arc gestützt und in den Enden  $A, A$  mit zwei Gewichten  $\Pi$  belastet ansieht.

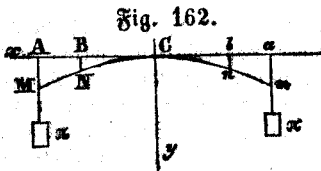


Fig. 162.

§. 634. Man betrachte jetzt 2 gleiche Stücke  $Mn, mN$  (Fig. 162), die an den Enden  $M, m$  mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet sind. Diese Stücke liegen in dem Intervalle  $Nn$  über einander. Das Ende des ersten Stückes ist mit dem

zweiten in  $n$ , und das Ende des zweiten ist mit dem ersten in  $N$  verbunden. Beide Stücke ruhen in  $C$  auf einer festen Horizontalaxe. Das Gewicht  $\Pi$ , welches in  $M$  aufgehängt ist, sucht das Stück  $Mn$  um die Arc  $C$  zu drehen, aber diese Bewegung wird verhindert durch einen gewissen von oben nach unten gerichteten Druck, der in  $N$  stattfindet, und durch einen eben so großen von unten nach oben gerichteten Druck, der in  $n$  stattfindet, welche beiden Drücke eine Folge der Wirkung des in  $m$  aufgehängten Gewichtes  $\Pi$  und der Verbindung der beiden Stücke sind. Man kann also den Theil  $CM$  des ersten Stückes ansehen, als wäre derselbe in  $C$  in einer noch aufzufindenden Richtung eingemauert, während er in  $M$  von dem Gewichte  $\Pi$  und in  $N$  von dem oben erwähnten Drucke in Anspruch genommen wird. Den Theil  $CN$  des zweiten Stückes kann man ansehen, als wäre derselbe in  $C$  eingemauert, und würde in  $N$  von dem nämlichen Drucke in Anspruch genommen.

Man nenne

$x, y$  die horizontale und verticale Coordinate eines beliebigen Punktes der Curve, welche die Stücke bilden, wobei  $C$  als der Ursprung des Coordinatensystemes angesehen wird;

$a$  die Entfernung  $AC$ ;

$a'$  die Entfernung  $BC$ ;

$f$  die Senkung  $AM$  des Punktes  $M$ ;

$f'$  die Senkung  $BN$  des Punktes  $N$ ;

$\omega$  den Winkel, welchen die Tangente des Punktes  $C$  der Curve  $CM$  mit der Abscissenaxe  $Cx$  bildet;

$\Pi'$  den Druck, welchen das Ende des einen Stückes auf das andere in den Punkten  $N, n$  ausübt;

$z$  und  $q$  behalten die in §. 80 und §. 113 angegebenen Bedeutungen.

Für den Theil  $CN$  des ersten Stückes  $Mn$  hat man zunächst

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(a-x) - \Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\} + \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} + x \tan \omega.$$

Sodann hat man für den Theil *MN* desselben Stückes, wenn die Constanten so bestimmt werden, daß man für  $x=a$  dieselben Werthe für  $y$  und  $\frac{dy}{dx}$  aus beiden Gleichungssystemen erhält,

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi(a-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \left\{ ax - \frac{x^2}{2} \right\} - \Pi' \frac{a'^2}{2} + \tan \omega,$$

$$\varepsilon y = \Pi \left\{ \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - \Pi' \left\{ \frac{a'^2 x}{2} - \frac{a'^3}{6} \right\} + x \tan \omega.$$

Endlich hat man für den Theil *CN* des zweiten Stückes

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi'(a'-x),$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = \Pi' \left\{ a'x - \frac{x^2}{2} \right\} - \tan \omega.$$

$$\varepsilon y = \Pi' \left\{ \frac{a'x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right\} - x \tan \omega.$$

Aus der ersten und der letzten der drei Gleichungen für  $y$  muß  $y=f'$  folgen, wenn man  $x=a'$  setzt. Daher

$$\varepsilon f' = \Pi \left\{ \frac{aa'^2}{2} - \frac{a'^3}{6} \right\} - \Pi' \frac{a'^3}{3} + a' \tan \omega,$$

$$\varepsilon f' = \Pi' \frac{a'^3}{3} - a' \tan \omega.$$

Das Gleichgewicht jedes der beiden Stücke verlangt außerdem die Relation

$$\Pi a = 2 \Pi' a'.$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man

$$\Pi = \Pi' \frac{a}{2a'},$$

$$\tan \omega = - \Pi' \frac{(a-a')a'}{12},$$

$$f' = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{(3a-a')a'^2}{12};$$

und substituirt man diese Werthe für  $\Pi'$  und  $\tan \omega$  in die Gleichung für den Theil  $MN$  des ersten Stückes und setzt darauf  $x=a$ , so erhält man für die Senkung  $AM$  des Endpunktes  $M$

$$f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a(2a^2 - 2aa' + a'^2)}{6}.$$

Hätte man statt der beiden Stücke  $Mn, Nm$ , welche in der Länge  $Nn$  über einander liegen, nur einen einzelnen Stab, der in  $C$  gestützt und an den Enden  $M, m$  mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet wäre, so würde die Durchbiegung, nach §. 87, gleich  $\frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{3}$  sein. Es wird also dadurch, daß die Stücke über einander liegen, die Durchbiegung vermindert, und zwar um so mehr, je größer das Intervall  $Nn$  ist. Liegen die beiden Stücke in ihrer ganzen Länge über einander, oder ist  $a'=a$ , so folgt aus der vorstehenden Formel, wie es sein muß,  $f = \frac{\Pi}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6}$ .

Für die Theile  $CN$  und  $MN$  des ersten Stückes und den Theil  $BC$  des zweiten Stückes hat man respective

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi \left\{ \frac{a}{2} - x + \frac{ax}{2a'} \right\},$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi(a - x),$$

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \Pi \left\{ \frac{a}{2} - \frac{ax}{2a'} \right\}.$$

Ist  $a' = \frac{1}{2}a$ , so ist der Werth von  $\frac{d^2y}{dx^2}$  constant für alle Punkte des Theiles  $CN$  des Stückes  $Mn$ , so daß dieser Theil die Form eines Kreisbogens annimmt, dessen Halbmesser  $\frac{\varepsilon}{\Pi} \cdot \frac{2}{a}$  ist, und in allen Punkten eine gleich große Neigung zum Bruche besitzt. Ist  $a' < \frac{1}{2}a$ , so ist für das Stück  $Mn$  die Neigung zum Bruche in  $N$ , und ist  $a' > \frac{1}{2}a$ , so ist die Neigung zum Bruche in  $C$  am größten. Die Bedingungen für den Bruch erhält man, wenn man, in Uebereinstimmung mit §. 358, im ersten Falle die Gleichung

$$q = \Pi(a - a')$$

und im zweiten die Gleichung

$$q = \Pi \frac{a}{2}$$

setzt.

Hätte man statt der beiden über einander liegenden Stücke nur einen einzelnen Stab  $Mm$ , der in  $C$  unterstützt und an den

Enden mit dem Gewichte  $\Pi$  belastet wäre, so würde, nach §. 122,  $q = \Pi a$  sein. Nach den obigen Gleichungen läßt sich beurtheilen, in welchem Verhältnisse die Tragkraft des Systemes dadurch vermehrt wird, daß die beiden Stücke über einander liegen.

§. 635. Die vorstehenden Resultate lassen sich unmittelbar auf das in Fig. 161 dargestellte System, dessen Belastung in §. 633 angegeben ist, anwenden, und man wird aus ihnen die Größe der Durchbiegung, die durch die vier Gewichte  $\Pi$  bewirkt wird, oder den Werth, den man diesen Gewichten beilegen muß, wenn der Bruch eintreten soll, herleiten können.

Befinden sich die Stützpunkte  $A, A'$  in einem Viertel der Seiten des Rahmens so hat man  $a' = \frac{a}{2}$  und  $q = \Pi \frac{a}{2}$ . Dann leistet also das System einen doppelt so großen Widerstand als zwei Stücke leisten würden, deren Länge dem Abstände zwischen den Seiten des Rahmens gleich wäre, obgleich das Volumen des Holzes nur um die Hälfte größer ist. In der Wirklichkeit wird der Widerstand des in Rede stehenden Systemes nicht ganz das Doppelte von dem der beiden Stücke sein, da die Hölzer an den Verbindungsstellen, wo eben gerade die Neigung zum Bruche vorhanden ist, geschwächt werden.

§. 636. Setzt man einen rechteckigen Querschnitt der Stücke voraus, so ist  $q$  der Breite  $b$  des Rechteckes proportional. Ist andererseits die Höhe (oder Dicke) der Stücke so bestimmt worden, daß die Relation, welche nach den oben entwickelten Formeln zwischen  $q$ ,  $a$  und  $a'$  bestehen muß, stattfindet, so wird dies noch der Fall sein, wenn man die Größen  $a$ ,  $a'$  und  $b$  in demselben Verhältnisse zunehmen läßt. Wenn man demnach alle Horizontaldimensionen der Fig. 161 in demselben Verhältnisse variiren läßt, ohne an der Höhe der Stücke etwas zu ändern, so bleibt der Werth des Gewichtes  $4\Pi$ , welches den Bruch bewirken könnte, beständig derselbe.

§. 637. Wäre die Belastung des in Fig. 161 dargestellten Systemes gleichförmig über die ganze Ausdehnung des Rahmens verbreitet, so würden sich die Gleichgewichtsbedingungen durch ähnliche Rechnungen, wie in dem vorigen Falle, finden lassen. Wir wollen uns bei diesen Untersuchungen nicht länger aufhalten, da sie keine Schwierigkeiten darbieten und es genügt, die Grundsätze angegeben zu haben, von denen ausgegangen werden muß.

### Biegung und Bruch elastischer Ebenen.

§. 638. Bei der Construction der dritten Art, welche im Anfange dieses Kapitels angegeben wurde, beabsichtigt man, eine volle, von zwei Parallelebenen begrenzte Masse zu bilden, deren Theile so fest wie möglich mit einander verbunden sein sollen.

Die Gleichgewichtsgesetze eines solchen Körpers, der in allen seinen Theilen homogen vorausgesetzt wird, sind bekannt <sup>1)</sup>, da aber die Darlegung der betreffenden Untersuchungen zu viel Raum wegnehmen und die Bekanntschaft mit analytischen Methoden voraussetzen würde, die noch nicht in die für Techniker bestimmten Lehrbücher und Vorträge aufgenommen sind, so sollen hier nur die einfachsten und den meisten Nutzen versprechenden Resultate aufgeführt werden.

§. 639. Man betrachte eine Ebene, welche in horizontaler Lage von einem rechteckigen festen Rahmen unterstützt und in der Mitte dieses Rahmens mit einem Gewichte  $\Pi$  belastet ist.

Man nenne

$a, b$  die beiden Seiten des Rahmens;

$h$  die Dicke der Ebene;

$f$  die Senkung des Punktes der Ebene, in welchem sich das Gewicht  $\Pi$  befindet;

$E$  behalte die in §. 77 angegebene Bedeutung.

Man hat dann

$$f = \frac{45 \Pi a^3 b^3}{\pi^4 E h^3} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{1}{(a^2 + 5^2 b^2)^2} + \pi. \\ &\frac{1}{(3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \pi. \\ &\frac{1}{(5^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \pi. \end{aligned} \right\}$$

wo  $\pi$  das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Die Senkung  $f$  ist der dritten Potenz der Dicke der Ebene umgekehrt proportional, und für Ebenen von ähnlicher Gestalt ist sie der zweiten Potenz einer Seite proportional.

§. 640. Ist die Ebene auf dieselbe Weise belastet und  $a$  die kleinste unter den beiden Seiten  $a$  und  $b$ , und sollen die Fasern in Folge der Wirkung von der Kraft  $\Pi$  von keiner größern Kraft als  $R$  für jede Flächeneinheit des Querschnittes in Anspruch genommen werden, so hat man die Gleichung zu setzen

$$R = \frac{45 \Pi a b^3}{2 \pi^3 h^2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1^3}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{3^3}{(a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{5^3}{(a^2 + 5^2 b^2)^2} + \pi. \\ &\frac{1^3}{(3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{3^3}{(3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \pi. \\ &\frac{1^3}{(5^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{3^3}{(5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + \pi. \end{aligned} \right\}$$

1) Diese Gesetze sind zuerst vom Verfasser in einem der Akademie der Wissenschaften im Jahre 1820 eingereichten Memoire entwickelt. Man sehe das Bulletin des Sciences par la société Philomatique, année 1823, pag. 92.

und den Werth von  $\Pi$ , welcher sich aus dieser Gleichung ergibt, als die Grenze der zulässigen Belastungen anzusehen. Dieser Werth ist dem Quadrate der Dicke der Ebene proportional; er ändert sich nicht, wenn man die Seiten  $a$  und  $b$  sich in demselben Verhältnisse ändern läßt, so daß er nicht von der absoluten Größe der Seiten abhängt <sup>1)</sup>.

§. 641. Man nehme jetzt an, daß dieselbe rechteckige Ebene mit Gewichten belastet sei, die gleichförmig über ihre ganze Ausdehnung vertheilt sind, und bezeichne mit  $p$  das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht. Man hat alsdann

$$f = \frac{180 p a^4 b^4}{\pi^2 E h^3} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 1 (a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{1 \cdot 3 (a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{1}{1 \cdot 5 (a^2 + 5^2 b^2)^2} - 2c. \\ & - \frac{1}{3 \cdot 1 (3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{3 \cdot 3 (3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} - 2c. \\ & + \frac{1}{5 \cdot 1 (5^2 a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{5 \cdot 3 (5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} + 2c. \\ & - 2c. \end{aligned} \right\}$$

Die Senkung  $f$  ist wieder der dritten Potenz der Dicke der Ebene umgekehrt proportional. Bei Ebenen von ähnlicher Gestalt ist die Senkung der vierten Potenz einer Seite proportional, wenn das von der Einheit der Oberfläche getragene Gewicht  $p$  constant ist; sie ist aber der zweiten Potenz einer Seite proportional, wenn die Totalbelastung  $pab$  constant ist.

§. 642. Ist die Ebene auf die angegebene Weise belastet und  $a$  die kleinste der beiden Seiten  $a$  und  $b$ , und sollen die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes mit keiner größeren Kraft als  $K$  in Anspruch genommen werden, so hat man die Gleichung zu setzen

$$K' = \frac{90 p a^2 b^4}{\pi^4 h^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1 (a^2 + b^2)^2} - \frac{1}{3 (3^2 a^2 + b^2)^2} + \frac{1}{5 (5^2 a^2 + b^2)^2} - 2c. \\ & - \frac{1}{3 (a^2 + 3^2 b^2)^2} + \frac{1}{3 (3^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} - \frac{1}{5 (5^2 a^2 + 3^2 b^2)^2} - 2c. \\ & + \frac{1}{5 (a^2 + 5^2 b^2)^2} - \frac{1}{3 (3^2 a^2 + 5^2 b^2)^2} + \frac{1}{5 (5^2 a^2 + 5^2 b^2)^2} - 2c. \\ & - 2c. \end{aligned} \right\}$$

und den Werth von  $p$ , welcher dieser Gleichung Genüge leistet, als das größte Gewicht anzusehen, mit welchem die Einheit der Oberfläche der elastischen Ebene belastet werden kann. Dieser Werth ist dem Quadrate der Dicke der Ebene proportional. Das Totalgewicht  $pab$ , mit welchem die Ebene belastet werden kann,

1) Dieser Satz, der dem in §. 636 aufgeführten analog ist, war von Mariotte auf eine ganz andere Weise bewiesen worden. Man sehe die *Oeuvres de Mariotte*, Bd. II. pag. 168.

ändert sich nicht, wenn man die Seiten  $a$  und  $b$  sich in demselben Verhältnisse ändern läßt, und hängt also nicht von der absoluten Größe dieser Seiten ab.

§. 643. Diese Resultate lassen sich auf die Fußböden der in Rede stehenden Art anwenden, da aber diese Letzteren nicht die innige Verbindung der Theile und die Homogenität eines stetigen Körpers besitzen, so darf man ihnen in der Praxis keinen so großen Widerstand voraussetzen, als aus den vorstehenden Formeln folgen würde.

### Praktische Regeln für die Anordnung der Fußböden.

§. 644. Nach Rondelet<sup>1)</sup> soll die Höhe der Lagerhölzer oder Träger gleich  $\frac{1}{24}$  der Balkenlänge sein, wenn die Weite zwischen den Hölzern gleich der Breite derselben ist. Diese Regel kommt mit den Angaben anderer Baumeister nahezu überein.

Die Balken, auf denen die Träger liegen, sind gewöhnlich in Abständen von 12 zu 12 Fuß angebracht. Die Stärke dieser Stücke muß  $\frac{1}{8}$  ihrer Länge sein.

§. 645. Tredgold<sup>2)</sup> unterscheidet zwei Arten von Fußböden, 1) die gewöhnlichen (single joisted floors), welche aus einer Reihe von Lagerhölzern oder Trägern bestehen, und 2) die zusammengesetzten Fußböden (framed floors), welche aus Balken bestehen, mit denen kleinere Querbalken, auf welchen die Träger ruhen, verbunden sind. Die Querbalken nehmen außerdem von unten noch kleinere Träger, auf welche die Decklatten genagelt werden, auf.

Die Träger sind in in der Regel einen Fuß, von Mitte zu Mitte gerechnet, von einander entfernt. Bei den gewöhnlichen Fußböden lassen sich die Dimensionen der Träger, wenn man

$a$ ,  $b$  die in Zollen ausgedrückte Breite und Höhe der Stücke,  
 $c$  die in Fußten ausgedrückte Tragweite  
 nennt, nach den folgenden Formeln bestimmen

$$b = 2, 2 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 2, 3 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Eichenholz.}$$

Bei den zusammengesetzten Fußböden, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Balken in Abständen von 10 Fuß liegen, welche Entfernung nie überschritten werden sollte, nehme man für diese Stücke

1) Art de bâtir. tome IV., pag. 153.

2) Elementary principles of carpentry, pag. 61 u. folgd.



$$b = 4,2 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 74 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 4,34 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 82 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Eichenholz.}$$

2) Für die kleineren Querbalken, die mit den Hauptbalken in Abständen von 4 bis 6 Fuß verbunden werden, nehme man

$$b = 3,42 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 40 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 3,53 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}, \text{ oder } a = 44 \frac{c^2}{b^3} \text{ für Eichenholz.}$$

3) Die Dimensionen der oberen Träger werden nach der eben gegebenen Anleitung bestimmt. Die Breite der unteren Träger, welche nur zum Befestigen der Lasten dienen, braucht nicht über 2 Zoll zu sein. Die Höhe dieser Stücke erhält man nach den Formeln

$$b = 0,64 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Tannenholz,}$$

$$b = 0,67 \sqrt[3]{\frac{c^2}{a}} \text{ für Eichenholz,}$$

### Dreizehntes Kapitel.

#### Widerstand der Wände eines Gefäßes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit.

§. 646. Der Druck, den die Wände eines Gefäßes durch die darin enthaltene Flüssigkeit erleiden, erfolgt normal auf die innere Oberfläche dieser Wände. Bei den elastischen (luftförmigen) Flüssigkeiten kann man die Größe dieses Druckes als constant ansehen für die ganze Ausdehnung der Wand. Bei den (tropfbaren) Flüssigkeiten, welche der Wirkung der Schwere unterliegen, ist der Druck auf die unteren Theile der Wand größer, als auf die ande-

ren, und es ist oft nothwendig auf diesen Unterschied Rücksicht zu nehmen.

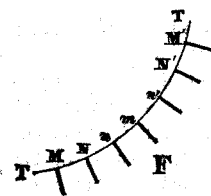
§. 647. In der Regel sind die Wände der Gefäße aus einem festen (harren) Materiale gebildet. Es sind alsdann Körper, die den Formänderungen, wozu sie durch den Druck der Flüssigkeiten angeregt werden könnten, widerstehen, jedoch diesem Drucke etwas nachgeben, wegen der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit ihrer Theile. Zuweilen besteht zwischen der Form der Wand und der Größe des Normaldruckes, den die Theile derselben erleiden, eine solche Beziehung, daß die Wand eigentlich nicht zu einer Formänderung, sondern nur zu einer Ausdehnung oder Zusammendrückung in der Richtung ihrer Fläche angeregt wird. Es soll dieser Fall dadurch bezeichnet werden, daß man sagt, die Wand sei nach der Gleichgewichtssfläche geformt. In diesem Falle kann die Wand aus einem vollkommen biegsamen Materiale bestehen, wie z. B. einem Fadengewebe, dessen Theile der Ausdehnung oder Zusammendrückung, aber nicht der Biegung zu widerstehen vermögen. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn alle Theile der Fläche ausgebeht werden, und das Einzige, was von Wichtigkeit ist zu kennen, ist die Größe der Spannung, welche diese Theile erleiden.

Die Untersuchung der Erscheinungen, welche sich bei einer Wand zeigen, die von einer Flüssigkeit gedrückt wird, kann hier nicht auf eine vollständige und allgemeine Weise geführt werden, aber es sollen Gesetze entwickelt werden, mit denen man für die meisten Anwendungen ausreichen wird. Es werden nach einander eine Linie und eine Fläche betrachtet, die von Kräften in Anspruch genommen werden, deren Richtungen normal auf dieser Linie oder auf dieser Fläche stehen.

**Gleichgewicht einer Linie, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Linie stehen.**

§. 648. Die Gleichgewichtsbedingungen eines als vollkommen biegsam angesehenen Fadens, an dessen sämtlichen Punkten Normalkräfte angreifen, könnten aus dem in §. 306 und §. 328 Gesagten abgeleitet werden. Sie lassen sich auch direct auf die folgende Weise finden.

Fig. 163.



Man betrachte zunächst die ebene Curve *MM* (Fig. 163), mit welcher die Richtungen der Normalkräfte, von denen die Curve sollicitirt wird, in derselben Ebene liegen. Diese Curve kann man sich als ein Polygon von unendlich vielen Seiten und die Kräfte an den Eckpunkten desselben angreifend denken. Man nenne nun

ds die Länge des Bogenelementes  $mn$  der Curve, oder die Länge einer Seite des Polygons;

$\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der Curve;

$F$  den Werth der in  $m$  angreifenden Normalkraft für eine Einheit der Bogenlänge der Curve;

$T$  die Kraft, mit welcher die Seite  $mn$  des Polygons gespannt wird.

Damit das Polygon im Gleichgewicht sein kann, muß die Kraft, welche an jedem Endpunkte des Polygons angreift, durch die Spannungen der Elemente  $mn, mn'$  vernichtet werden. Die in  $m$  angreifende Kraft ist  $Fds$  und ihre Richtung halbirte den Winkel  $nmn'$ . Es muß daher 1) die Spannung der Seite  $mn'$  gleich der Spannung  $T$  der Seite  $mn$  sein, und 2) muß sich verhalten  $T$  zu  $Fds$ , wie der Sinus des Winkels  $Fmn$  oder  $Fmn'$ , der von einem rechten Winkel unendlich wenig verschieden ist, zu dem Sinus des unendlich kleinen Winkels zwischen  $mn$  und  $mn'$ , dessen Werth gleich  $\frac{ds}{\rho}$  ist. Hieraus folgt 1) daß der Werth der Spannung  $T$  für alle Seiten des Polygons constant ist, oder daß der Faden in allen seinen Theilen gleich stark gespannt ist; 2) daß für jeden Punkt der Curve die Relation bestehen muß

$$\frac{Fds}{T} = \frac{ds}{\rho} \text{ oder } F = \frac{T}{\rho}.$$

Der Normaldruck ist in jedem Punkte der Curve gleich der Spannung dividirt durch den Krümmungshalbmesser. Bildet der Faden keine geschlossene Curve, so müssen die letzten Elemente  $MN, M'N'$  in der Richtung ihrer Länge mit einer Kraft angezogen werden, die gleich der Spannung  $T$  ist.

§. 649. Man betrachte jetzt eine Curve von doppelter Krümmung, auf welche ebenfalls Normalkräfte wirken. Man kann eine solche Curve ansehen als ein Polygon mit unendlich kleinen Seiten, von denen je drei auf einander folgende nicht in einer Ebene liegen. Die an den Eckpunkten angreifenden Kräfte müssen in der Richtung des Krümmungshalbmessers wirken. Alles in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte gilt auch für dieses System: wenn der Faden im Gleichgewicht sein soll, so muß derselbe in allen seinen Theilen gleich stark angespannt sein, und dies findet statt, wenn die in jedem Punkte angreifende Normalkraft gleich der Spannung dividirt durch den Krümmungshalbmesser ist 1).

1) Die Existenz des Gleichgewichtes in einem Faden, der eine doppelt gekrümmte Curve bildet, läßt sich sehr leicht auffassen, wenn man sich erinnert, daß nach einem von Lacroix (Mémoires présentés à la première classe de l'Institut tome I, pag. 420) bewiesenen Lehrsatz sich durch jede beliebige Curve eine solche abwickelbare Fläche legen läßt, daß in der Abwicklung derselben jene Curve als eine gerade Linie erscheint. Diese Fläche, welche den Namen rectificirende Fläche (surface rectifiante) führt, entsteht durch die Durchschnitte der auf einander folgenden Ebenen,

§. 650. Wirken die Normalkräfte auf eine krumme Ruthe aus festem Materiale, die der Wirkung dieser Kräfte nur vermöge der Elasticität durch eine sehr kleine Formänderung nachgiebt, so ist zum Gleichgewichte des Systemes nicht mehr nöthwendig, daß die oben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden. Die Spannung in der Richtung der Länge der Curve braucht alsdann nicht mehr constant zu sein.

Hinsichtlich der Bestimmung der Spannung, welche in der Richtung der Länge in einem beliebigen Punkte stattfindet, beachte man, daß im Allgemeinen eine Ruthe, auf welche Normalkräfte wirken, nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn diese Kräfte sich gegenseitig vernichten, oder wenn die Ruthe von festen Punkten gehalten wird, und zwar von zwei Punkten, wenn sie von einfacher, und von drei Punkten, wenn sie von doppelter Krümmung ist. Die Pressungen, welche die festen Stützpunkte erleiden, hat man aus der Bedingung zu bestimmen, daß sie mit den Normalkräften, welche in allen Punkten der Ruthe wirken, zusammen ein System bilden müssen, welches sich auf zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte zurückführen läßt. Die Spannung der einzelnen Theile der Ruthe wird gemeinschaftlich erzeugt von den in allen Punkten angreifenden Normalkräften und den besondern Kräften, welche in einzelnen Punkten angreifen müssen, um das Gleichgewicht herzustellen.

Will man demnach bei der krummen Ruthe  $MM'$  (Fig. 164), Fig. 164. welche auf die oben angegebene Weise sollicitirt wird, und eine nicht geschlossene Curve bildet, die Spannung kennen, welche das Element  $mn$  in der Richtung seiner Länge erleidet, so wird man beachten, daß diese Spannung dadurch erzeugt wird, daß die Kräfte, welche auf die Theile  $mm$ ,  $mm'$  der Curve wirken, vermittelt der Verbindung, welche das Element  $mn$  zwischen diesen beiden Theilen herstellt, sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Zerlegt man daher parallel zur Tangente der Curve für den Punkt  $m$  die sammtlichen Kräfte, welche auf den Theil  $mm$  oder auch die sammtlichen Kräfte, welche auf den Theil  $mm'$  wirken, so wird die Summe der so erhaltenen Componenten die gesuchte Spannung sein.

§. 651. Man betrachte jetzt eine geschlossene, ebene Curve  $MN$  (Fig. 165), welche von Normalkräften sollicitirt wird, deren

welche die Curve berühren und auf ihrem Krümmungshalbmesser normal stehen. Es folgt hieraus, daß es stets eine zu den Krümmungshalbmessern der gegebenen Curve normale Fläche giebt, auf welcher diese Curve eine Linie des kürzesten Abstandes ist. Der Faden kann daher angesehen werden als über die Oberfläche eines festen Körpers gespannt, auf welchem er im Gleichgewicht bleiben und in jedem Punkte einen Normaldruck ausüben wird.

Fig. 165. Richtungen in der Ebene der Curve liegen, und nehme an, daß die Spannung gesucht werde, welche das Element  $mn$  erleidet.



Zerlegt man die sämtlichen Kräfte, von denen die Curve sollicitirt wird, parallel (und normal) zur Richtung der Tangente im Punkte  $m$ , so wird man beachten, daß die Punkte  $m'$ ,  $m$ , in denen

die Tangente dieselbe Richtung hat, die Curve in zwei Theile zerfallen, in deren jedem die Normalkräfte Componenten nach entgegengesetzten Richtungen geben. Nimmt man die Resultante aus den Componenten, welche parallel zu  $mn$  sich respective durch die in  $mMm'$  und  $mNm'$  wirkenden Kräfte ergeben, so wird man zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte erhalten. Die Vernichtung dieser Kräfte bewirkt die Spannung der beiden Elemente  $mn$ ,  $m'n'$ : man wird also diese beiden Spannungen finden, wenn man die eine der beiden eben erwähnten Resultanten nach den Richtungen  $mn$  und  $m'n'$  zerlegt.

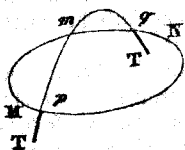
§. 652. Die Ruthe  $MN$  bilde jetzt eine Curve von doppelter Krümmung und man zerlege wieder die sämtlichen Kräfte, von denen die Curve sollicitirt wird, parallel (und normal) zu der Tangente durch den Punkt  $m$ . Denkt man sich jetzt die in Rede stehende Curve von einem Cylinder eingehüllt, dessen Seiten dieser Tangente parallel sind, so wird es einen Punkt  $m'$  geben, wo die berührende Ebene des Cylinders parallel ist der berührenden Ebene des Punktes  $m$  der Curve. Die beiden Punkte  $m$ ,  $m'$  werden wie vorhin die Curve in zwei Theile zerfallen, in deren jedem die Normalkräfte Componenten nach entgegengesetzten Richtungen geben. Nimmt man die Resultante aus den Componenten, welche respective jeder der beiden Theile der Curve liefert, so wird man zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte erhalten, deren gegenseitige Vernichtung die Spannung der Elemente  $mn$ ,  $m'n'$  erzeugt. Zerlegt man daher die eine dieser beiden Kräfte in zwei andere ihr parallele, nach den Richtungen der berührenden Ebenen der Punkte  $m$ ,  $m'$ , so wird die Componente, welche sich nach der Richtung der berührenden Ebene des Punktes  $m$  ergibt, die Spannung sein, welche das Element  $mn$  erleidet.

**Gleichgewicht einer Fläche, welche von Kräften sollicitirt wird, deren Richtungen normal auf der Fläche stehen.**

§. 653. Die Gleichgewichtsbedingungen einer vollkommen biegsamen Fläche, welche von Normalkräften sollicitirt wird, können durch die folgenden Betrachtungen festgestellt werden.

Die Linie  $MN$  (Fig. 166) bilde die Begrenzung einer Fläche, und man betrachte den Körper, welcher von dieser Fläche bedeckt

Fig. 166.



wird und den wir hier als fest voraussetzen wollen. Die Linie kann man durch die zwei beliebig gewählten Punkte  $M$  und  $N$  in zwei Abschnitte  $MpN$ ,  $MqN$  theilen und jeden dieser Abschnitte wieder in eine gleiche Anzahl sehr kleiner und unter sich gleicher Theile. Man kann ferner von dem Punkte  $M$  nach dem Punkte  $N$  und von jedem der Theilpunkte  $p$  des ersten Abschnittes nach dem entsprechenden Theilpunkte  $q$  des zweiten Abschnittes Fäden ausspannen, die sich auf den Körper nach der Linie des kürzesten Abstandes  $pmq$  legen werden, welche sich auf seiner Oberfläche zwischen den Punkten  $p$  und  $q$  beschreiben läßt.

Denkt man sich die Fäden so dicht neben einander gezogen, daß je zwei benachbarte einander immer unendlich nahe sind, so wird das Ganze eine Fläche bilden. Läßt man nun an den beiden Enden jedes Fadens  $pmq$  in der Richtung der letzten Elemente desselben zwei gleiche Kräfte  $T$  angreifen, so wird der Faden vermöge seiner Spannung auf den Körper, welchen er umfaßt, einen Normaldruck ausüben, dessen Werth für einen beliebigen Punkt  $m$  gleich  $\frac{T}{\rho}$  ist, wenn  $\rho$  den Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  der von dem Faden beschriebenen Curve bezeichnet. Denkt man sich jetzt den festen Körper weggenommen und in allen Punkten  $m$  Normalkräfte angreifend, deren Werth gleich  $\frac{T}{\rho}$  ist, so wird das Gleichgewicht nach wie vor bestehen. Es ist hierbei nicht nöthig, daß  $T$  bei allen Fäden denselben Werth habe, wenn nur die Spannung in allen Theilen jedes einzelnen Fadens dieselbe ist.

Giebt man jetzt den Punkten  $M$ ,  $N$  eine andere Lage auf der Begrenzungslinie der Fläche, so wird man auf dieselbe Weise ein zweites System von Linien des kürzesten Abstandes bilden und neue Fäden ausspannen können, welche die ersten kreuzen werden. Wird einer dieser neuen Fäden, der durch den Punkt  $m$  geht, mit der Kraft  $T$  gespannt, so wird dieselbe in  $m$  einen Normaldruck  $\frac{T}{\rho}$  erzeugen, wo  $\rho$  der Krümmungshalbmesser der Curve des neuen Fadens für den Punkt  $m$  ist, und dieser Druck wird den durch den ersten Faden hervorgebrachten vergrößern. Denkt man sich daher jetzt den Körper weg, so wird das Gleichgewicht un geändert bleiben, wenn man in  $m$  eine Normalkraft gleich  $\frac{T}{\rho} + \frac{T}{\rho}$  angreifen läßt.

Es ist klar, daß man auf diese Weise fortfahren und über den Körper unendlich viele Fäden spannen kann, die zu verschiedenen Systemen von Linien des kürzesten Abstandes gehören. Die

einzigste Gleichgewichtsbedingung ist die, daß die Spannung jedes Fadens in allen seinen Punkten dieselbe sein muß. Bezeichnet man mit  $T, T', T'',$  u. beziehungsweise die Spannungen der sich in irgend einem Punkte  $m$  kreuzenden Fäden und mit  $\varrho, \varrho', \varrho'',$  u. die zu diesem Punkte gehörenden Krümmungshalbmesser der Curven, welche die Fäden bilden, so wird der Normaldruck in  $m$  gleich  $\frac{T}{\varrho} + \frac{T'}{\varrho'} + \frac{T''}{\varrho''}$  u. sein. Es ist übrigens einleuchtend, daß in jedem Punkte  $p$  der Begrenzungslinie der Fläche in den Richtungen der verschiedenen Fäden, welche von diesem Punkte ausgehen, eben so viele, den Spannungen dieser Fäden gleiche Kräfte angebracht werden müssen. Die Richtungen dieser Kräfte liegen sämmtlich in der Tangentialebene, welche die Fläche in dem Punkte  $p$  berührt.

Wenn die zu untersuchende Fläche nicht von einer Linie begrenzt wird, sondern eine geschlossene Hülle bildet, so wird man das Vorhergehende auf sie anwenden können, wenn man in Erwägung zieht, daß Gleichgewicht in den Fäden bestehen muß, die sich über diese Fläche so ausspannen lassen, daß ein oder mehrere Systeme von Linien des kürzesten Abstandes entstehen. Jeder Faden wird eine geschlossene Curve bilden und in allen seinen Theilen gleich stark gespannt sein; der durch ihn ausgeübte Normaldruck wird gleich seiner Spannung sein, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der von dem Faden gebildeten Curve. Der Normaldruck, welchen der Körper in einem beliebigen Punkte erleidet, wird gleich der Summe der Normaldrücke sein, die aus den Spannungen der verschiedenen, sich in diesem Punkte kreuzenden Fäden resultiren.

§. 654. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß eine biegsame Fläche, auf welche Normalkräfte wirken, im Gleichgewichte ist, wenn sich dieselbe mittelst eines oder mehrerer Systeme von Linien des kürzesten Abstandes in unendlich schmale und als Fäden anzusehende Streifen oder Bänder zerlegen läßt, welche unter sich im Gleichgewichte sind, vermöge einer richtigen Vertheilung der Normalkräfte, welche an jedem Punkte im Innern der Fläche und der Tangentialkräfte, welche an jedem Punkte der Begrenzungslinie wirken. Bei jeder vollkommen biegsamen Fläche giebt es unendlich viele Systeme von Normal- und Tangentialkräften, die mittelst dieser Fläche im Gleichgewicht sein können.

§. 655. Wir wollen jetzt eine vollkommen biegsame Fläche betrachten, welche durch eine feste Linie begrenzt und gehalten, und von Normalkräften so in Anspruch genommen wird, daß sie kein Bestreben hat, ihre Gestalt zu ändern. Es handelt sich um die Gleichgewichtsbedingungen, die Spannung welche die Fläche in einem beliebigen Punkte und in einer beliebigen Richtung erleidet, und die Tangentialkräfte, welche in jedem Punkte der festen Begrenzungslinie wirken. Diese Frage läßt sich im Allgemeinen nicht

auflösen, wenn die Elemente der Fläche als unausdehnbar angesehen werden, da das Gleichgewicht auf unendlich viele verschiedene Arten bestehen kann. Sieht man aber die Elemente der Fläche als ausdehnbar an, so ist die Aufgabe eine bestimmte.

**Gleichgewicht einer Fläche, die von Normalkräften sollicitirt und nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt wird.**

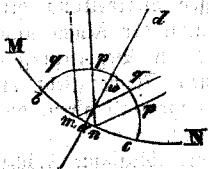
§. 656. Es werde eine vollkommen biegsame und elastische Fläche von Normalkräften sollicitirt und es möge angenommen werden, daß zwischen diesen Kräften und den in Richtung der Fläche wirkenden Spannungen Gleichgewicht bestehe. Zieht man auf dieser Fläche eine Linie des kürzesten Abstandes und betrachtet den Theil der Fläche, der durch ein sich längs dieser Linie hinziehendes Band von constanter und sehr geringer Breite gebildet wird, so wird dieses Band in der Richtung seiner Länge mit einer gewissen Kraft gespannt sein, und man sagt, daß die Fläche nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt sei, wenn 1) die Spannung des Bandes in allen Punkten seiner Länge constant ist, und 2) die Größe dieser Spannung dieselbe ist, welche Richtung auch die Linie des kürzesten Abstandes, längs welcher das Band gedacht wird, haben möge.

Rechnet man  $\lambda$  die als unendlich klein angenommene Breite des Bandes und  $\Theta$  den Werth seiner Längenspannung, welcher ebenfalls unendlich klein sein wird, so drückt das Verhältniß  $\frac{\Theta}{\lambda} = T$  die auf die Längeneinheit bezogene Spannung der Theile der Fläche aus. Die endliche Größe  $T$  ist also das Maß der Kraft, mit welcher die Fläche gespannt ist.

§. 657. Es sei  $MN$  (Fig. 167) ein Theil der Begrenzungslinie einer nach allen Richtungen gleichmäßig gespannten Fläche.

Fig. 167. Soll diese Fläche im Gleichgewicht sein, so müssen an allen Punkten der Begrenzungslinie Kräfte angreifen, welche in der Richtung der die Fläche berührenden Ebene wirken. Die Linie  $MN$  läßt sich als zusammengesetzt aus unendlich kleinen Theilen  $bc$ , deren Länge gleich  $\lambda$  ist, ansehen und die Kräfte, welche über das Intervall  $bc$  vertheilt sind,

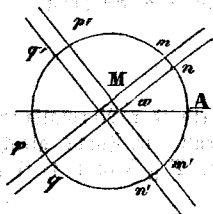
kann man sich in der Mitte  $a$  dieses Intervalles angreifend denken. Man kann ferner die Fläche ansehen, als bestehe sie aus unendlich vielen Fäden oder unendlich schmalen Bändern, die in der Richtung der Radien eines von dem Punkte  $a$  aus mit dem Halbmesser  $\frac{1}{2}\lambda$  beschriebenen Halbkreises liegen, und den Spannungen dieser Bänder werden die in dem Punkte  $a$  angreifenden Tangentialkräfte das Gleichgewicht halten müssen. Es seien jetzt





*mnpq* zwei der in Rede stehenden Bänder, welche mit der Normale *ad* denselben Winkel  $\omega$  bilden. Die Breite dieser Bänder wird gleich  $\frac{\lambda}{2} d\omega$ , ihre Spannung gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega$  und die Resultante aus den Spannungen der beiden Bänder gleich  $T \lambda d\omega \cos \omega$  sein. Die Summe aller auf diese Weise gefundenen Resultanten oder das Integral  $T \lambda \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \cos \omega$ , dessen Werth gleich  $T \lambda$  ist, wird die Tangentialkraft sein, welche im Punkte *a* angreifen muß. Demnach erheischt das Gleichgewicht einer nach allen Richtungen gleichmäßig mit der Kraft *T* gespannten Fläche, daß in allen Punkten der Begrenzungslinie dieser Fläche unter sich gleiche Kräfte angreifen, deren Werth für eine Längeneinheit gleich *T* ist, und deren Richtungen die Fläche tangiren und normal auf der Begrenzungslinie stehen.

§. 658. Ist die Form einer vollkommen biegsamen und un-  
ausdehnbaren Fläche gegeben, so giebt es stets ein System von  
normal auf allen innern Punkten angreifenden Kräften, wodurch  
die Fläche im Gleichgewichte erhalten und gleichmäßig nach allen  
Richtungen gespannt werden kann. Es sei *M* (Fig. 168) ein  
Fig. 168. Punkt einer solchen Fläche und man denke  
sich um diesen als Mittelpunkt einen Kreis  
beschrieben mit dem unendlich kleinen Halb-  
messer  $\frac{\lambda}{2}$ . Betrachten wir jetzt eines von



den unendlich schmalen Bändern *mnpq*, die  
sich in den Richtungen der sich in dem Punkte  
*M* kreuzenden Linien des kürzesten Abstandes  
erstrecken. Bezeichnet man mit *r* den Krüm-  
mungshalbmesser des durch den Punkt *M* und  
in der Richtung der Arc dieses Bandes geführten Normalschnittes  
der Fläche, und mit  $\omega$  den Winkel, welcher von diesem Schnitte  
mit dem festen Halbmesser *AM* gebildet wird, so ist die Breite *mn*  
oder *pq* des Bandes gleich  $\frac{\lambda}{2} d\omega$  und die Spannung desselben  
gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega$ . Sieht man daher dieses Band als einen isolirten  
Faden an, so wird dasselbe im Gleichgewicht sein, wenn man im  
Punkte *M* eine Normalkraft angreifen läßt, deren Werth nach den  
§§. 648 und 649 für die Längeneinheit gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega \cdot \frac{1}{r}$  und  
mithin für das Intervall *mnpq* gleich  $T \frac{\lambda}{2} d\omega \cdot \frac{1}{r} \cdot \lambda$  oder  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\omega$   
ist. Für ein zweites Band *m'n'p'q'*, welches sich mit dem ersten  
rechtwinklig kreuzt, erhält man ebenso, wenn *r'* den Krümmungs-

halbmesser des in der Richtung dieses neuen Bandes geführten Normalschnittes bezeichnet,  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\omega$  als den Werth der Normalkraft, welche in  $M$  angreifend das zweite Band im Gleichgewicht halten würde. Nimmt man die Summe der Werthe, welche der Ausdruck  $T \cdot \frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) d\omega$  annimmt, wenn  $\omega$  von 0 bis zum vierten Theil des Kreisumfangs wächst, so erhält man die Summe der Normalkräfte, welche, im Innern des um  $M$  als Mittelpunkt beschriebenen Kreises angreifend, den Spannungen aller Bänder, die sich in diesem Punkte kreuzen, das Gleichgewicht halten. Nun ist bekanntlich der Werth der Größe  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$  von dem Winkel  $\omega$  unabhängig und gleich  $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$ , wenn man mit  $\varrho$  und  $\varrho'$  die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers der Fläche für den Punkt  $M$  bezeichnet<sup>1)</sup>.

Das gesuchte Integral ist also  $T \cdot \frac{\pi \lambda^2}{2 \cdot 2} \left( \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right)$ , und, da der Inhalt des von dem Punkte  $M$  aus mit dem Halbmesser  $\frac{\lambda}{2}$  beschriebenen Kreises gleich  $\frac{\pi \lambda^2}{4}$  ist, so hat man den Ausdruck

$$T \left\{ \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right\}$$

als den auf die Flächeneinheit bezogenen Werth der Normalkraft, welche in dem Punkte  $M$  angreifen muß, wenn die Fläche gleichmäßig nach allen Richtungen mit der Kraft  $T$  gespannt werden soll<sup>2)</sup>.

§. 659. Sind die beiden Krümmungshalbmesser  $\varrho$  und  $\varrho'$  einander an Größe gleich und von demselben Vorzeichen, welche Eigenschaft der Kugel zukommt, so ist die in Rede stehende Kraft gleich  $\frac{2T}{\varrho}$ . Man sieht hieraus, daß derselbe Normaldruck, welcher in der Richtung der kreisförmigen Elemente einer Cylindersfläche eine Spannung  $T$  hervorbringen würde, bei einer Kugelfläche von gleichem Durchmesser nur eine Spannung  $\frac{1}{2} T$  nach allen Richtungen zu erzeugen vermag.

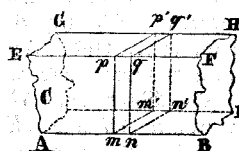
1) Kravitz, Integralrechnung §. 569.

2) Man wird leicht einsehen, daß man zu demselben Resultate gelangen muß, wenn man irgend eine andere Figur betrachtet, deren Mittelpunkt  $M$  ist.

# Anwendungen auf Gefäße von verschiedener Gestalt.

§. 660. Es mögen zuerst Gefäße mit ebenen Wänden, die von einer darin enthaltenen Flüssigkeit einen von innen nach außen gerichteten Druck auszuhalten haben, betrachtet werden. Die Wände solcher Gefäße werden im Allgemeinen in der Richtung ihrer Ebene ausgedehnt, während sie zugleich einem Normaldrucke Widerstand leisten müssen. Der einfachste, sich hier darbietende Fall ist der, wo das Gefäß aus einer geraden Röhre besteht, deren Wände mit der Axe der Röhre parallel laufen, wie z. B. bei  $AH$  (Fig. 169),

Fig. 169.



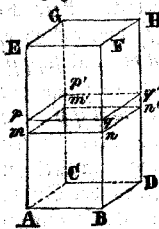
welche eine an beiden Enden offene Röhre mit rechteckigem Querschnitt darstellen soll. Die Wände werden in diesem Falle nur in der Richtung ihrer Breite, nicht aber in der Richtung ihrer Länge ausgedehnt. Betrachtet man jetzt einen Theil  $mq'$  dieser Röhre, so kann man die Stücke  $mn'n'm'$  und  $pqq'p'$

der untern und obern Wand ansehen, als würden sie, vermöge der entgegengesetzten Drücke auf die Theile  $mnqp$  und  $m'n'q'p'$  der Seitenwände, mit einer Kraft ausgedehnt, die gleich dem halben Drucke auf einen dieser Theile ist, und deren Richtung parallel zu den Seiten  $mm'$ ,  $pp'$  ist. Auf dieselbe Weise wird jedes der Stücke  $mq$ ,  $m'q'$  von einer zu  $mp$ ,  $m'p'$  parallel gerichteten Kraft ausgedehnt werden, die dem halben Drucke gleich ist, welche auf dem Raume  $mn'$  oder  $pq'$  stattfindet. Jedes der Wandstücke, um die es sich hier handelt, kann also wie ein Stab betrachtet werden, der in der Richtung seiner Länge ausgedehnt wird, und auf den über diese Länge gleichförmig vertheilte Normalkräfte wirken, während er selbst an beiden Enden unterstützt ist. Man kann hier mithin die Analyse des §. 592 anwenden und die Stärke der Wand aus der Gleichung des §. 593 bestimmen, wobei  $a$  die Hälfte der Länge  $mp$ ,  $Q$  die Hälfte des auf  $mn'$  oder  $pq'$  ausgeübten Normaldruckes, und  $p$  den Werth des Normaldruckes auf eine in der Richtung  $mp$  gemessene Einheit des Längenmaßes bezeichnet.

§. 661. Ist die Röhre an beiden Enden oder nur an einem Ende geschlossen, so gilt das Vorhergehende, streng genommen, für diesen Fall nicht. Verfährt man indessen auf die oben angegebene Weise, so wird man einen Grenzwertb finden, bei dessen Anwendung man sicher sein kann, daß jede Wand eine mehr als ausreichende Stärke erhalten wird. Betrachten wir z. B. ein vertical stehendes, oben offenes Gefäß, welches mit einer schweren (d. h. nicht luftförmigen) Flüssigkeit gefüllt ist und dessen Boden von einer festen Horizontalebene getragen wird. Hätte das Gefäß keinen Boden, so ließe sich auf jedes horizontale Element  $mq'$  das in dem vorhergehenden Paragraphen Gesagte anwenden, wobei nur zu be-

achten wäre, daß der Druck der Flüssigkeit mit der Tiefe zunimmt und mithin die Elemente der Wände um so größern Kräften zu widerstehen haben, je tiefer sie unter dem Niveau der Flüssigkeit liegen. Da aber das Gefäß wirklich einen Boden hat, so vermindert sich dadurch die Längenspannung und die Krümmung der in Rede stehenden Elemente. Vermittelt des oben angegebenen Calculs wird man demnach Werthe für die Dicke der Wandtheile erhalten, die um so mehr die wirklich nothwendigen übersteigen werden, je näher die betreffenden Wandtheile dem Boden des Gefäßes liegen.

§. 662. Ist ein Gefäß gänzlich geschlossen, so werden auch die Wände nach mehreren Richtungen hin ausgedehnt. Wenn z. B. das parallelepipedische Gefäß *AH* (Fig. 170) an beiden Enden geschlossen ist und eine von innen nach außen drückende



Flüssigkeit enthält, so wird jede Wand wie *AF* offenbar in der Richtung der Kanten *AB* und *AE* ausgedehnt. Diese Wand kann daher als zu einem jeden der beiden parallelepipedischen Röhren, deren Axe respective parallel zu *AB* und *AF* ist, gehörend angesehen werden. Wendet man das in §. 660 Gesagte nach einander auf diese beiden Röhren, die man sich an beiden Enden offen zu denken hat, an, so wird man Resultate erhalten, die nothwendiger Weise eine mehr als genügende Dicke für die verschiedenen Wände geben werden, und zwar wird der Ueberschuß an Stärke, den die Wände auf diese Weise erhalten, um so größer sein, je kürzer die Röhren im Vergleich mit den Dimensionen ihres Querschnittes ausfallen.

Die Untersuchung des Gleichgewichtes, welches in Fällen dieser Art wirklich stattfindet, erfordert eine besondere Analyse, die hier nicht gegeben werden kann.

§. 663. Sind die Wände eines Gefäßes nicht eben, sondern cylindrisch, so läßt sich ihre Stärke mit Hülfe der Resultate bestimmen, welche im sechsten Kapitel über den Widerstand der Stäbe mit bogenförmiger Axe gefunden sind.

§. 664. Um jetzt zu den Gefäßen mit gebogenen Wänden überzugehen, betrachte man zuerst eine gerade und an beiden Enden offene Röhre, und zwar unter der Voraussetzung, daß der Druck, den die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit ausübt, für alle Punkte desselben Querschnittes constant sei, oder wenigstens ohne merklichen Fehler als constant angenommen werden könne, wie dies bei engen Röhren der Fall ist, welche zum Fortleiten von Gasen oder Wasser dienen. In der Wand einer solchen Röhre findet keine Spannung in der Richtung ihrer Länge, sondern nur in der Richtung der Querschnitte statt. Ein von zwei auf einander folgenden Querschnitten begrenztes Element der Röhre kann man als

einen Faden oder ein Band betrachten, das von Normalkräften, deren Richtungen in seiner Ebene liegen, in Anspruch genommen wird.

Diese Kräfte sind in allen Punkten dieselben, der Faden kann daher nicht anders im Gleichgewichte sein, als wenn der Krümmungshalbmesser desselben einen konstanten Werth hat. Demnach wird die Wand nur dann kein Bestreben haben, ihre Form zu ändern, wenn der Querschnitt der Röhre kreisförmig ist.

Bezeichnet man, unter Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnittes, mit  $p$  den Werth des von der Flüssigkeit auf die Einheit der Wandfläche ausgeübten Normaldruckes, so wird, wenn man ein Stück der Röhre betrachtet, dessen Länge in der Richtung der Ase gleich der Längeneinheit ist, dies  $p$  den Normaldruck auf einen Theil dieses Stückes angeben, dessen Länge in der Richtung des Umfanges ebenfalls gleich der Längeneinheit ist. Nennt man daher  $r$  den Halbmesser der Röhre, so hat man, nach §. 648,  $pr$  für die Spannung, welche in der Richtung des Umfanges stattfinden wird. Man kann demnach sagen, daß die Wand der Röhre in der Richtung der Querschnitte mit einer Kraft  $pr$  ausgedehnt wird. Man sieht hieraus, daß die Spannung, welche aus demselben innern Normaldruck resultirt, in gleichem Verhältnisse mit dem Halbmesser der Röhre zunimmt.

Bezeichnet man mit  $h$  die Dicke der Wand, welche als konstant und bedeutend kleiner als der Halbmesser  $r$  vorausgesetzt wird, und mit  $K'$  die größte Spannung, welche die Fasern für jede Flächeneinheit des Querschnittes erleiden sollen, so kann man die Wanddicke aus der Gleichung bestimmen:

$$K'h = pr.$$

§. 665. Ist der Querschnitt der Röhre nicht kreisförmig, so hat die Wand ein Bestreben, ihre Form zu ändern, und ändert sie wirklich, wenn die Röhre von einem biegsamen Gewebe gebildet wird. Besteht die Wand aus einer festen Masse, so ändert sie ihre Form nicht ganz, aber diese wird, vermöge der Elasticität des Materials, in etwas modificirt. Die Wand wird alsdann auf zwei Arten in Anspruch genommen: 1) durch die Wirkung der Formänderung, wodurch die Fasern ausgedehnt oder zusammengeedrückt werden, je nachdem sie an der convexen oder an der concaven Seite liegen, und 2) durch die Wirkung der Spannung, die in der Richtung der Querschnitte eintritt, für verschiedene Punkte eines Querschnittes verschiedene Werthe hat, und die Fasern in der ganzen Dicke der Wand auszudehnen sucht. Was die Wirkung der Formänderung anlangt, so ist sie in den meisten Fällen der Praxis von geringem Betracht; mittelst den im sechsten Kapitel entwickelten Principien wird man sie immer auffinden können.

Was die Wirkung der durch den Druck der Flüssigkeit verursachten Spannung, die gewöhnlich weit mehr zu berücksichtigen ist, betrifft, so sei  $MN$  (Fig. 171) ein Querschnitt der Röhre, wo sich dann die in dem beliebigen Punkte  $m$  desselben stattfindende Spannung auf folgende Weise bestimmen läßt. Man ziehe die Tangente  $mp$  und eine zweite, der ersten parallele Tangente  $nq$ . Beachtet man sodann, in Uebereinstimmung mit §. 651, daß die Componenten, welche sich parallel den Linien  $mp$ ,  $nq$  aus den Normaldrücken auf die Curventheile  $mMn$  oder  $mNn$  ergeben, gleich dem Drucke auf die Linie  $pq$ , welche zu  $mp$ ,  $nq$  normal ist, sein muß, so wird man die in  $m$  stattfindende Spannung erhalten, wenn man die Hälfte von dem Drucke nimmt, welchen die Flüssigkeit auf eine Wand  $pq$  ausüben würde. Die Spannung in den verschiedenen Theilen der Wand der Röhre ist demnach dem Abstände der beiden Tangenten  $mq$ ,  $nq$  proportional.

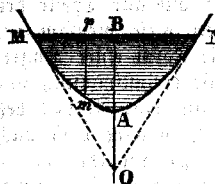


§. 666. Ist die gerade Röhre, um die es sich hier handelt, an einem Ende geschlossen, so würde der Widerstand des Bodens der Formänderung und der Vergrößerung der Querschnitte entgegenstehen, und die Wand wird minder stark in Anspruch genommen, besonders in der Nähe des geschlossenen Endes. Noch mehr wird dies bei einer an beiden Enden geschlossenen Röhre der Fall sein. Alsdann erleidet aber die Wand, vermöge des Druckes auf die beiden Bodenflächen der Röhre, auch eine Spannung in der Richtung der Seiten der cylindrischen Mantelfläche, während sie zu gleicher Zeit die Spannung in der Richtung der Querschnitte zu ertragen hat. Ist der Querschnitt der Röhre rechteckig, so hat man, unter Beibehaltung der Bezeichnungen des §. 664,  $p \cdot r^2 \pi$  für den Druck auf die beiden Bodenflächen, und folglich  $\frac{p \cdot r^2 \pi}{2r \pi}$  oder  $\frac{pr}{2}$  für die Spannung der Wand in der Richtung der Seiten des Cylinders.

Bei einem überall gleichem Drucke der Flüssigkeit ist also die Spannung in der Richtung der Seiten halb so groß, als die Spannung in der Richtung der Querschnitte. Ist der Querschnitt der Röhre nicht kreisförmig, so ist die Spannung in der Richtung der Seiten dennoch geringer, als die Spannung in der Richtung der Querschnitte.

§. 667. Es sei  $MAN$  (Fig. 172) der Querschnitt eines cylindrischen Gefäßes von unbestimmter Länge und  $MN$  sei das

Fig. 172.



Niveau einer darin enthaltenen, schweren (nicht luftförmigen) Flüssigkeit. Der Normaldruck auf einen beliebigen Punkt  $m$  des Querschnittes wird hier dem Abstände  $mp$  proportional sein. Besteht daher die Wand aus einem biegsamen Gewebe, so ist nach §. 648 die Gleichgewichtsbedingung, daß der Krümmungshalbmesser für den Punkt  $m$  dem Abstände  $mp$  umgekehrt proportional

sei, und hierdurch ist die Natur der Curve festgelegt. Durch eine Vergleichung mit dem in den §§. 77 und 86 Gesagten wird man finden, daß die Gestalt der Curve dieselbe ist, welche eine elastische Feder von homogenem Materiale und gleichförmiger Breite und Dicke annehmen würde, wenn ihre natürliche Gestalt gerade wäre und sie vermittelt einer in  $M$  und  $N$  befestigten Schnur gebogen würde. Die Spannung ist in allen dieser Curven gleich groß, und man wird den Werth dieser Spannung erhalten, wenn man sich das Gewicht der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit in  $O$  angreifend denkt und dann nach den Richtungen der beiden Tangenten  $MO$ ,  $NO$ , welche die Endpunkte der Curve berühren, zerlegt.

Es ist klar, daß nur dann Gleichgewicht vorhanden sein kann, wenn die Punkte  $M$ ,  $N$  fest sind, oder in diesen Punkten die Curve von zwei Kräften gezogen wird, deren Größe gleich der Spannung der Curve ist, und deren Richtungen die Verlängerungen der beiden genannten Tangenten sind.

§. 668. Besitzt die horizontale, cylindrische Röhre keinen Querschnitt, welcher dem Gleichgewichte entspricht, so wird die Wand, wenn diese aus einer festen Masse besteht, durch den Druck der Flüssigkeit eine geringe Biegung erleiden. Die Biegung dieser Wand, so wie die Spannung in der Richtung der Querschnitte hängen zu gleicher Zeit von der Form des Querschnittes und von der Weise ab, auf welche die Röhre unterstützt wird; in allen Fällen wird man die im sechsten Kapitel entwickelten Principien anwenden können.

§. 669. Ist eine gleiche cylindrische Röhre an beiden Enden geschlossen, so werden die Theile, welche diesen Enden nahe liegen, weniger in Anspruch genommen. Die Wand wird außerdem in der Richtung parallel zur Axe ausgedehnt. Der Werth dieser letztern Spannung muß offenbar gleich dem Drucke auf jede der beiden Bodenflächen der Röhre sein; es läßt sich aber die Vertheilung dieser Spannung auf die verschiedenen Seiten der Cylinderflächen nicht mit Genauigkeit bestimmen, wenn man nicht die gebogene Wand und die beiden Boden als einen einzigen, elastischen Körper ansehen und die Gleichgewichtsbedingungen desselben vollständig auffuchen will.

§. 670. Befindet sich eine Flüssigkeit in einem gänzlich geschlossenen Gefäße und ist der Druck derselben auf alle Theile der Wand gleich groß, so kann die Wand, wenn diese biegsam ist, nur dann im Gleichgewicht sein, wenn sie die Form einer Kugelfläche hat. Nennt man in diesem Falle in Uebereinstimmung mit den §§. 648 und 649,  $p$  den innern Druck auf eine Einheit des Flächenmaßes und  $r$  den Halbmesser der Kugel, so wird diese nach allen Richtungen gleichmäßig mit der Kraft  $\frac{1}{2}pr$  ausgedehnt, so daß, wenn  $h$  die Dicke der Wand ist, diese genügend sein wird, wenn die Gleichung besteht

$$R' h = \frac{1}{2}pr.$$

Eben so würde es sein, wenn die Wand aus einer festen Masse bestände, und von Natur die sphärische Gestalt hätte. Da der Druck der Flüssigkeit diese Gestalt nicht zu ändern sucht, so kann die Wand nur dadurch nachgeben, daß sie sich ausdehnt, und sie muß nach allen Richtungen gleichmäßig gespannt sein.

§. 671. Ist die Wand des Gefäßes nicht sphärisch, so muß dieselbe nothwendiger Weise aus einem festen Materiale gebildet sein. Der Druck der Flüssigkeit sucht ihre Form zu ändern, während sie zugleich eine Spannung bewirkt. Die Auffuchung des Gleichgewichtszustandes einer solchen Wand ist im Allgemeinen sehr verwickelt und stützt sich auf Principien, welche hier nicht entwickelt werden können. Ohne sich mit dieser Untersuchung zu befassen, wird man in der Praxis die Dicke der Wand auf eine Weise bestimmen können, welche die Sicherheit gewährt, daß die Wand dem Drucke der Flüssigkeit genügenden Widerstand leisten wird. Man denke sich hierzu, in Uebereinstimmung mit dem oben in §. 653 u. folgd. entwickelten Principien, auf der Oberfläche des Gefäßes in einer beliebigen Richtung eine Linie des kürzesten Abstandes gezogen und betrachte ein unendlich schmales Band von gleichförmiger Breite längs dieser Linie. Sieht man dieses Band als eine elastische Ruthe an, welche in jedem Punkte von Normalkräften in Anspruch genommen wird, deren Werth von dem Drucke der Flüssigkeit abhängt, so läßt sich der Biegunszustand und die Spannung dieses Bandes nach den im sechsten Kapitel entwickelten Principien ermitteln, und darnach die Stärke desselben bestimmen. Nun ist aber klar, daß wenn ein beliebiges Band, welches von dem übrigen Theile der Wand getrennt ist, den nöthigen Widerstand leisten wird, dies mit der ganzen Wand, als der Vereinigung aller einzelnen Bänder, um so mehr der Fall sein muß, da der gegenseitige Zusammenhang der Bänder nur den Widerstand vermehren kann.

§. 672. Ist z. B. die Gestalt des Gefäßes eine Umdrehungsfläche, auf welcher die Meridiane Linien des kürzesten Abstandes sind, so kann man einen dieser Meridiane oder das unendlich schmale



Wand, dessen Art es bilden würde, betrachten, und die Dicke der Wand so bestimmen, daß dieses Wand, wenn es isolirt wäre, dem Drucke der Flüssigkeit würde widerstehen können. Die Wand wird dadurch eine mehr als hinreichende Stärke erhalten. Wäre die Umdrehungsfläche eine Kugelfläche, so würde die so bestimmte Wanddicke genau das Doppelte derjenigen betragen, die wirklich nöthig wäre, wie sich dies aus §. 648 und §. 659 ergibt.

### Versuche über den Widerstand der Wände eines Gefäßes gegen den Druck einer darin enthaltenen Flüssigkeit.

§. 673. Bei einem von Mariotte <sup>1)</sup> angestellten Versuche ertrug ein Cylinder aus Weißblech den Druck einer Wassersäule von 90 Fuß Höhe, ohne zu zerbrechen. Dieser Cylinder hatte einen Fuß im Durchmesser; seine Länge ist nicht angegeben, scheint aber 1 bis 2 Fuß gewesen zu sein. An beiden Enden war der Cylinder durch zwei Kupferplatten, die mit dem Weißblech verlöthet waren, verschlossen. Nach einiger Zeit trat der Druck an einer solchen Löthstelle unter dem Drucke einer 100 Fuß hohen Wassersäule ein. Die Dicke des Weißblechs ist nicht angegeben; der Experimentator stellt aber den Widerstand dieses Materials in seinem Versuche zusammen mit dem Widerstand eines 3 Zoll breiten Bandes von Weißblech, welches eine Spannung von 120 Pfd. getragen hat.

§. 674. Bei einem andern Versuche desselben Experimentators <sup>2)</sup> ertrug ein bleiernes Gefäß in Form eines Tönnchens von 18 Zoll Länge, 1 Fuß Spundtiefe, 8 Zoll Bodentiefe und  $2\frac{1}{2}$  Linien Wanddicke, dessen Boden aus zwei Platten von demselben Materiale bestanden, den Druck einer 100 Fuß hohen Wassersäule, ohne zu zerbrechen. Die Platten bogen sich um  $1\frac{1}{2}$  Zoll durch. Nachdem das Blei in der halben Höhe des Tönnchens in einer Strecke von 6 Zoll Länge und 4 Zoll breit gefeilt und dadurch die Wanddicke in der Mitte der Feilstelle auf etwas weniger als eine Linie reducirt worden war, gab das Blei an dieser Stelle nach und es entstand ein Riß.

§. 675. Bei zwei Versuchen von Jardine in Edinburgh <sup>3)</sup> ertrug eine Bleiröhre von  $1\frac{1}{2}$  engl. Zoll Durchmesser und  $\frac{1}{8}$  Zoll Wanddicke den Druck einer 1000 Fuß hohen Wassersäule, ohne daß eine merkliche Beschädigung eintrat. Der Bruch erfolgte unter dem Drucke einer Wassersäule von 1200 Fuß Höhe. Eine ähnliche Röhre von derselben Wanddicke und 2 Zoll Durchmesser ertrug, ohne eine merkliche Beschädigung zu erhalten, den Druck einer

1) Traité du mouvement des eaux; Oeuvres de Mariotte, tome II. pag. 471.

2) Ebendasselbst.

3) Annales de chimie et de physique, mars 1826.

800 Fuß hohen Wassersäule, und der Bruch erfolgte, als die Höhe der Wassersäule 1000 Fuß betrug.

§. 676. Bei einem Versuche des Verfassers bestand ein Gefäß von fast sphärischer Gestalt aus zwei Halbkugeln von sehr gutem Schwarzblech, die durch Stifte und Löthung so mit einander verbunden waren, daß sie sich 0,01 Meter breit bedeckten. Der äußere Durchmesser des größten Kreises, in welchem die Löthung gemacht war, hielt 0,337 Meter, und der auf diesem normal stehende Durchmesser 0,323 Meter, die Wanddicke war 0,0026 Meter. Der Bruch erfolgte unter einem Drucke von 144 Kil. auf den Quadratcentimeter und zeigte sich durch einen kleinen Riß, der 0,05 Meter von der Löthstelle entfernt war.

Bei einem andern Versuche brach ein ähnliches Gefäß, dessen Durchmesser in der Richtung des größten Kreises, in welchem die Löthung gemacht war, 0,285 Meter, und in der entgegengesetzten Richtung 0,279 Meter hielt, bei einer Wanddicke von 0,0024 Meter, unter einem Drucke von 163 Kil. auf den Quadratcentimeter. Der Bruch zeigte sich gleichfalls durch einen kleinen Riß in einer Entfernung von 0,12 Meter von der Löthstelle.

§. 677. Die Resultate der Mariotte'schen Versuche lassen sich, wegen der Ungenauigkeit des ersten, und der complicirten Form des Gefäßes bei dem zweiten, nicht dem Calcul unterwerfen. Wendet man auf die beiden Versuche von Jardine die oben in §. 664 gegebene Formel an, so findet man, daß das Blei von einer Kraft von 1,37 bis 1,58 Kil. für den Quadratmillimeter zerrissen worden ist. Diese Resultate stimmen also ganz und gar mit denen der in §. 70 aufgeführten directen Versuche überein. Wendet man in gleicher Weise auf die beiden Versuche des Verfassers die in §. 670 angegebene Berechnung an, indem man den größten der beiden Durchmesser beibehält, so findet man, daß das Schwarzblech von einer Kraft von 46 bis 47 Kil. für den Quadratmillimeter zerrissen worden ist. Dieses Resultat stimmt ebenfalls mit denen der in §. 52 aufgeführten directen Versuche, welche mit Schwarzblech von geringerer Qualität angestellt wurden, überein.

## A n h a n g.

### I. Widerstand der Materialien und Zusage zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions.

§. 1. Nach dem Erscheinen des Navier'schen Werkes ist eine Reihe von sehr werthvollen Versuchen über Festigkeit der Körper, unter denen sich besonders die der Engländer Fairbairn und Hodgkinson auszeichnen, bekannt geworden, deren wichtigste Resultate hier folgen werden. Außerdem glaubte man Einiges über die Theorie vom Widerstande der Materialien gegen Stöße und Vibrationen hinzufügen zu müssen da dieser Gegenstand von Navier gar nicht berührt worden ist.

#### Versuche über den Widerstand der Materialien gegen Zerdrücken. Tragkraft von Säulen und Ständern.

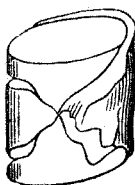
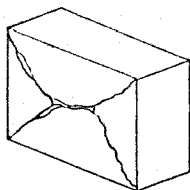
§. 2. In §. 4 dieses Werkes findet sich angegeben, daß der Widerstand der Bausteine und Ziegel gegen Zerdrücken am größten ist, wenn diese die Form von Würfeln haben, während der Widerstand geringer ausfallen soll in dem Maße, in welchem die Steine flacher oder höher sind. Schon Vicat<sup>1)</sup> hat behauptet, daß die Steine in Form von dünnen Platten einen größten Widerstand leisten, als in der Gestalt von Würfeln, und die Versuche von Hodgkinson<sup>2)</sup> haben hierüber völlige Gewissheit verschafft. Von dem letztgenannten Experimentator wurden Versuche an kurzen Prismen aus Stein, Marmor, Holz, Schmiedeeisen und besonders Gußeisen angestellt, aus denen sich ergeben hat, daß der Widerstand nahezu constant ist, wenn die verticale Länge der Prismen nicht kleiner als das Dreifache, und nicht größer als das Sechsfache ihrer Breite ist. In diesem Falle erfolgt der Bruch in Ebenen, welche nahezu einen Winkel von  $55^\circ$  mit der verticalen Axe

1) Mécanique industrielle, par Poncelet, pag. 306.

2) Seventh Report of the British Association.

bilden, indem die Prismen in keilförmige Stücke zerfallen, von denen die oberen auf dem unteren herabgleiten.

Fig. 173.



§. 3. Beträgt die Höhe der Prismen nicht mehr das Dreifache der Breite, so nimmt der Widerstand sehr bedeutend zu in dem Maße, in welchem die Höhe geringer ist. Der Bruch erfolgt nicht mehr in so regelmäßigen keilförmigen Stücken. Beträgt die Höhe der Prismen mehr als das Sechsfache der Breite, so erfolgt der Bruch theils durch Zerdrücken und theils durch Biegung (Zerknicken). Für Eisen und Holz hat Hodgkinson die folgende Tabelle gegeben, nach welcher sich der Widerstand von Säulen und vertical stehenden Balken unter der Voraussetzung berechnen läßt, daß die Höhe der Säulen groß genug ist, damit der Bruch allein durch Zerknicken erfolgen kann. Es ist

$D$  der äußere Durchmesser der Säulen oder die Seite des quadratischen Querschnittes in engl. Zoll;

$d$  der innere Durchmesser hohler Säulen, ebenfalls in Zoll;

$L$  die Länge in Fuß;

$W$  das Gewicht, welches den Bruch der Säulen und Ständer durch eine Biegung bewirkt.

Beschaffenheit der Säulen oder Balken	Beide Enden abgerundet und die Länge übertrifft den 15fachen Durchmesser <sup>2)</sup>	Beide Enden flach und die Länge übertrifft den 30fachen Durchmesser.
Massive cylindrische Säule aus Gußeisen	$W = 14,9 \frac{D^3}{L^{1,7}}$	$W = 44,16 \frac{D^{3,11}}{L^{1,7}}$
Hohle cylindrische Säule aus Gußeisen	$W = 13 \frac{D^{2,75} d^{2,75}}{L^{1,7}}$	$W = 44,34 \frac{D^{2,75} d^{2,75}}{L^{1,7}}$
Massive cylindrische Säule aus Schmiedeeisen	$W = 42,8 \frac{D^{3,75}}{L^2}$	$W = 133,75 \frac{D^{3,11}}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Danziger Fichtenholze		$W = 10,95 \frac{D^4}{L^2}$
Quadratischer Balken aus trockenem Fichtenholze (Kothtanne)		$W = 7,81 \frac{D^4}{L^2}$

1) Die folgende Zusammenstellung ist aus Rühlmann's Geostatik entnommen.

2) Die Abrundung der Enden geschah deshalb, um die Säulen dasebst drehbar machen

Für kürzere Säulen, als die Tabelle angiebt, wobei die Trennung theils durch Zudrücken, theils durch Zerknicken erfolgt, giebt Hodgkinson zur Berechnung der Belastung =  $W_2$  in Tonnen folgende Formel an, in welcher  $W$  die obige Bedeutung hat,  $W_1$  aber das Gewicht (in Tonnen) bezeichnet, welches das Zerdrücken des Körpers bewirken würde, wenn er sich nicht biegen könnte:

$$W_2 = \frac{WW_1}{W + \frac{1}{4}W_1}$$

Andere werthvolle Ergebnisse dieser Versuche sind folgende:

1) Gußeiserne Säulen, die in der Mitte verstärkt und zwar daselbst  $1\frac{1}{2}$  bis beinahe 2 Mal so dick als an ihren Enden sind, leisten gegen solche von überall gleichem Durchmesser, denselben Materiale, bei einerlei Gewicht und Länge,  $\frac{1}{4}$  mehr Widerstand, wenn ihre Enden abgerundet und  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{2}$  mehr, wenn ihre Enden gerade abgeschnitten sind.

2) Die Festigkeit von Säulen, deren eines Ende flach abgeschnitten (und unbeweglich), das andere Ende abgerundet (und beweglich) gemacht ist, ist das arithmetische Mittel zwischen der Festigkeit von Säulen, die an beiden Enden flach abgeschnitten und solcher, die an beiden Enden abgerundet sind <sup>1)</sup>.

3) Säulen, die an beiden Enden abgerundet und deren Querschnitte von der Form  $+$  sind, besitzen weniger Festigkeit als hohle cylindrische Säulen von gleichem Materiale und gleichem Gewichte. Beträchtlich größer wird die Festigkeit, wenn die Querschnitte die Form  $\text{—}$  haben, steht jedoch immer noch sehr gegen die hohler cylindrischer Säulen zurück.

## Versuche über die beste Form des Querschnitts für horizontale Balken aus Guß- und Schmiedeeisen.

§. 4. Versuche über die zweckmäßigste Gestalt horizontaler Balken sind an Gußeisen von Hodgkinson <sup>1)</sup> angestellt worden. Bei den Experimenten wurde von der Querschnittsform ausgegangen, welche

zu können, etwa so, als wenn sie um ein Gelenk beweglich wären. Als Ventstangen bei Dampfmaschinen und Pumpen, bei eisernen Dächern u. finden dergleichen um Bassen oder Bolzen bewegliche eiserne Balken praktische Anwendung. Die Säulen mit ganz flach abgeschnittenen Enden waren beim Versuche völlig unbeweglich gemacht oder ganz festgestellt.

- 1) Anwendungen hiervon bieten die meisten Kolbenstangen, auch gilt dieser Erfahrungssatz nicht bloß, wenn das Material Gußeisen ist, sondern auch für Schmiedeeisen, Stahl und Holz.
- 2) Memoirs of the philosophical society of Manchester, vol. V., oder auch The Mechanical Principles of Engineering and Architecture by H. Moseley. Deutsch v. Scheffler.

Fig. 188.



bereits im §. 494 betrachtet wurde. In dieser Figur sind die beiden Rechtecke welche unten und oben liegen einander gleich, was aber nur dann zweckmäßig sein kann, wenn man ein Material anwenden will, welches der Ausdehnung und dem Zusammendrücken einen gleichen Widerstand entgegensetzt. Da aber bekanntlich der Widerstand des Gußeisens gegen Ausdehnung und Zerreißen weit geringer ist, als gegen Zusammendrücken, so liegt der Gedanke nahe, die untere Flansche solcher Balken stärker zu machen, als die obere. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Versuche, welche mit Balken derartigen Querschnittes angestellt wurden. Der Balken wurde auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet.

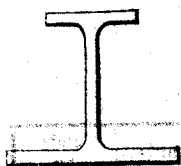
Nummer des Versuches	Verhältniß der beiden Flanschen zu einander	Fläche des ganzen Querschnittes in Quadrat Zoll (englisch)	Brechende Kraft für den Quadrat Zoll des Querschnittes in Pfunden (englisch)
1.	1 : 1	2,82	2368
2.	1 : 2	2,87	2567
3.	1 : 4	3,02	2737
4.	1 : 4,5	3,37	3183
5.	1 : 5,5	5,0	3346
6.	1 : 6,1	6,4	4075

Bei den ersten fünf Versuchen brach der Balken in Folge des Zerreißens der unteren Flansche. Die Vertheilung, bei welcher beide Flanschen zugleich nachgaben, d. i. die Vertheilung von der größten Stärke, war demnach bis dahin noch nicht erreicht. Zuletzt indessen, bei dem sechsten Versuche, brach der Balken in Folge der Zerdrückung der oberen Flansche. Bei diesem Versuche war also die obere Flansche die schwächere und die untere die stärkere, während bei dem vorhergehenden Versuche noch die untere Flansche die schwächere war.

Hieraus folgt, daß für eine zwischen den letzten beiden liegende Form die Flanschen eine gleiche Widerstandsfähigkeit resp. gegen das Zerdrücken und gegen das Zerreißen besaßen, und Dies war die stärkste Form des Querschnittes.

Bei dieser stärksten Form enthielt die untere Flansche sechsmal

so viel Material, als die obere. Dieselbe ist in der feirstehenden Fig. 175.



Figur dargestellt. Durch die beste Form von gußeisernen Balken war vor diesen Versuchen nie eine größere Stärke, als 2885 Pfd. (englisch) für den Quadrat Zoll des Querschnittes erreicht. Es war mithin bei jener Form ein Gewinn von 1190 Pfd. für den Quadrat Zoll des Querschnittes oder von  $\frac{1}{2}$  der Stärke des ganzen Balkens.

Man sieht auch, daß das Verhältniß 1 : 6 der Flanschen von der stärksten Form nahezu dem Verhältnisse der absoluten zu der rückwirkenden Festigkeit des Gußeisens entspricht.

§. 5. Um die Tragfähigkeit solcher Balken zu berechnen giebt Hodgkinson folgende Regel: Ist

$A$  der Inhalt der Querschnittsfläche der unteren Flansche in engl. Quadrat Zoll,

$d$  die Höhe des Balkens in Zoll,

$l$  die Entfernung zwischen den beiden Stützen, ebenfalls in Zoll,

$P$  das Gewicht in engl. Centnern, welches den Bruch herbeibringt, wenn es in der Mitte aufgelegt wird ist

$$P = 514 \frac{Ad}{l} \text{ für horizontal geöffnete}$$

$$P = 536 \frac{Ad}{l} \text{ für vertical geöffnete Balken.}$$

§. 6. Versuche über die zweckmäßigste Querschnittsform von schmiedeeisernen Balken wurden vor der Erbauung der Britannia-Brücke von Fairbairn<sup>1)</sup> angestellt. Die Balken, welche alle hohl und aus etwa  $\frac{1}{2}$  engl. Zoll dickem Eisenblech zusammengenietet waren, wurden mit den Enden auf zwei Stützen gelegt und in der Mitte belastet. Der Querschnitt war zuerst theils kreisförmig, theils cylindrisch und bei den späteren Versuchen rechteckig.

1) An account of the construction of the Britannia and Conway Tubular Bridges, by W. Fairbairn.

bestimmte Maß an der Länge der Röhren, und die in der Tabelle angegebenen Gewichte sind die Gewichte der Röhren, welche bei der angegebenen Länge und dem angegebenen Durchmesser die angegebenen Verhältnisse der beiden vorigen Gewichte haben. Die Röhren sind aus Eisenblech gefertigt, und die angegebenen Gewichte sind die Gewichte der Röhren, welche bei der angegebenen Länge und dem angegebenen Durchmesser die angegebenen Verhältnisse der beiden vorigen Gewichte haben.

### Röhren kreisförmigen Querschnittes.

Entfernung der Stützpunkte		Gewicht der Röhren	Gewicht, das den Bruch bewirkte	Verhältniß beider vorigen Gewichte	Durch- messer	Dicke der Platten
Fuß	Zoll	Pfund	Pfund		Zoll	Zoll
17	0	102	3040	1 : 29,0	12,18	0,03 4
17	0	107	2704	1 : 25,2	12,00	0,03 7
15	7½	392	11440	1 : 29,1	12,40	0,131
23	5	334	6400	1 : 19,1	18,26	0,058
23	5	346	6400	1 : 18,5	17,68	0,063
23	5	777	14240	1 : 18,3	18,18	0,119
31	3½	907	9760	1 : 10,7	24,10	0,095
31	3½	1385	14240	1 : 10,2	24,30	0,095
31	3½	1005	10880	1 : 10,8	24,20	0,135

### Röhren elliptischen Querschnittes.

Entfernung der Stützpunkte		Gewicht der Röhren	Gewicht zum Zerbrechen	Verhältniß beider vorigen Gewichte	Höhe der Röhren	Breite der Röhren
Fuß	Zoll	Pfund	Pfund		Zoll	Zoll
17	0	109	2100	1 : 19,2	14,62	9,25
24	0	708	17076	1 : 24,1	21,66	13,50
24	0	357	7714	1 : 21,7	21,25	14,12
18	6	232	6867	1 : 29,6	12,00	7,50
18	6	232	5648	1 : 24,3	12,00	7,50
17	6	374	15490	1 : 40,0	15,00	97,5

### Röhren rechteckigen Querschnittes.

Entfernung der Stützpunkte		Gewicht der Röhren	Gewicht zum Zerbrechen	Verhältniß beider vorigen Gewichte	Höhe der Röhren	Breite der Röhren
Fuß	Zoll	Pfund	Pfund		Zoll	Zoll
17	6	202	3738	1 : 18	9,6	9,6
17	6	384	8273	1 : 21	9,6	9,6
17	6	255	3788	1 : 14	9,6	9,6
17	6	255	7148	1 : 28	9,6	12,0
17	6	317	6812	1 : 21	18,25	9,25
17	6	317	12188	1 : 38	18,25	9,2
24	0	788	17600	1 : 22	15,0	2,25
18	6	267	8812	1 : 33	13,0	8,0
19	0	500	22469	1 : 50	15,4	7,75

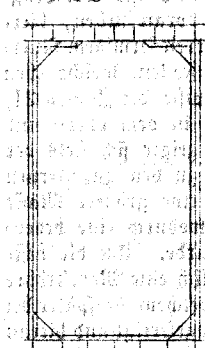


§. 7. Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß in Hinsicht der Tragkraft die Röhren mit rechteckigem Querschnitte voran stehen, hierauf die elliptischen folgen, und endlich die mit kreisförmigem Querschnitte. Fairbairn giebt an, daß in den drei Fällen, welche eben genannt worden, die Tragkräfte in dem Verhältnisse der Zahlen 21, 13, 13 stehen. Als die Masse des Materials in dem obern und untern Theile der Röhren gleich groß war, zeigte sich stets der obere Theil zu schwach, ganz im Gegensatze zu den gußeisernen Balken. Es wurde daher dem obern Theile eine größere Masse und eine zellenförmige Anordnung gegeben, wodurch eine bedeutende Vermehrung des Widerstandes erreicht wurde. Um die beste Vertheilung der Masse zu erfahren, wurde endlich eine Modellröhre genau in  $\frac{1}{6}$  der Länge, Breite und Höhe, in welchem sie später bei der Conway-Brücke verwandt werden sollten, angefertigt und hieran der untere Theil zuerst viel zu schwach gemacht, und allmählich verstärkt, bis das beste Verhältniß der Vertheilung der Masse ausgemittelt war.

Resultate der Versuche mit der Modellröhre.

Entfernung der Stützpunkte		Höhe der Röhre		Breite der Röhre		Dicke der Platten		Gewicht zum Brechen	Bemerkungen
						unten	oben		
Fuß	Zoll	Fuß	Zoll	Fuß	Zoll	Querschnitts- fläche in □"	Querschnitts- fläche in □"	Pfund	
75	0	4	6	2	11	24,02	8,80	79576	unten zerrissen
75	0	4	6	2	11	24,02	12,80	97102	verdreht
75	0	4	6	2	11	24,02	12,80	126128	unten zerrissen
75	0	4	6	2	11	24,02	17,80	148129	desgl.
75	0	4	6	2	11	24,02	22,45	129009	das Gewicht blieb einige Zeit darauf, dann wurde die Röhre auf die Seite gelegt
75	0	4	6	2	11	—	—	26781	die Röhre lag auf der Seite
75	0	4	6	2	11	24,02	22,45	135255	dies Gewicht blieb 9 Tage hängen
75	0	4	6	2	11	24,02	22,45	135255	unten zerrissen
75	0	4	6	2	11	24,02	22,45	154452	desgl.
75	0	4	6	2	11	24,02	22,45	192892	oben gedrückt

Fig. 176.



Die Querschnittsform, welche schließlich adoptirt wurde, ist in der stehenden Figur dargestellt. Die Masse des obern Theiles verhält sich zu der in dem untern Theile wie 5 zu 4.

§. 7<sup>a</sup>. Folgende Angaben über die Tragkraft horizontal belasteter Balken aus Guß- und Schmiedereisen, welche das gemeinschaftliche Resultat der zahlreichen Versuche von Robert Stephenson, W. Fairbairn und G. Hodgkinson sind, entnehmen wir dem Werke von Clark: The Britannia and Conway Tubular Bridges, London 1850.

Drückt man, unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen in §. 5, das Bruchgewicht  $P$  in engl. Tonnen aus, so hat man allgemein

$$P = p \cdot \frac{Ad}{T},$$

wo  $p$  eine Constante ist, welche dem Materiale und der Querschnittsform eigenthümlich zugehört, und die folgenden Werthe hat:

Gußstahl	10.000	10.000	10.000	10.000
Gußeisen	10.000	10.000	10.000	10.000
Stahl	10.000	10.000	10.000	10.000
Eisen	10.000	10.000	10.000	10.000
Stahl	10.000	10.000	10.000	10.000
Eisen	10.000	10.000	10.000	10.000
Stahl	10.000	10.000	10.000	10.000
Eisen	10.000	10.000	10.000	10.000
Stahl	10.000	10.000	10.000	10.000
Eisen	10.000	10.000	10.000	10.000

Querschnittsform	Material	P
<b>Schmiedeeisen</b>		
Röhren rechteckigen Querschnittes, oben und unten aus dünnen Platten und mit dünnen Seiten, wie bei der Britannia-Brücke		26,7
Röhren rechteckigen Querschnittes von gleichförmiger Dicke		23,5
Desgl. elliptischen Querschnittes	desgl.	22,3
Desgl. kreisförmigen Querschnittes	desgl.	20,9
Neues Stabeisen rechteckigen Querschnittes		15,3
Ausgerecktes Stabeisen	desgl.	22,3
Neues Rundeisen		9,0
<b>Gusseisen</b>		
Röhren rechteckigen Querschnittes von gleichförmiger Dicke		10,96
Desgl. elliptischen Querschnittes	desgl.	12,01
Desgl. kreisförmigen Querschnittes	desgl.	11,42
Desgl. quadratischen Querschnittes	desgl.	13,67
Kleine Barren rechteckigen Querschnittes		13,6
Große Barren	desgl.	9,0
Kleine Barren kreisförmigen Querschnittes		8,0
Ballen rechteckigen Querschnittes, aus Fichtenholz		1,45

Ist  $A$  der Querschnittsinhalt der untern Flansche eines Balkens von der Form Fig. 175 im §. 4 oder einer Röhre, so ist

für Schmiedeeisen  $P = \frac{Ad}{l} \cdot 74,4$  Tonnen.

für Gusseisen  $P = \frac{Ad}{l} \cdot 26$  Tonnen.

### Versuche über den Einfluß der Zeit und der Temperatur auf den Widerstand der Materialien.

§. 8. Es ist längst bekannt, daß, wenn die Materialien über eine gewisse Grenze hinaus belastet werden und der Bruch auch nicht unmittelbar erfolgt, doch die Beschädigungen allmählich zunehmen und den Bruch nach Verlauf einer gewissen Zeit herbeiführen. Versuche über die mit der Zeit stattfindende Zunahme der Beschädigungen sind von Fairbairn<sup>1)</sup> mit gußeisernen Stäben, welche alle fast genau 1 engl. Zoll ins Gevierte hielten, angestellt worden. Die Stäbe wurden auf zwei Stützen gelegt, welche 4 Fuß 6 Zoll von einander abstanden, und zuerst mit geringern und allmählich immer größeren Gewichten belastet, wobei die Durchbiegung beobachtet wurde. Sodann wurden die Stäbe mit einem beträchtlichen Gewichte ( $\frac{2}{3}$  bis  $\frac{7}{8}$  desjenigen, welches den Bruch bewirkt haben würde) belastet und die allmählich zunehmende Durchbiegung vom März 1837 bis zum Juni 1838 beobachtet. Das Eisen war theils mit Anwendung von heißer, theils mit Anwendung von kalter Gebläseluft im Hochofen gewonnen. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

1) Seventh Report of the British Association. Die Zusammenstellung in den französ. Wäsen ist aus dem Werke von Combes: *Exploitation des mines* entnommen.

# Tabelle I. Abstand der Stützen: 1,372 Meter. Bleibende Belastung: 126,95 Kilogramm.

Gußeisen Nr. 2 mit kalter Luft			Temperatur im Augenblicke der Beobachtung	Tag der Beobachtung	Gußeisen Nr. 2 mit kalter Luft			Bemerkungen
Belastung	Beobachtete Durchbiegung	Bleibende Durchbiegung nach der Entlastung			Höhe des Stabes . . .	Breite = . . .	Bleibende Durchbiegung nach der Entlastung	
Kilogr.	Millimeter	Millimeter	Centesim. Grade		Kilogr.	Millimeter	Millimeter	
25,39	3,658	0,508			25,39	3,886		Die Zunahme der Durchbiegung vom 11. März 1837 bis zum 23. Juni 1838 betrug für das Gußeisen mit kalter Luft 0,838 und für das Gußeisen mit heißer Luft 1,092 Millimeter. Der Wechsel der Temperatur hat zum Theil hierzu mit beigetragen
50,78	7,849				50,78	8,560	0,559	
76,17	12,675				76,17	13,819	2,024	
101,56	17,983	1,905			101,56	19,914	3,353	
126,95	23,266	2,743		9. März 1837	126,95	26,492		
"	23,622			11. März	"	27,026		
"	23,673			17. März	"	27,102		
"	23,622			15. April	"	27,381		
"	23,673			31. Mai	"	27,483		
"	23,800			22. August	"	27,584		
"	23,927			18. November	"	27,686		
"	23,902			8. Januar 1838	"	27,681		
"	23,993			12. März	"	27,686		
"	23,460			23. Juni	"	28,118		

## Tabelle II.

Abstand der Stützen: 1,372 Meter. Gleitende Belastung: 152,34 Kilogramm.

Gusseisen Str. 2 mit kalter Luft Höhe des Stabes . . . 0m,02591 Breite = . . . 0m,02616			Temperatur im Augenblicke der Beobachtung	Tag der Beobachtung	Gusseisen Str. 2 mit heißer Luft Höhe des Stabes . . . 0m,02591 Breite = . . . 0m,02642			Bemerkungen.
Belastung	Durchbiegung	Gleitende Durchbiegung nach der Entlastung			Belastung	Durchbiegung	Gleitende Durchbiegung nach der Entlastung	
Kilogr.	Millimeter	Millimeter	Cent. Grade		Kilogr.	Millimeter	Millimeter	
25,39	3,619	0,7112	9 <sup>4</sup> / <sub>10</sub>	6. März 1837	25,39	4,064	0,6604	Die Zursahme der Durchbiegung vom 11. März 1837 bis zum 23. Juni 1838 betrug für das Gusseisen mit kalter Luft 1,168, und für das Gusseisen mit heißer Luft 1,956 Millimeter.
50,78	8,077	2,184	9 <sup>4</sup> / <sub>10</sub>	9. März	50,78	8,788	2,337	Die Erhöhung der Temperatur hat zum Theil hierzu mit beigetragen.
76,17	13,081	4,878	9 <sup>4</sup> / <sub>10</sub>	11. März	76,17	14,402	5,3848	
101,56	18,593		8 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	17. März	101,56	20,549		
126,95	24,409		16 <sup>3</sup> / <sub>10</sub>	15. April	126,95	27,356		
152,34	31,013		21 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	31. Mai	152,34	34,900		
"	32,182		16 <sup>3</sup> / <sub>10</sub>	22. August	"	36,932		
"	32,258		7 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	18. November	"	37,109		
"	32,258		3 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	8. Januar 1838	"	37,134		
"	32,283		10 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	12. März	"	37,465		
"	32,283		25 <sup>1</sup> / <sub>10</sub>	23. Juni	"	37,617		
"	32,359				"	38,122		
"	32,715				"	38,075		
"	32,664				"	38,151		
"	33,715				"	38,227		
"	32,969				"	39,065		
"	33,426				"			

**Table III.**  
**Abstand der Stützen: 1,372 Meter. Gleibende Belastung: 177,73 Kilogramm.**

Gußeisen Nr. 2.		Mit kalter Luft		Tag der Beobachtung	Temperatur im Augenblicke der Beobachtung	Gußeisen Nr. 2.		Bemerkungen
Höhe des Stabes	Breite =	Höhe des Stabes	Breite =			Höhe des Stabes	Breite =	
0m,0262	0m,0259	0m,0262	0m,0254			0m,0267	0m,0254	
Beobachtete Durchbiegung	Beobachtete Durchbiegung	Beobachtete Durchbiegung	Beobachtete Durchbiegung			Beobachtete Durchbiegung	Beobachtete Durchbiegung	Die Zunahme der Durchbiegung v. 6. März 1837 bis zum 23. Juni 1838 betrug für das Gußeisen mit kalter Luft 3,556, und für das Gußeisen mit heißer Luft 2,235 Millimeter.
Millimeter	Millimeter	Millimeter	Millimeter			Millimeter	Millimeter	
3,886	0,127	3,810	0,584			3,810	0,584	
8,494	0,559	50,78	2,261			8,467	2,189	
13,741						13,995	5,075	
19,533						19,685	6,904	
25,730						26,137		
32,868	5,077					33,299		
41,046	7,417					41,529		
42,774		6. März 1837				43,561		
43,028		9. März				44,653		
43,028		11. März				44,704		
43,028		17. März				44,780		
43,586		15. April				44,882		
43,815		31. Mai				44,085		
44,120		22. August				44,288		
43,790		18. November				44,034		
43,739		8. Jan. 1838				44,034		
45,745		12. Mai				44,313		
46,330		23. Juni				45,796		

Tabelle IV. Abstand der Stützen: 1,372 Meter. Bleibende Belastung: 203,12 Kilogramm.

Gusseisen Nr. 2. Mit kalter Luft.									
Grüßer Stab					3weiter Stab				
Höhe	0m,0254				Höhe	0m,0259			
Breite	0m,0257				Breite	0m,0262			
Belastung	Probach- tete Durch- biegung	Bleibende Durchbiegung nach der Entlastung			Belastung	Probach- tete Durch- biegung	Bleibende Durchbiegung nach der Entlastung		
		Millim.	Millim.	Millim.			Millim.	Millim.	Millim.
25,39	3,937	—	0,533	—	25,39	3,277	—	0,229	—
50,78	8,467	—	—	—	50,77	6,706	—	—	—
76,17	13,614	—	—	—	76,17	10,566	—	—	—
101,56	19,177	—	1,930	—	101,58	14,661	—	0,991	—
126,95	25,197	—	—	—	126,95	19,152	—	—	—
152,34	32,055	—	4,242	—	152,34	23,724	—	2,210	—
177,73	39,522	—	—	—	177,73	28,727	—	—	—
203,12	48,362	—	—	—	203,12	34,569	—	4,870	—
"	49,886	10,262	—	—	"	35,814	—	—	—
"	50,927	—	—	—	"	35,890	—	—	—
"	50,927	—	—	—	"	35,890	—	—	—
"	51,054	—	—	—	"	35,890	—	—	—
"	51,157	—	—	—	"	—	—	—	—
Der Stab brach, nachdem er die Belastung während 37 Tage getragen hatte.									
Tag der Beobachtung					Temperatur im Augenblicke der Beobachtung				
					Grad. C.				
6. März 1837					—				
9. "					9 1/2				
11. "					9 1/2				
17. "					9 1/2				
15. April					8 1/2				
31. Mai					16 1/2				
22. Aug.					21 1/2				
18. Novbr.					7 1/2				
8. Jan. 1838					3 1/2				
12. März					10 1/2				
23. Juni					25 1/2				

Gusseisen Nr. 2. Mit heißer Luft.  
Höhe des Stabes . . . 0m,0264  
Breite . . . 0m,0257

Probach-  
tete  
Durch-  
biegung

Millim.

25,39

4,191

50,78

9,144

76,17

14,707

101,56

21,057

126,95

—

152,34

36,043

177,73

Brach

Millim.

—

0,635

—

2,184

—

5,283

—

—

—

—

—

Mehrere andere Stäbe aus  
ähnlichem Gusseisen brachen  
sofort, als sie mit dem Ge-  
wichte 203,12 Kil. belastet  
wurden.

§. 9. Was den Einfluß der Temperatur anlangt, so haben die Versuche von Fairbairn<sup>1)</sup> hinsichtlich des Gußeisens die folgenden Resultate geliefert:

1. Der Widerstand ist für Temperaturen unter dem Nullpunkte des hunderttheiligen Thermometers desto geringer, je tiefer die Temperatur ist.

2. Der Widerstand ist in der Nähe von 0 Grad am größten, und wird wieder geringer, wenn die Temperatur bis zu der Wärme des kochenden Wassers steigt.

3. Von dieser letzten Grenze (100°) bis 315° wird der Widerstand wieder größer in dem Maße, in welchem die Temperatur steigt.

5. Der Widerstand des Gußeisens, wenn es sich in dunkler Rothglüh Hitze befindet, ist um 12 bis 13% geringer, als bei gewöhnlicher Temperatur.

§. 10. Aus Versuchen, welche von einer Commission des Franklin-Institutes<sup>2)</sup> in Philadelphia über den Widerstand, den das Stabeisen und das Kupferblech gegen das Zerreißen bei verschiedenen Temperaturen leisten, angestellt wurden, haben sich die folgenden Resultate ergeben.

1. Der Widerstand des Schmiedeeisens ist bei einer höheren Temperatur, die aber nicht über 300° C. beträgt, größer, als bei der gewöhnlichen Temperatur von 10 bis 20°. Der größte Widerstand findet bei einer Temperatur statt, welche nicht genau ermittelt werden konnte, aber jedenfalls unter 288° liegt. Dieser Maximalwiderstand ist um etwa 15% größer als der gewöhnliche Widerstand bei 15, 20 oder auch 27°.

2. Bei höheren Temperaturen nimmt der Widerstand des Schmiedeeisens sehr rasch ab, und ist für 525° nur noch  $\frac{2}{3}$  und für 700° nur noch  $\frac{1}{3}$  des ursprünglichen. (Nach denselben Experimentatoren liegt die Temperatur der dunkeln Rothglüh Hitze zwischen 617 und 664°, und das beim Tageslichte sichtbare Glühen tritt bei ungefähr 674° ein.)

3. Der Widerstand des Kupferbleches gegen Zerreißen ist für alle Temperaturen über 0° desto geringer, je höher die Temperatur ist. Bei 280° ist der Widerstand nur noch  $\frac{3}{4}$ , bei 430° nur noch  $\frac{1}{2}$  und bei 555° Gr. nur noch  $\frac{1}{3}$  von demjenigen, welcher bei 0° stattfindet. Das Gesetz der Verminderung des Widerstandes läßt sich ziemlich genau durch die Formel

$$d^2 = At^3$$

ausdrücken, wo  $d$  die in Rede stehende Verminderung in Theilen

1) *Traité de l'exploitation des mines*, 1. Band p. 575.

2) *Journal of the Franklin Institute*, 19. und 20. Band.



des Widerstandes bei  $0^{\circ}$ ,  $\alpha$  die Temperatur über  $0^{\circ}$  und  $A$  ein numerischer Coefficient ist, dessen Werth von der Einrichtung der Thermometerscala abhängt. Für Centesimal-Grade ist

$$A=0,000\ 000\ 002\ 916.$$

### Versuche über den Widerstand der Eisenstränge gegen Ausdehnung.

§. 11. Die folgende Tabelle enthält die mittleren Resultate der von Herrn Fabrik-Commissions-Rath Bri r<sup>1)</sup> angestellten Versuche.

- 1) Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitäts-Verhältnisse einiger ac. Eisenstränge. Die folgende Zusammenstellung in französ. Maßen ist dem *Traité de l'exploitation des mines* von Combès entnommen.

Bestimmung der Drähte	Durchmesser der Drähte	Querschnitt der Drähte	Gewicht der Drähte für den laufenden Meter	Kleinste Befestigung, durch welche eine bleibende Glasbe- haltung bewerkstelligt werden kann, auf den Quadrantenmeter	Spezialmeter @Einheits- maß, be- zogen auf den Quadranten- meter	Gewicht, welches die Drähte je Längeneinheit auf den Qua- drantenmeter	Verhältnis der Klein- sten Befestigung, durch welche eine bleibende Glasbehaltung bewerk- stelligt werden kann, zu bestimmten Gewichten, durch welche die Drähte je Längeneinheit auf den Quadrantenmeter
Seidendraht, Nr. 9, nicht geglättet	3,337	8,8473	0,0702	33,28	20186	67,50	0,403
Seidendraht, vorher geglättet	3,337	8,8473	0,0702	25,42	19679	43,60	0,583
Stahldraht, Nr. 10, nicht geglättet	2,79	6,1123	0,0501	37,90	21132	73,60	0,515
Seidendraht, vorher geglättet	2,79	6,1123	0,0501	27,93	21034	43,30	0,645
Seidendraht, Nr. 7, nicht geglättet	3,14	7,7358	0,0609	34,08	21026	64,30	0,530
Stahldraht, Nr. 8, nicht geglättet	2,834	6,3046	0,0511	37,61	20530	69,90	0,538
Seidendraht, Nr. 11 nicht geglättet	2,987	7,002	0,0571	34,41	20944	68,0	0,596
Seidendraht, Nr. 11½ nicht geglättet	2,534	6,3046	0,05185	38,96	21245	76,1	0,512
Stahldraht, Nr. 18 nicht geglättet	2,965	6,9002	0,0553	36,28	20174	73,60	0,493
Seidendraht, be- gegelt	2,987	7,002	0,0560	35,04	19015	73,30	0,478
Stahldraht, be- gegelt	2,943	6,7991	0,0557	38,87	20050	74,60	0,521
Seidendraht, be- gegelt	2,987	7,002	0,0587	35,12	20560	70,10	0,501
Stahldraht, Nr. 18, nicht geglättet	3,052	7,3121	0,0626	41,69	19936	88,60	0,407
Seidendraht, Nr. 11, nicht geglättet	2,987	7,002	0,0553	32,93	18943	68,90	0,478

Was die Beziehung zwischen den Belastungen und den dadurch bewirkten Ausdehnungen anlangt, so ergiebt sich mit ziemlicher Genauigkeit das von Gerstner aufgestellte Gesetz, daß die Differenzen zwischen der Ausdehnung, welche von einem bestimmten Ge-

wichte während der Belastung verursacht wird, und derjenigen welche noch nach der Entlastung bestehen bleibt, zu dem in Rede stehenden Gewichte in einem constanten Verhältnisse steht.

Durch die Wirkung des Ausglühens wird nach diesen Versuchen die Elasticität des Drathes nicht merklich vermindert, wohl aber die Festigkeit desselben. Ardant<sup>1)</sup> dagegen hat aus Versuchen mit Dräthen von 1,20 Millimeter Durchmesser für den Elasticitätsmodul, bezogen auf den Quadratmillimeter, gefunden

für Eisendrath, nicht geglühet:  $E = 18300 \text{ Kil.}$

desgl. vorher geglühet:  $E = 17000$

### Versuche über die Tragkraft von Drath- und Hanfseilen und Kettentauen.

§. 12. Nach den Mittheilungen des Hrn. Maschinenmeister Braundorf<sup>2)</sup> bestehen die Treibeseile der meisten Freiburger Goppel aus Eisendräthen von Nr. 18, welche genau gemessen 3,162 bis 3,347, und gewöhnlich 3,3 Millimeter im Durchmesser halten. Mit einem 16fädigen Seile, dessen Gewicht incl. Kitt 1,1 Kil. per laufenden Meter beträgt, sind seit mehreren Jahren Lasten von 925 Kil. aus einer saigern Förderteufe von 400 Meter heraufgezogen worden. Zieht man das eigne Gewicht dieses Seiles von 440 Kil. mit in Betracht, so ergiebt sich das Maximum der Belastung zu 1365 Kil.

Wird die Tragkraft des guten Drathes bei 3,3 Millimeter Stärke, den gemachten Erfahrungen gemäß, durchschnittlich zu 500 Kil. gerechnet, so trägt, allgemein angenommen, Drath von  $a$  Millimeter Stärke durchschnittlich  $45,913 \cdot a^2 \text{ Kil.}$ , und ein aus solchem Drath und aus  $n$  Fäden bestehendes kurzes Seilstück trägt mit siebenfacher Sicherheit eine Last  $P$  von nahe

$$P = 6,559 \cdot na^2 \text{ Kil.}$$

Bei größerer Länge und saigerer Förderteufe muß das eigne Gewicht des Seiles mit in Betracht gezogen werden und da dieses nahe genug gleich  $0,00633 \cdot na^2 S \text{ Kil.}$  gesetzt werden kann, wenn durch  $S$  die in Metern ausgedrückte Förderteufe bezeichnet wird, so hat man

$$6,559 \cdot na^2 = 0,00633 \cdot na^2 S + P,$$

woraus

$$na^2 = \frac{P}{6,559 - 0,00633 \cdot S}$$

§. 13. Folgende Tabelle enthält die Durchschnitts-Resultate von 300

1) Mécanique industrielle, par Poncelet.

2) Freiburger Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann, 1842.

in England angestellten Zerkleinerungs-Versuchen, welche Patent-Hanf-  
taue und gemeine (nach alter Art durch Handarbeit dargestellte)  
Tae, sämmtlich getheert, betrafen. Zur Vergleichung sind hier  
alle Ergebnisse auf den kreisförmigen Querschnitt von 1 engl. Zoll  
Umfang berechnet<sup>1)</sup>.

Dimen- sionen der Tae	Tae nach alter Art					Patent-Tae			
	Querschnitt Umfang	Gewöhnliche		Vom besten Pe- tersb. Hanf		Kalt registirt		Warm registirt	
		Gewöhnliche des Ge- webe nicht	Umfang be- rechnet für 1 Zoll	Gewöhnliche des Ge- webe nicht	Umfang be- rechnet für 1 Zoll	Gewöhnliche des Ge- webe nicht	Umfang be- rechnet für 1 Zoll	Gewöhnliche des Ge- webe nicht	Umfang be- rechnet für 1 Zoll
	Engl. Zoll	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund	Engl. Pfund
3	0,95	5050	561	6030	670	7380	935	8640	960
3½	1,11	6784	554	8669	707	11165	911	11760	906
4	1,27	8768	548	10454	653	13108	819	15360	960
4½	1,43	10308	504	12440	614	16325	806	19440	960
5	1,59	13250	530	15775	631	20500	820	24000	960
5½	1,75	15488	512	18604	614	24805	820	29040	960
6	1,91	18144	504	21616	600	24520	820	33120	920
6½	2,07	20533	486	23623	559	34645	820	40554	959
7	2,24	22932	468	27342	558	40188	819	47040	960
7½	2,39	24975	444	30757	546	46125	820	54000	960
8	2,54	26880	421	32000	500	52480	820	61430	960

Man ersieht hieraus einerseits, daß — für gleiche Querschnitts-  
flächen — die nach alter Art mit der Hand gearbeiteten Tae bei  
zunehmender Dike geringere Festigkeit zeigen, während die Patent-  
Tae in allen Dicken sich als gleich fest offenbaren; andrerseits,  
daß die warm registirten Patent-Tae um 15 bis 16% mehr  
Stärke besitzen, als die kalt registirten.

§. 14. Die folgende Tabelle enthält eine vergleichende Zusammen-  
stellung über die Stärke, das Gewicht und den Preis von Drahtseilen,  
Hanfseilen und eisernen Kettentauen, wenn diese gleiche Trag-  
fähigkeit besitzen sollen. Sie ist nach Versuchen berechnet, welche  
auf Befehl der engl. Admiralität angestellt wurden<sup>2)</sup>.

1) Papers on Subjects connected with the Duties of the Corps of Royal Engineers,  
Vol. V.

2) Precht, technologische Encyclopädie Bd. 19, pag. 536.

Belastung, bei welcher die Seile zerreißen, Engl. Pfund	Gattungen der Seile	Umfang der Hanf- und Drathseile; Dicke des Rund- eisens bei den Ketten	Gewicht von 1 Faden = 6 engl. Fuß in engl. Pfund (1 Pfund = 16 Unzen)	Preis von 1 Faden in Schilling und Pence
2240 (1 Tonne)	Drathseil Hanfseil Kettentau	1 Zoll engl. 2 " $\frac{1}{4}$ "	— Pf. 12 U. 1 " 1 " 3 " — "	— Sch. 5 P. 5 $\frac{1}{2}$ " 6 "
17920 (8 Tonnen)	D. H. K.	2 " 5 " $\frac{1}{2}$ "	2 " 10 " 6 " — " 16 " — "	1 " 6 " 7 $\frac{1}{2}$ " — "
26880 (12 Tonnen)	D. H. K.	2 $\frac{1}{2}$ " 7 " $\frac{11}{16}$ "	4 " 8 " 12 " 3 " 27 " — "	2 " 5 $\frac{1}{2}$ " 5 " 4 " 6 " — "
35840 (16 Tonnen)	D. H. K.	3 " 8 " $\frac{13}{16}$ "	6 " 12 " 14 " 3 " 37 " — "	3 " 7 $\frac{1}{2}$ " 6 " 2 $\frac{1}{2}$ " 8 " — "
44800 (20 Tonnen)	D. H. K.	3 $\frac{1}{2}$ " 9 " $\frac{15}{16}$ "	9 " 4 " 19 " 6 " 46 " — "	5 " — " 8 " 3 " 9 " 7 "
53760 (24 Tonnen)	D. H. K.	4 " 10 " $\frac{17}{16}$ "	12 " 4 " 25 " — " 53 " — "	6 " 7 $\frac{1}{2}$ " 10 " 11 $\frac{1}{4}$ " 10 " 10 $\frac{1}{2}$ "
67200 (30 Tonnen)	D. H. K.	4 $\frac{1}{2}$ " 11 " 1 $\frac{1}{16}$ "	16 " 5 " 30 " — " 62 " — "	8 " 10 " 13 " 1 $\frac{1}{4}$ " 12 " 11 "
80640 (36 Tonnen)	D. H. K.	5 " 12 $\frac{1}{2}$ " 1 $\frac{3}{16}$ "	22 " 5 " 35 " 10 " 78 " — "	12 " 1 " 15 " 7 $\frac{3}{4}$ " 16 " 3 "
98560 (44 Tonnen)	D. H. K.	5 $\frac{1}{2}$ " 14 " 1 $\frac{5}{16}$ "	27 " — " 41 " 10 " 96 " — "	14 " 11 " 18 " 3 $\frac{1}{2}$ " 20 " — "
120960 (54 Tonnen)	D. H. K.	6 " 15 " 1 $\frac{7}{16}$ "	34 " — " 47 " 8 " 115 " — "	18 " 6 " 20 " 9 $\frac{1}{2}$ " 24 " — "

Man entnimmt hieraus den großen Vorzug, welchen durch Tüchtigkeit und geringen Preis die Drathseile überall behaupten, wo sie aus anderen Rücksichten anwendbar sind. Rückfichtlich ihrer Festigkeit könnte man aus der Tabelle entnehmen, daß zum Zerreißen eines Eisen-Drathseiles etwa eine 4 $\frac{1}{2}$  Mal so große Kraft erforderlich ist als die, von welcher ein gleich dickes Hanfseil zerrißen wird.

# Versuche über die Haltkraft von Schrauben und Nägeln in Hölzern.

§. 15. Die folgende Tabelle enthält eine summarische Zusammenstellung der Resultate, welche Herr Director Karmarsch<sup>1)</sup> aus seinen Versuchen über die Haltbarkeit der Holzschrauben erhalten hat. Die Angaben sind in hannoverschen Zoll und Pfunden zu verstehen.

Holzgattung	Länge der Schraube im Holze	Durchmesser	Größe der cylindrischen Zerreißungsfläche	Ausreißende Kraft	Festigkeit (Parallelobstion) des Holzes für 1 Q. Zoll Fläche
	Zoll In	Zoll Längen	Q. Zoll holz	Pfund	Pfund
Tannen . .	1/2	0,23	0,3613	200,5	555
Dreigl. . .	1/4	0,17	0,1335	83	621
Dreigl. . .	1/2	0,17	0,2670	143	535
Linden . .	1/2	0,23	0,3613	281	770
Weißbuchen	1/2	0,23	0,3613	426	1179
Dreigl. . .	1/4	0,17	0,1335	153	1146
Dreigl. . .	1/2	0,17	0,2670	300	1123
Dreigl. . .	1/4	0,08	0,0628	70,5	1122
Rothbuchen	1/2	0,23	0,3613	306,5	848
Eichen . .	1/2	0,23	0,3613	364	1007
	Zoll In	Quer- Längen	holz		
Tannen . .	1/2	0,23	0,3613	288	797
Dreigl. . .	1/4	0,17	0,1335	118	884
Dreigl. . .	1/2	0,17	0,2670	237	887
Linden . .	1/2	0,23	0,3613	396	1096
Weißbuchen	1/4	0,17	0,1335	252	1887
Dreigl. . .	1/2	0,17	0,2670	486	1820
Dreigl. . .	1/4	0,08	0,0628	107	1704
Rothbuchen	1/2	0,23	0,3613	437	1209
Eichen . .	1/2	0,23	0,3613	415	1148

Nach diesen Versuchen ist die Haltkraft *P* einer Schraube allein abhängig 1) von dem äußern Durchmesser (einschließlich des Gewindes) *d*, und 2) von der Länge *l* derselben, soweit sie im Holze sitzt. Ohne Einfluß dagegen ist 3) die Tiefe des Gewindes, und 4) die Anzahl der Schraubengänge, wenn diese sehr dünn und weit auseinander liegend sind, wie es bei den gebräuchlichen Holzschrauben immer der Fall ist. Uebrigens hält eine Schraube bedeutend fester in Querholz (d. h. wenn die Are der Schraube rechtwinklig auf der Richtung der Fasern steht) als in Längenzholz (wo die Are der

1) Mittheilungen des Gewerbevereins für das Königreich Hannover, 1838, 16. Bief.

Schraube der Faserrichtung parallel ist). Da die Haltkraft  $P$  der Schraube sich der Größe der Zerreißungsfläche  $\pi \cdot d \cdot l$  des Holzes proportional gezeigt hat, so ist  $P = p \cdot \pi \cdot d \cdot l$ , wenn  $p$  die in der Tabelle angegebene Parallelschraube des Holzes bezeichnet, und setzt man  $p \cdot \pi = p' \cdot 3,1416 = p'$ , so hat man einfacher  $P = p' \cdot d \cdot l$ , wo man für die Constante  $p'$  die folgenden Werthe hat, wenn  $d$  und  $l$  in hannov. Zollen gegeben sind und  $P$  in Pfunden gesucht wird,

	Längenzholz	Querholz
Tannen	1790	2690
Linden	2440	3440
Rothbuchen	2660	3800
Eichen	3160	3610
Weißbuchen	3590	5670

§. 16. Die Haltkraft von geschmiedeten Nägeln ist nach demselben Experimentator <sup>1)</sup> ebenfalls in Querholz merklich größer, als in Längenzholz, und in Querholz halten die Nägel wieder viel fester, wenn sie parallel mit den Jahrringen eingeschlagen werden, als wenn sie die Dicke der Jahrringe rechtwinklig durchdringen. Die Haltkraft wächst sehr nahe mit der Potenz  $l \cdot \sqrt{l}$  oder  $\sqrt{l^3}$ , wenn  $l$  die Tiefe bezeichnet, bis auf welche der Nagel eingeschlagen worden ist. Drückt man  $l$ , so wie die Summe  $b + d$  der Breite und Dicke eines Nagels an der Stelle, wo er aus dem Holze tritt, in hannov. Zollen aus, so erhält man die Haltkraft  $P$  in Pfunden nach der Formel  $P = p \cdot l(b + d)$ , wo  $p$  folgende Werthe hat:

	in Längenzholz	in Querholz
Tannen	450	800
Linden	450	850
Rothbuchen	870	1350
Weißbuchen	1050	1480
Eichen	1300	1800

Die Haltkraft von cylindrischen Drathstiften wächst sehr nahe mit der Länge des im Holze befindlichen Theiles und beträgt für jeden Quadrat Zoll der Berührungsfläche zwischen dem Holze und dem Stifte

	in Längenzholz	in Querholz
Tannen	220 Pfd.	270 Pfd.
Linden	260 "	300 "
Rothbuchen	390 "	580 "
Eichen	410 "	580 "
Weißbuchen	510 "	600 "

Die Drathstifte stehen demnach den Nägeln bedeutend nach.

1) Mittheilungen des Gewerbevereins f. d. K. Hannover, 1839, 19. Lieferung.

### Widerstand der Materialien gegen den Stoß.

§. 17. Versuche über den Widerstand der Materialien gegen den Stoß sind besonders von Hodgkinson<sup>1)</sup> angestellt worden. Die Körper, gegen welche derselbe Stöße wirken ließ, waren im Allgemeinen prismatische mit beiden Enden in horizontaler Lage auf festen Stützen ruhende Stäbe aus Gußeisen oder Gußstahl, ein einziges Mal wurde eine schmiedeeiserne Röhre angewandt. Die stoßenden Körper waren entweder Kugeln aus Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall oder Blei, wenn solche pendelartig aufgehangen und die Stöße (beinah) horizontal gegen die Stäbe ausgeführt wurden; oder Bleichylinder, wenn die Stöße, wie von einem Hammer, (beinah) vertical geschahen. Die Durchbiegungen der Stäbe, wurden durch die Tiefe gemessen, um welche ein Pflock, dessen eines Ende den ungebogenen Stab berührte, in eine Masse Thon einbrang, welche an der entgegengesetzten Seite des Stabes angebracht war, wogegen der Stoß ausgeübt wurde.

Hodgkinson führt folgende Ergebnisse seiner Versuche auf:

1. Wenn verschiedenartige Körper von demselben Gewichte, aber ungleicher Härte und Elasticität, horizontal mit derselben Geschwindigkeit gegen die Mitte eines schweren, an den Enden unterstützten, (übrigens frei liegenden) Stabes stoßen (pendelartig schlagen), so werden diese Körper mit unter einander gleichen Geschwindigkeit zurückgeworfen.

2. Wenn, wie bemerkt, ein mit beiden Enden unterstützter Stab durch Körper von gleichem Gewichte, aber verschiedener Härte und Elasticität, horizontal gestoßen wird, so sind die Durchbiegungen des Stabes dieselben, welcher Körper auch den Stoß verrichten mag.

3. Die Größe des Zurückspringens eines Körpers, welcher den Stab wie vorher stößt, ist nahezu gleich der (Größe u.), welche von der rückwirkenden Kraft eines völlig elastischen Stabes erzeugt wird, womit derselbe seine ursprüngliche Gestalt wieder herstellt.

4. Die Stosswirkungen von Körpern ganz verschiedener Beschaffenheit gegen einen harten, biegsamen Stab, scheinen unabhängig von der Elasticität dieser (der stoßenden) Körper zu sein, und können, ohne merklichen Fehler so berechnet werden, als wären diese Körper unelastisch.

5. Die Kraft, womit ein, zwischen den Enden frei liegender schwerer Stab von gleichen Querschnitten einem in horizontaler Richtung (aber normal zur Länge) ertheilten Stöße widersteht, ist dieselbe, an welcher Stelle auch der Stoß erfolgen mag.

1) Wir entnehmen die folgenden Resultate so wie die Formeln des nächsten Paragraphen einem Aufsatze des Herrn Professor Rühlmann in dem Freiburger Journal: der Ingenieur 1. Bd. 3. Heft, 1848.



6. Die Kraft, womit ein schwerer, gleich dicker Stab einem Horizontalstoße widersteht, verhält sich zur widerstehenden Kraft eines sehr leichten Stabes, wie die Summe vom Gewichte des stoßenden Körpers und des halben Stabgewichtes sich zum Gewichte des stoßenden Körpers allein verhält.

7. Die Kraft, womit ein Stab von gleichen Querschnitten dem Bruche widersteht, wenn ein leichter Körper auf ihn herabfällt, wächst in einem größeren Verhältnisse, als das seines Gewichtes ist, und wird am größten, wenn die Summe des halben Stabgewichtes und des stoßenden Körpers nahezu gleich dem dritten Theile desjenigen Gewichtes ist, welches den Stab durch Druck zerbrechen würde.

§. 18. Mit diesen Versuchsergebnissen stimmen die folgenden Formeln überein, welche Herr Professor Kuhlmann für die angenäherte Berechnung von Ausdehnungen, Durchbiegungen, Dimensionen u. prismatischer Körper, wenn solche Stößen unterworfen sind, entwickelt hat.

1. Wenn der Stoß nach der Längenrichtung des Körpers erfolgt.

Bezeichnet  $Q$  das Gewicht des stoßenden Körpers,  $H$  die senkrechte Höhe, von welcher derselbe herabfällt (wo  $V = \sqrt{2gH}$ , wenn  $V$  die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers unmittelbar vor dem Stoße ist), ferner  $Q$ , das Gewicht des gestoßenen Prismas,  $a$  und  $l$  respective dessen Querschnitt und Länge, (erstere GröÙe in Quadrat-Millim. oder Quadrat Zoll, letztere respect. in Metern oder Fuß ausgedrückt), endlich  $E$  den Elasticitätsmodul (pr. Quadrat-Millimeter oder pr. Quadrat Zoll) des gestoßenen Prismas, so kann man die durch den Stoß bewirkte Verlängerung (oder Verkürzung)  $\lambda$  durch die Formel berechnen:

$$I. \lambda = \frac{Q+Q_0}{2A} + \sqrt{\left(\frac{Q+Q_0}{2A}\right)^2 + \frac{H}{A} \frac{Q^2}{(Q+Q_0)}}$$

wobei  $A = \frac{aE}{2l}$  ist.

2. Wenn der Stoß rechtwinklig gegen die Länge eines Prismas erfolgt, welches in horizontaler Lage mit beiden Enden auf festen Stützen ruht.

a) Behalten wir die vorigen Bezeichnungen bei, setzen aber  $A = \frac{24ET}{144 l^3} = \frac{ET}{6 l^3}$  ( $l$  in Fuß ausgedrückt,  $E$  und  $T$  auf Zolle bezogen), wobei  $ET$  das Elasticitätsmoment vom normalen Querschnitte des gestoßenen Prismas bezeichnet, so ergibt sich die durch den Stoß erzeugte Durchbiegung  $u$  (in Fuß) aus der Formel:

$$II. u = \frac{Q+Q_0}{2A} + \sqrt{\left(\frac{Q+Q_0}{2A}\right)^2 + \frac{H}{A} \frac{Q^2}{(Q+\frac{1}{2}Q_0)}}$$

b) Will man, ohne die Kenntniß des Elasticitätsmoduls vor- auszusetzen, den normalen Querschnitt eines eben solchen Prismas berechnen, damit dasselbe dem Stöße eines von gegebener Höhe herabfallenden Körpers mit Sicherheit gegen den Bruch wider- steht, so kann man die Formel benutzen

$$\text{III. } T = \frac{3e^2}{4l} \left\{ H \frac{Q^2}{Q + \frac{1}{2}Q} + (Q + Q_1) u \right\},$$

worin, außer den bereits bemerkten Bezeichnungen,  $e$  den Abstand der von der neutralen Ase des Querschnittes am entferntesten Faser,  $\alpha$  den Coefficienten der Stoßfestigkeit (modulus of resilience, coefficient de la résistance vive) und  $T$  das Trägheitsmoment des normalen Querschnittes, bezogen auf die neutrale Ase desselben, bezeichnet.

Für  $\alpha$  entnehmen wir aus Rühlmann's Geodynamik (zweite Auflage) die folgenden Werthe, wobei sich die unter der Autorität von Poncelet gegebenen auf einen Stab von 1 Quadrat- millimeter Querschnitt und 1 Meter Länge, die unter der Autori- tät von Treibgold und Barlow gegebenen aber auf einen Stab von 1 engl. Quadratzoll Querschnitt und 1 engl. Fuß Länge beziehen.

Göljer	Eiche	Eiche	Fichte	Föhre	Lärche	Roth- buche	Ulme	Weiß- tanne
$\alpha$ (Poncelet)	0,0017	0,0007	0,0031		0,0017	0,0014	0,0028	0,0013
$\alpha$ (Treibg. u. Barlow)	4,60		4,65	4,55	2,00	2,07	3,93	3,60

Metalle	Blei, gegossen	Blei- drath	Eisen- drath	Guß- eisen	Messing- drath	Stab- eisen	Stahl- drath	Zinn, gegossen
$\alpha$ (Poncelet)		0,0012	(Mittel) 0,0062	0,004	(Mittel) 0,0126	0,0033	0,015	
$\alpha$ (Treibgold u. Barlow)	1,56			6,35				0,9

§. 19. Unter den Praktikern hat längere Zeit eine Mei- nungsverschiedenheit darüber obgewaltet, ob bei einem horizontal belasteten Stabe eine ruhende oder eine sich mit einer gewissen Geschwindigkeit darüber bewegende Last eine größere Durch- biegung bewirken würde. Nach den Beobachtungen an den guß- eisernen Brücken der badischen Eisenbahn giebt Herr Professor Becker<sup>1)</sup> die folgenden Thatsachen an:

1) Die gußeisernen Brücken der badischen Eisenbahn von W. Becker. Carlsruhe 1847.

1. Die Senkung eines Trägers ist dann am kleinsten, wenn sich eine Locomotive ruhend auf demselben befindet, sie wird größer, wenn die Locomotive sich fortbewegt, und wächst mit der Geschwindigkeit derselben.

2. Die Senkung nimmt mit der Größe der zwischen den Triebbrüdern der Locomotive und den Bahnschienen stattfindenden Adhäsion zu.

3. Diejenige Senkung, welche der größten Geschwindigkeit einer Locomotive, diese zu 60 Fuß angenommen, entspricht, ist von der bei ruhender Belastung herrührenden Senkung nur wenig verschieden und übersteigt die letztere bei sämtlichen 11 beobachteten Brücken höchstens um 5 Punkte <sup>1)</sup>).

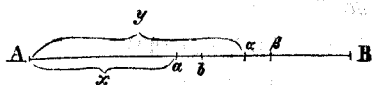
4. Findet über der Mitte des Brückenträgers ein Schienenstoß statt, so wird die Zunahme der Senkung bei dem Darüberrollen der Locomotive vergrößert.

Versuche, welche auf Veranlassung einer vom englischen Parlament niedergesetzten Commission <sup>2)</sup> vom Professor Willis in Cambridge und den Ingenieursofficieren James und Galton in Portsmouth, angestellt wurden, haben, verbunden mit theoretischen Untersuchungen des Professor Stokes, zu dem Resultate geführt, daß eine in Bewegung befindliche Last allerdings und unter allen Umständen eine größere Durchbiegung bewirkt, als eine ruhende Last. Diese Vergrößerung der Durchbiegung wird aber bei den Brücken deshalb unmerklich, weil die Masse der Brücke die der passirenden Lasten stets sehr bedeutend übertrifft.

### Bestimmung des Elasticitätsmoduls aus den Längenschwingungen eines Stabes.

§. 20. Der Elasticitätsmodul eines Materials läßt sich entweder durch directe Dehnungs- oder Biegeversuche oder auch aus der Zahl der Schwingungen berechnen, welche ein prismatischer Stab in einer bestimmten Zeit macht. Da letzteres Verfahren von Navier unberührt gelassen worden ist, so soll es hier für einen der einfachsten Fälle gezeigt werden, nämlich für den Fall, in welchem ein an beiden Enden freier Stab in Längenschwingungen versetzt worden ist <sup>3)</sup>).

Fig. 177.



Bei dem Stabe AB sei  
 $l$  die Länge des Stabes AB;  
 $x$  die Abscisse des Punktes  $a$ ;

1) 1 bad. Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 1000 Punkte = 0,3 Meter.

2) Report of the Commissioners appointed to inquire into the application of Iron to Railway Structures. — (Die Commission wurde im August 1847 niedergesetzt.)

3) Wir benützen hierzu die Darstellung des leider zu früh verstorbenen Seebeck in dem Programm der technischen Bildungsanstalt zu Dresden, 1846.

$dx$  die Länge des Elementes  $ab$ ;  
 $\omega$  der Querschnitt des Stabes;  
 $\gamma$  das Gewicht einer Kubikeinheit des Materials;  
 $E$  der Elasticitätsmodul.

Wird nun der Stab durch einen Zug in der Richtung  $AB$  so ausgedehnt, daß die Punkte  $a, b$  resp. nach  $\alpha, \beta$  rücken, und dann sich selbst überlassen, und nennt man

$y$  die Abscisse des Punktes  $\alpha$ ;  
 $dy$  die Länge des Elementes  $\alpha\beta$ ,

so ist  $\frac{dy}{dx}$  das Verhältniß, in welchem das Element  $ab$  ausgedehnt worden ist. Die Spannung  $T$  in diesem Elemente ist daher  $T = E\omega \cdot \frac{dy}{dx}$ , die Spannung in dem nächst liegenden Elemente wird  $T + dT$  sein und der Punkt  $a$  wird daher mit der Kraft  $dT$  sollicitirt, sich nach derjenigen Seite hinzubewegen, für welche  $dT$  positiv ist. Bezeichnet man nun mit

$v$  die Geschwindigkeit des Punktes  $a$ ;

$dt$  ein Element der Zeit;

$\varphi$  die Acceleration des Punktes  $a$ ;

so ist nach den Sätzen der theoretischen Mechanik

$$v = \frac{dy}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Andererseits ist  $\varphi = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse des bewegten Körpers}}$ ;

die bewegende Kraft ist  $dT = d \cdot E\omega \cdot \frac{dy}{dx} = E\omega \cdot \frac{d^2y}{dx}$ ;

die Masse des bewegten Körpers ist  $\frac{\omega \gamma \cdot dx}{g}$ , wenn  $g$  die Erdbacceleration bezeichnet. Man hat also

$$\varphi = \frac{E\gamma}{\gamma} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

und wenn  $\frac{E\gamma}{\gamma} = c^2$  gesetzt wird, so erhält man

$$\varphi = \frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist<sup>1)</sup>

$$y = f(ct + x) + F(ct - x),$$

wo  $f$  und  $F$  willkürliche Functionen andeuten. Durch Differenzieren folgt

1) Euler's Integralkrechnung. Deutsch von Salomon S. 276.

$$\frac{dy}{dx} = f'(ct+x) - F'(ct-x).$$

Da  $\frac{dy}{dx}$  das Verhältniß der Ausdehnung für die einzelnen Theile des Stabes angiebt, die beiden Enden desselben aber frei sind, also keine Ausdehnung erleiden können, so wird  $\frac{dy}{dx} = 0$  werden sowohl für  $x=0$  als für  $x=l$ . Das Erstere giebt

$$0 = f'(ct) - F'(ct)$$

für alle Werthe von  $t$ , daher  $f' = F'$ , und

$$\frac{dy}{dx} = f'(ct+x) - f'(ct-x);$$

hierin  $x=l$  gesetzt, giebt

$$0 = f'(ct+l) - f'(ct-l)$$

und, wenn man  $ct+l$  für  $ct$  schreibt,

$$f'(ct) = f'(ct+2l)$$

Die Function  $f'$  ist also eine periodische, die denselben Werth wieder annimmt, so oft  $ct$  um  $2l$ , oder  $t$  um  $\frac{2l}{c}$  vermehrt wird.

Es ist daher  $\frac{2l}{c}$  die Dauer einer Schwingung<sup>1)</sup> und die Anzahl

$N$  der Schwingungen in einer Secunde ist  $1: \frac{2l}{c} = \frac{c}{2l} = \frac{\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}}{2l}$

woraus folgt

$$E = \frac{4\gamma l^2}{g^2} \cdot N^2.$$

§. 21. Versuche um den Elasticitätsmodul aus der Zahl der Schwingungen eines prismatischen Stabes zu bestimmen, sind neuerdings besonders von Wertheim angestellt worden. Wir geben hier eine summarische Zusammenstellung der von diesem Experimentator erhaltenen Resultate<sup>2)</sup>. Der Elasticitätsmodul ist in Kilogrammen und für den Quadratmillimeter angegeben; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles hingegen so, daß die Geschwindigkeit von 332,244 Meter, mit welcher der Schall sich in der atmosphärischen Luft fortpflanzte, als Einheit angenommen worden ist.

1) Dienen die Schwingungen des Stabes dazu, den Schall fortzupflanzen, so ist  $\frac{l}{\lambda} =$

$c = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$  offenbar die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

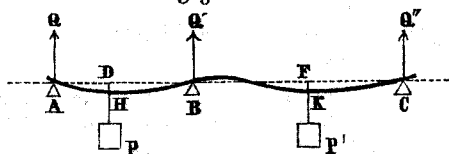
2) Seebeck a. a. O.

Bezeichnung des Materials	Elastizitätsmodul			Schallgeschwindigkeit			Spezif. Gewicht
	Längen- schwin- gungen	Quer- schwin- gungen	Verlän- gerung	Längen- schwin- gungen	Quer- schwin- gungen	Verlän- gerung	
Blei, gegossen . . . .	1993	1985	1775	3,974	3,966	3,561	11,215
gezogen . . . .	2278	1781	1803	4,257	3,764	3,787	11,169
angelassen . . .	2146	1854	1727	4,120	3,841	3,679	11,232
gerissen . . . .	"	1789	"	"	3,749	"	11,308
Zinn, gezogen . . . .	4006	3840	"	7,480	6,829	"	7,313
angelassen . . .	4418	3703	"	7,338	6,719	"	7,290
gewöhnl. gegossen	4643	4172	"	7,465	7,076	"	7,404
gezogen	4564	4148	"	7,401	7,086	"	7,342
gerissen . . . .	"	3918	"	"	6,909	"	7,293
Cadmium, gezogen .	6090	5424	"	7,903	7,456	"	8,665
angelassen	4241	5313	"	6,651	7,444	"	8,520
gerissen . . . .	"	4084	"	"	6,518	"	8,541
Gold, gezogen . . . .	8599	8645	8131	6,424	6,441	6,247	18,514
angelassen . . .	6372	5989	5585	5,603	5,432	5,245	18,035
gerissen . . . .	"	5833	"	"	5,212	"	19,077
Silber, gezogen . . .	7576	7820	7358	8,057	8,186	7,940	10,369
angelassen . . .	7242	7533	7140	7,903	8,060	7,847	10,304
gerissen . . . .	"	7648	"	"	8,115	"	10,320
Zink, in Sand geg.	7536	6778	"	9,683	9,188	"	7,134
in einer Form gegoss.	9338	9423	9021	10,774	10,823	10,591	7,146
gewöhnl. gezogen	9555	8794	8734	11,007	10,560	10,524	7,008
angelassen . . . .	9292	9641	"	10,814	11,016	"	7,060
gerissen . . . .	"	9324	"	"	10,882	"	6,997
Palladium, gezogen.	"	12395	11759	"	10,066	9,804	11,350
angelassen	"	11281	9789	"	9,450	8,803	11,225
Kupfer, gezogen . . .	12536	12513	12449	11,167	11,157	11,128	8,933
angelassen . . .	12540	11833	10519	11,167	10,847	10,703	8,936
gerissen . . . .	"	12040	"	"	10,970	"	8,890
Platin, dünner Drath	16176	15928	"	8,241	8,177	"	21,166
angelassen . . .	14292	14373	"	7,823	7,845	"	20,753
mittler Drath	17165	17153	17044	8,467	8,456	8,437	21,275
angelassen . . .	15611	15355	15518	8,111	8,045	8,087	21,083
dicker Drath	16159	15814	"	8,218	8,130	"	21,259
angelassen . . .	15560	15683	"	8,074	8,106	"	21,207
gerissen . . . .	"	16748	"	"	8,421	"	20,987
Eisen (duBerry) gezog.	19903	18547	20869	15,108	14,584	15,472	7,748
angelassen . . . .	19925	19410	20794	15,108	14,913	15,433	7,757
gerissen . . . .	"	17538	"	"	14,179	"	7,751
Eisen-drath, gewöhnl.	"	"	18613	"	"	14,798	7,553
Gußstahl, gezogen . .	19823	18247	19549	15,108	14,495	15,003	7,717
angelassen . . .	19828	18811	19561	15,108	14,716	15,006	7,719
gerissen . . . .	"	16728	"	"	13,965	"	7,710
Stahl-drath, engl., gez.	19445	20714	18809	14,961	15,442	14,716	7,718
angelassen	19200	21070	17278	14,961	14,673	14,193	7,622
gerissen . . . .	"	16728	"	"	13,965	"	7,710
gewöhnl. blau	"	"	18045	"	"	14,700	7,420
angelassen	"	"	"	"	"	"	"
Tafelglas . . . . .	"	"	"	15,85	"	"	"
Fensterglas . . . . .	"	"	"	16,67	"	"	"

# Gleichgewicht eines von drei oder mehr Stützen getragenen Stabes.

Druck des Stabes auf seine Stützpunkte.

Fig. 178.



§. 22. Es sei in der nebenstehenden Figur AC ein elastischer Stab, welcher in den drei in derselben Horizontalen liegenden Punkten A, B und C unterstützt und in den Punkten H und

K mit den Gewichten P und P' belastet ist, während er zugleich sein eigenes Gewicht zu tragen hat, welches für jede Einheit der Horizontalprojection p Gewichtseinheiten betragen mag. Kennt man a die Länge AD, b die Länge BF, c die Länge AB, e die Länge AC, Q, Q', Q'' resp. den Druck auf A, B und C, und setzt  $c - a = A$ ,  $b - c = B$ ,  $e - c = C$ , so hat man<sup>1)</sup>

$$Q = \frac{AC(2ce - ac - a^2)P + cB(e - b)(b + c - 2e)P' + \frac{1}{2}ceC(c^2 + 3ce - e^2)p}{2c^2e(e - c)}$$

$$Q' = \frac{aC(2ce - a^2 - c^2)P + c(e - b)(2be - b^2 - c^2)P' + \frac{1}{2}ceC(e^2 + ce - c^2)p}{2c^2(e - c)^2}$$

$$Q'' = \frac{cB(3be - bc - ce - b^2)P' - aAC(c + a)P + \frac{1}{2}ceC(3e^2 - 5ce + c^2)p}{2ce(e - c)^2}$$

Es folgt hieraus, daß der Verticaldruck auf die einzelnen Stützpunkte unabhängig von der Elasticität oder Biegsamkeit des Balkens ist, oder daß dieser Druck unverändert bleibt, die Elasticität des Balkens mag groß oder klein sein.

Wird das Gewicht des Stabes vernachlässigt, so ist

$$Q = \frac{(c - a)(e - c)(2ce - ac - a^2)P + c(b - c)(e - b)(b + c - 2e)P'}{2c^2e(e - c)}$$

$$Q' = \frac{a(e - c)(2ce - a^2 - c^2)P + c(e - b)(2be - b^2 - c^2)P'}{2c^2(e - c)^2}$$

$$Q'' = \frac{c(b - c)(3be - bc - ce - b^2)P' - a(a + c)(c - a)(e - c)P}{2ce(e - c)^2}$$

und, wenn der Stab nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat,

$$Q = \frac{c^2 + 3ce - e^2}{8c} p,$$

$$Q' = \frac{e(e^2 + ce - c^2)}{8c(e - c)} p,$$

$$Q'' = \frac{3e^2 - 5ce + c^2}{8(e - c)} p.$$

1) Die Herleitung dieser Formeln, sowie die des folgenden Paragraphen, die übrigens ganz der in §. 376 benutzten analog ist, findet man in Chtelwein's Statik fester Körper, Band III.

Steht die mittlere Stütze von den andern beiden gleich weit ab, so ist  $e=2c$ , und

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2-ac-a^2)P - (b-c)(2c-b)(3c-b)P' + \frac{5}{2}c^4p}{4c^3},$$

$$Q' = \frac{a(3c^2-a^2)P + (2c-b)(4bc-b^2-c^2)P' + \frac{5}{2}c^4p}{2c^3},$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc-2c^2-b^2)P' - a(a+c)(c-a)P + \frac{5}{2}c^4p}{4c^3}.$$

Sind außerdem die Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, so hat man, in Uebereinstimmung mit §. 377,

$$Q = \frac{13P-3P'+6ep}{32}, Q' = \frac{11P+11P'+10ep}{16}, Q'' = \frac{13P'-3P+6ep}{32}$$

und wenn  $P=P'$  gesetzt wird,

$$Q = \frac{5P+3ep}{16}, Q' = \frac{11P+5ep}{8}, Q'' = \frac{5P+3ep}{16}.$$

Wird unter den angeführten Umständen das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, so ist

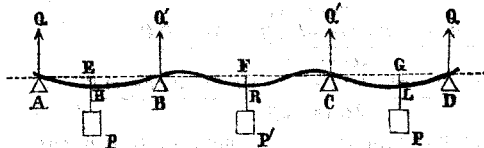
$$Q = \frac{5}{16}P, Q' = \frac{11}{16}P, Q'' = \frac{5}{16}P;$$

und wenn angenommen wird, daß keine Gewichte an dem Balken hängen, dagegen das Gewicht  $ep$  desselben  $= 2P$  ist, so wird

$$Q = \frac{5}{16}P, Q' = \frac{11}{16}P, Q'' = \frac{5}{16}P.$$

Voraus folgt, daß die in der Mitte zwischen den gleich weit entfernten Stützen aufgehängten gleichen Gewichte die mittlere Stütze stärker und die äußere schwächer drücken, als wenn diese Last auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre. Im ersten Falle ist der Druck auf die mittlere Stütze  $4\frac{2}{5}$  mal so groß, als auf jede der äußeren; dagegen ist der Druck auf jene nur  $3\frac{1}{2}$  mal so groß, als auf jede der letztern, wenn die Last auf dem Balken, wie Getreide auf Magazinböden, gleichförmig verbreitet ist.

Fig. 179.



§. 23. In der nebenstehenden Figur sei AD ein schwerer elastischer Stab, welcher in den vier, in derselben horizontalen liegenden Punkten

A, B, C, D unterstützt, und zwischen den Stützen mit Gewichten belastet ist, durch welche er nur wenig gebogen wird. Unter der Voraussetzung, daß die Last P in H gleich der Last in L und  $AE=DG$ ,  $AF=FD$  und  $AB=DC$  sei, nenne man

$p$  das Gewicht des Stabes für jede Längeneinheit;

$a$  die Länge  $AE=DG$ ;  $b$  die Länge  $AF=FD$ ;  $c$  die Länge  $AB=DC$ ;  $P'$  die Last in der Mitte R des Stabes;



$Q, Q'$  den Druck, welcher resp. auf  $A$  oder  $D$ , und  $B$  oder  $C$  stattfindet. Man hat alsdann

$$Q = \frac{4(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 6c(b-c)^2P' + c(24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3)p}{8c^2(3b-2c)}$$

$$Q' = \frac{4a(6bc - a^2 - 3c^2)P + 2c(3b^2 - c^2)P' + c(8b^3 + c^3 - 4bc^2)p}{8c^2(3b-2c)}$$

Wird das Gewicht des Stabes vernachlässigt, so ist

$$Q = \frac{2(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 3c(b-c)^2P'}{4c^2(3b-2c)}$$

$$Q' = \frac{2a(6bc - a^2 - 3c^2)P + c(3b^2 - c^2)P'}{4c^2(3b-2c)}$$

und, wenn der Stab nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat,

$$Q = \frac{24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3}{8c(3b-2c)}p, \quad Q' = \frac{8b^3 + c^3 - 4bc^2}{8c(3b-2c)}p.$$

Sind sämtliche Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, so wird  $c = 2a$ , also

$$Q = \frac{a(12b - 19a)P - 3(b-2a)^2P' + 4(6ab^2 - b^3 - 6a^2b - a^3)p}{8a(3b-4a)}$$

$$Q' = \frac{a(12b - 13a)P + (3b^2 - 4a^2)P' + 4(a^3 - 2a^2b + b^3)p}{8a(3b-4a)}$$

und, wenn noch außerdem die Stützen gleich weit von einander abstehen, so wird  $b = 3a$ , daher

$$Q = \frac{17P - 3P' + 32ap}{40}$$

$$Q' = \frac{23P + 23P' + 88ap}{40}$$

§. 24. Wird ein Stab von fünf Stützen getragen, von denen sich zwei an den Enden befinden, und übrigens je zwei auf einander folgende Stützen gleich weit von einander abstehen, so erhält man, wenn über diesen Stab eine Last  $P$  gleichförmig vertheilt wird, folgende Drücke auf die Stützpunkte<sup>1)</sup>. Nennt man

$Q$  den Druck auf die erste und fünfte Stütze;

$Q'$  den Druck auf die zweite und vierte Stütze;

$Q''$  den Druck auf die dritte oder die mittlere Stütze, so ist

$$Q = \frac{11}{12}P, \quad Q' = \frac{1}{2}P, \quad Q'' = \frac{1}{6}P.$$

Es ist also auch hier wieder der Druck auf die mittlere Stütze bei Weitem der größte und beträgt über die Hälfte der ganzen Last.

**Die wichtigsten Resultate aus den Untersuchungen von Ardant über die Sprengwerke von großer Spannweite.**

§. 25. Versuche welche von Ardant<sup>2)</sup> auf Kosten der französischen Regierung mit im Großen ausgeführten Dachconstructions angestellt wurden, haben, verbunden mit theoretischen Betrachtun-

1) Notizblatt des Architekten-Vereins zu Berlin. Nr. 25 und 26. 1845.

2) Ueber Anordnung und Construction der Sprengwerke von großer Spannweite. Deutsch herausgegeben von H. v. Kaben.

gen, zu der Beantwortung der folgenden Fragen geführt, welche besonders das Verhältniß zwischen Bogengespärren und solchen aus geraden Stücken betreffen.

Erste Frage. Sind Bogengespärre billiger als gerade Gespärre?

Antwort. Nein. (Arvant zeigt mit Hülfe einer Tabelle, daß bei ausgeführten Werken der Preis von Ueberdeckungen mittelst Bogengespärre zu solchen mit geraden Gespärren sich wie 19 zu 12 herausgestellt hat.)

Zweite Frage. Besitzen die Bogengespärre die Eigenschaft, keinen Horizontalschub gegen ihre Widerlager auszuüben?

Antwort. Nein. Alle Gespärre ohne Durchzüge bestreben sich, ihre Stützmauern nach außen zu kanten. Die Thatfachen und Schlüsse zeigen übereinstimmend, daß der Schub der Bogengespärre wirklich besteht (vergl. Navier S. 491), und daß bei der gewöhnlichen Vertheilung der Belastung jeder Fuß des Gespärres gegen sein Widerlager mit einer Kraft schiebt, welche dem vierten Theile der Gesamtbelastung gleich ist. Der Schub ist überdies nicht von der Natur des zu dem Bogen verwandten Materiales abhängig, er ändert sich aber mit der Größe und Vertheilung der Belastung und dem Verhältnisse zwischen Spannweite und Pfeilhöhe. Die kreisförmige oder polygonale Form der Gespärre übt eben so wenig Einfluß auf die Größe des Schubes aus; ein Bogengespärre schiebt eben so viel wie ein anderes von derselben Höhe und Spannweite, bei welchem die Größe der Belastung und die Art ihrer Vertheilung dieselben sind.

Dritte Frage. Ist der Widerstand, den die Bogengespärre gegen Biegung und Bruch zeigen, größer als der der geraden Gespärre?

Antwort. Nein. Im Gegentheil ist dieser Widerstand bei den am besten construirten Bögen zweimal geringer, als bei den aus geraden Hölzern zusammengesetzten Gespärren.

Vierte Frage. Vermehren die Bögen, die man mit den geraden Gespärren, welche aus zwei Sparren und zwei Ständern gebildet sind, verbindet, bedeutend die Widerstandsfähigkeit dieser Gespärre?

Antwort. Es kommt auf die Umstände an.

Ja: wenn der Bogen einen um ein Viertel stärkern Querschnitt hat, als der Sparren, und er so construiert ist, daß er große Steifigkeit besitzt.

Nein: wenn er biegsam ist, entweder wegen der Art seiner Zusammenfügung oder wegen seines geringen Querschnittes.

Fünfte Frage. Gibt es Systeme von Gespärren ohne Durchzüge, die weniger kostspieliger als die Bogengespärre, eine eben so genügende Wirksamkeit in Aussicht stellen?

Antwort. Ja.

Aus dem Vorhergehenden zieht Ar dant die folgenden Schlüsse in Beziehung auf die unter den Gespärren zu treffende Wahl.

1. Wenn man eine Reithahn, ein Exercirhaus oder irgend ein Local zu überbauen hat, bei welchem nicht Lagerung und Transporte von Gütern es wünschenswerth erscheinen lassen, daß der Raum zwischen den beiden Langseiten des Daches gänzlich frei sei, so ist das gewöhnliche Gespärre von Palladio mit Zugstangen und Hängestangen von Eisen am besten anzuwenden, wobei man gleichzeitig augenscheinliche Leichtigkeit, Solidität und Kostenersparniß vereint.

2. Will man, daß der obere Theil des Daches gänzlich von Zimmerwerk frei sei, wie es zum Beispiel bei einem Speicher verlangt werden kann, oder will man für ein Mansardendach eine Construction in Gewölbeform herstellen, so muß man der Anwendung des Bogens den Vorzug geben, oder ein Gespärre aus geraden Hölzern, wie das des Wagenschuppens von Lasnier<sup>1)</sup> benutzen. Ueber die unter diesen beiden Systemen zu treffende Wahl wird der Preis der Bohlen und der größern Hölzer den Ausschlag geben.

3. Wenn aber Decoration oder irgend ein anderes Motiv bezweckt werden soll, wird man zu einem Bogengesparre seine Zuflucht nehmen und dann wird dasjenige das beste sein, welches die größte Steifheit mit Rücksicht auf seine Dimensionen besitzt. Ein gerades Gespärre aus Holz mit einem Bogen aus Gufeisen würde ein sehr gutes Ganzes ausmachen<sup>2)</sup>. Was die Bögen aus gebogenen Hölzern betrifft, so muß man ein steifes Holz, lange und dicke Schienen anwenden und die Eisentheile vermehren.

Die aus hochkantig gestellten Bohlen gebildeten Bögen müssen aus zwei Lagen starker Bohlen mit gewechselten Stößen bestehen, welche durch Schraubbolzen zusammengehalten werden. Gut wird es sein, hier eiserne Bänder anzubringen, die ein Aufspalten der Bohlen der Länge nach verhindern.

## II. Zusätze zu der Theorie des Erddruckes.

§. 26. Wir geben hier zunächst einen Auszug aus den Untersuchungen von Poncelet<sup>3)</sup> hinsichtlich des Druckes einer Erdmasse und der Stabilität ihrer Bekleidung.

- 1) Wegen dieser Construction müssen wir auf das Werk von Ar dant verweisen.
- 2) Ein Beispiel einer solchen Verbindung findet sich Fig. 1 Taf. II. des zu dem citirten Werke gehörenden Atlanten.
- 3) Poncelet, Mémoire sur la stabilité des revêtements de terre in Nr. 13 des Memorial de l'officier du Génie. Ins Deutsche übertragen von Herrn Lahmeyer.

Fig. 180. Es sei  $ABCD$  in der nebenstehenden Figur das Profil einer Erdbekleidung mit verticalen Seiten, über welchen sich ein Erdauswurf  $JHF$  befindet, dessen Abdachung durch die unbegrenzte horizontale  $EF$  ersetzt gedacht werden soll. Es sei ferner  $G$  der Durchschnittspunkt von  $EF$  und der Erweiterung der verticalen Seitenwand  $BC$ ,  $H$  der Durchschnittspunkt von  $BC$  und  $JE$ , und  $E$  der Durchschnittspunkt von  $EF$  und der äußeren Böschung des Erdauswurfes.

Man nenne  
 $H$  und  $e$  die Höhe  $BC$  und die Stärke  $AB$  der Mauer;  
 $h$  und  $h_1$  die Höhen  $CG$  und  $HG$ ;  
 $b$  die Breite der Verme  $DJ$ ;  
 $\alpha$  den Winkel, welchen die natürliche Böschung der Erde mit der Verticalen einschließt; der Winkel  $JHC$  wird als dem Winkel  $\alpha$  gleich angesehen;  
 $f = \cotg \alpha$  den Reibungscoefficienten der Erde, und  $f_1$  den des Mauerwerkes;  
 $p$  und  $p_1$  die Gewichte von einem Kubikmeter Erde oder Mauerwerk;  
 $P$  und  $M$  die Intensität und das auf die Kante  $A$  bezogene Moment des durch die Erde rechtwinklig auf die ganze Höhe  $BH = H + h - h_1$  ausgeübten Druckes;  
 $\delta$  und  $\delta_1$  die Stabilitätscoefficienten für den Fall des Umsturzes der Mauer um die Kante  $A$ , und den Fall des Gleitens der Mauer auf ihrer Basis  $AB$ .

Endlich sei zur Abkürzung

$$u = \frac{h_1}{H+h}, \text{ wo } h_1 = CG - CH = h - (e-b) \cotg \alpha,$$

$$a = \frac{h}{H}; \quad x = \frac{e}{H}; \quad m = \frac{b}{H}.$$

Um  $P$  und  $M$  zu bestimmen, vernachlässigt man gewöhnlich die Cohäsion der Erdmasse und die Reibung an der innern Mauerfläche, wodurch man größere Dicken für die Bekleidungen erhält, als sie in der Wirklichkeit nöthig sind. Betrachtet man nun ein beliebiges Erdprisma  $bHEX$ , welches von der Horizontalen  $EF$  begrenzt wird, und dessen Gewicht mit  $Q$ , dessen Höhe  $bG$  mit  $z$ , und dessen Winkel  $XbG$  mit  $v$  bezeichnet werde, so findet man den Werth  $F$  des Horizontaldruckes, welchen dieses Prisma auf die Höhe  $Hb = z - h_1$  ausübt, indem man bemerkt, daß diese Kraft in entgegengesetzter Richtung angebracht, das Herabsinken des Gewichtes  $Q$  auf der Böschung  $bX$  verhindern muß. Mit Rücksicht auf die Reibung hat man daher für das Gleichgewicht die Gleichung

$$Q \cos v = F \sin v + f(F \cos v + Q \sin v),$$

woraus

$$F = Q \frac{1 - f \tan v}{f + \tan v} = \frac{1}{2} p (z^2 \tan v - h_1^2 \tan \alpha) \frac{1 - f \tan v}{f + \tan v}.$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\tan v = -f + \frac{1}{z \cos \alpha} \sqrt{h_1^2 + z^2 \cot^2 \alpha}$$

$$\tan v = -f + \sqrt{\frac{f^2 + h_1^2}{z^2} : \frac{1 + f^2}{f^2}}$$

und der Maximalwerth ist

$$F = \frac{1}{2} p \left\{ \frac{z}{\sin \alpha} - \sqrt{h_1^2 + z^2 \cot^2 \alpha} \right\}^2.$$

Der Druck auf das Element von der Höhe  $dz$  ist  $dF$ , sein Moment in Bezug auf die Kante  $A$  der Mauerbasis also  $(H + h - z)dF$ , und das Integral

$$\int (H + h - z) dF = F(H + h - z) + \int F dz$$

genommen von der Höhe  $z = GH = h_1$  bis zu der  $z = GB = H + h$ , für welche das erste Glied verschwindet, ist der Werth des Momentes  $M$  des Druckes auf die ganze Höhe der durch die Erde gedrückten Fläche  $BH$ .

Das allgemeine Integral ist, wenn man  $\frac{1}{\cos \alpha} = c$ , und  $\tan \alpha = n$  setzt

$$\frac{1}{6} p f^2 \left[ 3(c^2 + 1)^2 + 3h_1^2 n^2 - 6cz(n^2 h_1^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] (H + h - z) \\ + (c^2 + 1) z^3 + 3n^2 h_1^2 z - 2c(n^2 h_1^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Setzt man für  $z$  die oben genannten Grenzen, und beachtet, daß  $h_1 = u(H+h)$  ist, so erhält man schließlich

$$M = \frac{1}{2}p(H+h)^2 \left\{ 1 + 3u^2 + 2f^2 + \frac{2u^2}{f^2} - \frac{2}{f^2} (f^2 + u^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+f^2} \right\}$$

$$P = \frac{1}{2}p(H+h)^2 \left\{ (1+f^2)^{\frac{1}{2}} - (f^2+u^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^2$$

$$\tan v = -f + \sqrt{\frac{(f^2+u^2)(1+f^2)}{f^2}}$$

§. 27. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht der Mauer sind jetzt

$$1. \text{ für den Fall des Gleitens: } \frac{1}{2}f_1 \left\{ 2eHp_1 + p(e-b)^2 \cotg \alpha \right\} = \delta_1 P,$$

2. für den Fall der Drehung:

$$\frac{1}{2}p_1 e^2 H + \frac{1}{2}p(e-b)^2(2e+b) \cotg \alpha = \delta M,$$

$$\text{und wenn } \frac{h}{H} = a, \frac{e}{H} = x, \frac{b}{H} = m, \frac{h_1}{H+h} = \frac{h+(b-e)f}{H+h} = u$$

und für  $P$  und  $M$  ihre obigen Werthe gesetzt werden, so hat man

1. für den Fall des Gleitens:

$$ff_1(x-m)^2 + 2\frac{p_1}{p}f_1 x = \delta_1(a+1)^2 \left\{ (1+f^2)^{\frac{1}{2}} - (f^2+u^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^2,$$

2. für den Fall der Drehung:

$$3\frac{p_1}{p}x^2 + f(x-m)^2(x+\frac{1}{2}m) = \delta(a+1)^2 \text{ mal}$$

$$\left\{ 1 + 2f^2 + 3u^2 + \frac{2u^2}{f^2} - \frac{2}{f^2}(f^2+u^2)^{\frac{3}{2}}(1+f^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Aus dem Bauban'schen Profil von 10 Meter Höhe, 1,62 Meter Stärke an der Mauerkrone und einer äußern Böschung von  $\frac{1}{5}$  findet man, wenn die Berme gleich Null ist und die Erde 2 Meter hoch über der Mauerkrone steht und eine äußere Böschung von 45° hat, übrigens  $h_1 = 0,40$ ;  $\frac{p}{p_1} = \frac{2}{3}$  angenommen wird, den Stabilitätscoefficienten  $\delta = 1,912$ .

Mit Anwendung dieses Coefficienten sind von Poncelet die folgenden beiden Tabellen berechnet worden, welche also für Erdbekleidungen mit verticalen Seitenwänden dieselbe Stärke geben, welche das Bauban'sche Profil von 10 Meter Höhe mit einer 2 Meter hohen Erdüberhöhung besitzt.

Werte von $a = \frac{h}{H}$	Werte von $x = \frac{e}{H}$ für $p_1 = p$ $f = 0,6$ ; die Berme ist		Werte von $x = \frac{e}{H}$ für $p_1 = p$ $f = 1,4$ ; die Berme ist		Werte von $x = \frac{e}{H}$ für $p_1 = 1,5 p$ $f = 1$ ; die Berme ist			Werte von $x = \frac{e}{H}$ für $p_1 = \frac{2}{3} p$ $f = 0,6$ ; die Berme ist		Werte von $x = \frac{e}{H}$ für $p_1 = \frac{2}{3} p$ $f = 1,4$ ; die Berme ist	
	$-0$   $-0,2H$		$-0$   $-0,2H$		$-0$   $-0,2H$   $=e$			$-0$   $-0,2H$		$-0$   $-0,2H$	
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,2	0,983	0,916	0,632	0,586	0,654	0,574	0,411	0,737	0,655	0,498	0,410
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
1,6	1,056	0,970	0,730	0,658	0,734	0,622	0,420	0,780	0,685	0,566	0,445
1,8	1,084	0,990	0,772	0,690	0,769	0,640	0,423	0,797	0,697	0,594	0,461
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
2,5	1,151	1,037	0,902	0,778	0,848	0,690	0,431	0,833	0,722	0,680	0,506
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
3,5	1,203	1,074	1,047	0,883	0,928	0,738	0,438	0,862	0,737	0,765	0,551
4,0	1,222	1,084	1,105	0,926	0,957	0,755	0,442	0,872	0,742	0,800	0,568
4,5	1,237	1,093	1,158	0,962	0,981	0,768	0,444	0,878	0,747	0,833	0,583
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
5,5	1,254	1,109	1,250	1,021	1,019	0,788	0,447	0,886	0,756	0,885	0,607
6,0	1,259	1,116	1,290	1,047	1,034	0,796	0,448	0,891	0,759	0,903	0,617
7,0	1,269	1,122	1,357	1,087	1,059	0,811	0,449	0,898	0,764	0,941	0,633
8,0	1,276	1,128	1,415	1,121	1,079	0,822	0,451	0,903	0,768	0,968	0,646
9,0	1,280	1,133	1,465	1,153	1,095	0,830	0,452	0,906	0,770	0,992	0,657
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
15,0	1,298	1,150	1,662	1,271	1,149	0,864	0,455	0,917	0,777	1,088	0,696
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
25,0	1,312	1,160	1,821	1,363	1,185	0,887	0,457	0,924	0,782	1,146	0,723
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
$\infty$	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769

Größe der Mauer für mittleres Mauerwerk und mittlere Erde.

Stärke von $\frac{a}{H}$	Stich Baubant Stegel	Stich der Voraussetzung bei Umlaufes; die Berme ist			Stich den Gleichungen für das Gleiten					
		0	$=0,2H$	$=e$	1te Annahme $\delta_1=3,3f_1$ die Berme ist	2te Annahme $\delta_1=2,65f_1$ die Berme ist	3te Annahme $\delta_1=2f_1$ die Berme ist	0	$=e$	$=e$
1,0	0,30H + 1m,23	0,61	0,54	0,41	0,57	0,39	0,42	0,37	0,31	0,31
1,1	0,32H + 1,23	0,63	0,56	—	0,61	—	0,45	0,40	—	0,32
1,2	0,34H + 1,23	0,65	0,57	—	0,65	—	0,47	0,42	—	0,34
1,3	0,36H + 1,13	0,68	0,59	—	0,68	—	0,50	0,43	—	0,35
1,4	0,38H + 1,23	0,70	0,60	0,42	0,72	0,42	0,52	0,45	0,33	0,36
1,5	0,40H + 1,23	0,72	0,61	0,43	0,75	0,42	0,55	0,46	0,34	0,37
2,0	0,50H + 1,23	0,80	0,66	—	0,94	—	0,68	0,54	—	0,43
3,0	0,70H + 1,23	0,89	0,72	0,44	1,35	0,48	0,87	0,68	0,38	0,51
3,2	0,74H + 1,23	0,91	—	—	—	—	0,91	—	—	—
3,5	0,80H + 1,23	—	0,74	—	—	—	—	0,75	—	—
4,0	0,90H + 1,23	0,96	0,76	—	1,76	—	1,04	0,81	—	0,56
5,0	1,10H + 1,23	1,00	0,78	—	2,18	—	1,20	0,93	—	0,62
10,0	2,10H + 1,23	1,11	0,84	0,45	4,44	0,52	1,92	1,45	0,42	0,32
15,0	3,10H + 1,23	1,15	0,86	—	6,99	—	2,95	2,36	—	0,83
20,0	4,10H + 1,23	1,17	0,88	—	9,79	—	4,90	4,11	—	0,85
30,0	6,10H + 1,23	1,19	0,89	0,46	16,24	0,54	8,94	8,60	0,43	0,33
50,0	10,10H + 1,23	1,23	0,92	—	32,42	—	17,35	17,30	—	0,93
$\infty$	$\infty$	1,24	0,93	0,46	$\infty$	0,55	$\infty$	$\infty$	0,44	1,00
										0,33

In Tabellen der Größe der Mauer



In der zweiten Tabelle zeigen die letzten Columnen den außerordentlichen Einfluß, welchen der Werth von  $\delta_1$  ausübt. Poncelet empfiehlt schließlich  $\delta_1 = 1,86$  und, wenn die Erde nicht sehr hoch über der Mauerkrone steht,  $\delta_1 = 1,5$  oder selbst  $= 1,4$  zu nehmen.

§. 28. Eine empirische Formel, deren Resultate für  $\alpha$  Werthe geben, welche höchstens um  $\frac{1}{15}$  des wahren Werthes fehlerhaft und dies auch nur in den äußersten Fällen für  $a = 0$  und  $a = 1$  sind, ist die folgende

$$x = 0,85 (1 + a) \sqrt{\frac{p}{p_1}} \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha,$$

oder

$$e = 0,85 (H + h) \sqrt{\frac{p}{p_1}} \cdot \tan \frac{1}{2} \alpha,$$

deren man sich in der Praxis bedienen kann, vorausgesetzt, daß die Daten der Aufgabe in eins der folgenden Systeme passen:

Erstes System

$$\frac{p_1}{p} = 1,00$$

$$f = \begin{cases} 0,60 \text{ bis} \\ 1,40 \end{cases}$$

Zweites System

$$\frac{p_1}{p} = 1,50$$

$$f = 1,00$$

Drittes System

$$\frac{p_1}{p} = \frac{3}{5}$$

$$f = \begin{cases} 0,60 \text{ bis} \\ 1,40 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} 0,00 \text{ bis} \\ 0,20 H \end{cases}$$

$$a = \begin{cases} 0,00 \text{ bis} \\ 1,00. \end{cases}$$

### Transformation der Profile.

§. 29. Alles Vorhergehende bezieht sich nur auf Mauern mit verticalen Seitenwänden. Für den Fall der Drehung läßt sich auf die folgende Weise die Stärke der Basis einer nach außen geböschten Mauer bestimmen, welche dieselbe Stabilität besitzt, wie eine Mauer mit verticalen Seitenwänden von der Stärke  $e$ . Kennt man  $n$  die Tangente des Winkels, welche die äußere Böschung der Mauer mit der Verticalen bildet, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2} H E^2 - \frac{1}{6} n^2 H^3 = \frac{1}{2} e^2 H, \text{ woraus } E = \sqrt{e^2 + \frac{1}{3} n^2 H^2}.$$

Es ist aber stets  $n < \frac{1}{7}$  und  $\frac{e}{H} > 0,198$  und also  $\frac{e \sqrt{3}}{n H} > 2,50$ , man hat daher <sup>1)</sup> mit einer Genauigkeit von  $\frac{1}{110}$  für alle Werthe

1) Poncelet, Cours de Mécanique appliquée aux Machines, Notes de la 3ème Lection; Mosley in den Principles of Engineering Appendix, Note B. Einen Beweis dieses Satzes findet man ferner von Weisbach in den polytechnischen Mittheilungen von Wolf und Karmarsch, Band I. pag. 80.

des  $\frac{e\sqrt{3}}{nH}$  von 250 bis  $\infty$ ,  $\sqrt{e^2 + \frac{1}{3}n^2H^2} = 0,991e + 0,191 \frac{nH}{\sqrt{3}}$

woraus  $E = 0,99 (e + \frac{1}{10} nH)$  und  $e = 1,01 E - \frac{1}{10} nH$ .

Um daher  $E$  zu erhalten, führe man eine Linie, deren Neigung die verlangte Böschung angiebt, durch einen Punkt der äußern verticalen Seitenwand der ersten Mauer (deren Breite  $e$  ist) welcher in  $\frac{1}{10}$  der Höhe liegt, und subtrahire  $\frac{1}{100}$  des für  $E$  erhaltenen Resultates. Dasselbe Verfahren kann offenbar auch Anwendung finden, wenn man von einer geböschten Mauer zu einer mehr oder weniger geböschten Mauer übergehen will.

### Berechnung von Erdaushebungen.

§. 30. Nach §. 229 ist die Höhe, bis auf welche sich eine Erdmasse absteigen läßt, wenn man ihr eine Böschung giebt, welche den Winkel  $\varepsilon$  mit der Verticalen bildet,

$$h = \frac{2\gamma}{\omega} \frac{\sin \tau}{t^2 \cos \frac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon) \cos \varepsilon}$$

und die Höhe, bis auf welche sich die Erde vertical absteigen läßt

$$h' = \frac{4\gamma}{\omega \tan \frac{1}{2}\tau'}$$

in welchen beiden Formeln  $\gamma$  die Cohäsion der Erde für die Flächeneinheit,  $\omega$  das Gewicht einer Kubikeinheit,  $\tau$  den Winkel, welchen die natürliche Böschung der Erde mit der Verticalen bildet, und  $t$  den Werth  $\tan \frac{1}{2}(\tau \mp \varepsilon) \pm \tan \varepsilon$  bezeichnet. Setzt man nun den Werth, welcher sich aus der zweiten Gleichung für  $\gamma$  ergibt, in die erste, und reducirt, so erhält man

$$h = h' \cdot \frac{\cos \varepsilon \cdot \sin \frac{1}{2}\tau}{\sin \frac{1}{2}(\tau \pm \varepsilon)}.$$

Für Erdaushebungen kann der Winkel  $\varepsilon$  nur mit dem negativen Zeichen genommen werden (s. §§. 225 u. 226).

Nach dieser Formel ist von François die folgende Tabelle berechnet worden.

Tabelle zur Berechnung der Höhen und der Böschungsanlagen für Erbauschneidungen.

Natürliche Böschung für die Höhe Eins												
Gränzt. Böschung für die Höhe Eins	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60
0,20	2,95	2,40	2,11	1,92	1,80	1,71	1,64	1,59	1,55	1,52	1,49	1,47
0,25	4,30	3,19	2,65	2,34	2,14	1,99	1,89	1,82	1,75	1,70	1,66	1,63
0,30	6,84	4,43	3,42	2,89	2,57	2,35	2,19	2,08	1,99	1,91	1,86	1,81
0,35	12,37	6,50	4,57	3,65	3,13	2,79	2,56	2,39	2,27	2,17	2,08	2,02
0,40	28,38	10,37	6,36	4,72	3,88	3,36	3,02	2,78	2,60	2,46	2,35	2,26
0,45	115,59	18,83	9,37	6,33	4,91	4,11	3,60	3,24	3,00	2,81	2,66	2,54
0,50	unendlich	43,30	14,98	8,83	6,38	5,11	4,34	3,84	3,48	3,22	3,02	2,87
0,55	unendlich	176,92	27,25	13,03	8,59	6,47	5,31	4,58	4,08	3,72	3,45	3,24
0,60	unendlich	unendlich	62,77	20,86	11,93	8,41	6,63	5,53	4,83	4,33	3,97	3,69
0,65	unendlich	unendlich	257,34	37,92	18,05	11,28	8,40	6,77	5,76	5,08	4,58	4,22
0,70	unendlich	unendlich	unendlich	87,57	51,54	15,77	10,90	8,42	6,96	6,00	5,33	4,84
0,75	unendlich	unendlich	unendlich	356,96	119,08	37,41	20,47	10,69	8,52	7,16	6,25	5,60
0,80	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	488,06	68,21	30,26	18,67	10,61	8,65	7,39	6,51
0,85	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	157,39	48,55	26,65	13,46	10,59	8,82	7,63
0,90	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	86,59	38,61	23,50	13,18	10,65	9,01	7,79
0,95	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	204,69	61,95	32,86	16,73	13,03	10,79	9,29
1,00	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	840,78	68,11	48,60	29,21	20,57	15,85	13,74
1,05	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	260,64	79,01	40,81	26,73	19,74	17,04
1,10	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	1072,65	142,23	60,35	35,87	25,04	21,04
1,15	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	328,14	96,93	50,09	32,53	28,53
1,20	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich	unendlich

Die Zahlen, welche in der horizontalen Columnne stehen, die den Kopf der Tabelle bildet, geben die Anlagen der natürlichen Böschungen auf die Einheit der Höhe an, und jene Zahlen, welche in der ersten verticalen Columnne stehen, geben ebenso die Anlagen

der Böschungen bei der Höhe  $= 1$  für die Aushebungen an. Die Zahl, welche in einem durch diese beiden Böschungsanlagen bestimmten Felde geschrieben steht, giebt den entsprechenden Werth von  $\frac{h}{k}$ , welcher daher mit dem Werthe von  $k$  multiplicirt werden muß, um  $h$  zu geben. Es mögen hier zwei Beispiele für die Anwendung der Tabelle folgen.

1. Wie tief kann eine Aushebung gemacht werden, wenn die Anlage der Erdböschung für die Höhe Eins 0,40 beträgt und die natürliche Böschung auf die Höhe 1 zur Anlage 1 hat? Sucht man an dem Kopfe der Tabelle die Zahl 1,00 für die Anlage der natürlichen Böschung, und in der verticalen ersten Columne die Zahl 0,40 für die Anlage der Böschung, welche die Aushebung erhalten soll, so findet man in dem Durchschnitte der beiden Columnen die Zahl 3,36, mithin ist die gesuchte Höhe  $= k \cdot 3,36$ .

2. Welches ist die stärkste Böschung, die man einer Aushebung von 4 Meter Höhe geben kann, wenn  $k = 0,90$  Meter und die natürliche Böschung bei der Höhe  $= 1$  zur Anlage 1,20 hat.

Dividirt man 4 Meter durch 0,90 Meter, so erhält man zum Quotient die Zahl 4,44; sucht man nun in der horizontalen Columne am Kopfe der Tabelle die Zahl 1,20, welche das Verhältniß der Anlage der natürlichen Böschung zu ihrer Höhe ausdrückt, und geht in der entsprechenden verticalen Columne abwärts, bis man auf eine Zahl trifft, welche der Zahl 4,44 am nächsten liegt und dann von dem Felde, in welchem diese Zahl steht, in der horizontalen Columne bis zur ersten verticalen Columne zurück, so findet man dort die Zahl 0,55, welche die Anlage der gesuchten Böschung auf die Höhe  $= 1$  angiebt. Wenn man noch genauer zu Werke gehen wollte, so könnte man die Böschungsanlage, welche der Zahl 4,44 genau entspricht durch Interpoliren finden; allein die bloße Annäherung scheint hier um so mehr zu genügen, da es keine andere Folge haben kann, als daß die gefundenen Böschungen etwas sanfter werden.

### III. Zusätze zu der Theorie der Gewölbe.

§. 31. Die folgenden von Varidel<sup>1)</sup> nach der Navier'schen Theorie berechneten Tabellen geben die Neigung der Bruchfuge zu der Verticalen und den Horizontal Schub für Kreisgewölbe an. Es ist

- $a$  das Verhältniß der Gewölbstärke zu dem innern Halbmesser;
- $c$  das Verhältniß der Höhe der Last über den Scheitel zum innern Halbmesser;
- $i$  die Neigung der Oberfläche der Belastung (oder der Hintermauerung) gegen den Horizont.

1) Tables des poussées des voûtes en plein-cintre. Paris 1837 et 1840.

Die Tabelle für den Horizontalschub giebt denselben für einen innern Halbmesser der gleich der Längeneinheit ist, und für ein Material der Gewölbesteine und der Belastung, wovon eine Kubikeinheit auch eine Gewichtseinheit wiegt. Um daher den Horizontalschub irgend eines gegebenen Kreisgewölbes zu finden, hat man den entsprechenden Werth aus der Tabelle mit dem Quadrate des innern Halbmessers und dem Gewichte von einer Kubikeinheit des Materials zu multipliciren.

# 1. Tabelle für die Bruchwinkel der Kreisgewölbe.

Für den Fall der Drehung.<sup>1)</sup>

$i=0^\circ$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	68,90	59,19	54,04	51,15	49,35	48,20	45,74
0,10	65,40	60,48	57,70	56,01	54,93	54,17	52,34
0,15	64,00	61,30	59,70	58,69	58,00	57,49	56,21
0,20	63,10	61,70	60,88	60,30	59,90	59,60	58,80
0,25	62,24	61,76	61,44	61,22	61,05	60,94	60,59
0,30	61,30	61,42	61,54	61,60	61,66	61,67	61,81
0,35	60,17	60,80	61,21	61,54	61,78	61,98	62,56
0,40	58,80	59,80	60,52	61,05	61,48	61,67	62,90
0,45	57,32	58,53	59,45	60,19	60,80	61,28	62,85
0,50	55,63	56,97	58,09	58,98	59,72	60,34	62,40

$i=7^\circ30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	68,30	57,30	51,69	48,61	47,84	46,11	44,85
0,10	64,30	58,68	55,95	54,52	53,64	53,03	51,68
0,15	62,43	59,67	58,33	57,55	57,00	56,61	55,66
0,20	61,48	60,42	59,72	59,35	59,07	58,87	58,29
0,25	60,75	60,55	60,44	60,38	60,33	60,21	60,17
0,30	60,09	60,49	60,77	60,95	61,08	61,18	61,48
0,35	59,27	60,12	60,62	61,02	61,33	61,59	62,31
0,40	58,25	59,33	60,11	60,72	61,18	61,57	62,70
0,45	57,11	58,35	59,29	60,05	60,67	61,16	62,78
0,50	55,82	57,13	58,21	59,08	59,81	60,41	62,45

1) Der Bruchwinkel ist in Graden und dessen Decimalen angegeben.

$i=15^\circ$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	64,80	50,50	46,95	45,69	45,03	44,67	43,90
0,10	59,30	55,07	53,34	52,47	51,99	51,69	50,93
0,15	59,08	57,32	56,65	56,05	55,75	55,55	55,05
0,20	59,06	58,60	58,35	58,20	58,10	58,02	57,84
0,25	59,05	59,28	59,42	59,53	59,60	59,65	59,79
0,30	58,90	59,57	59,98	60,26	60,48	60,66	61,15
0,35	58,53	59,41	60,09	60,57	60,93	61,17	62,00
0,40	57,99	59,08	59,87	60,48	60,95	61,36	62,60
0,45	57,26	58,43	59,34	60,06	60,67	61,15	62,70
0,50	56,38	57,61	58,58	59,36	60,06	60,64	62,50

$i=22^\circ 30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	36,10	41,20	42,00	42,30	42,60	42,70	42,90
0,10	50,50	50,30	50,19	50,17	50,14	50,13	50,11
0,15	54,25	54,31	54,35	54,35	54,36	54,36	54,38
0,20	56,17	56,60	56,82	56,95	57,04	57,11	57,28
0,25	57,27	57,93	58,33	58,61	58,79	58,95	59,33
0,30	57,85	58,68	59,23	59,60	59,93	60,16	60,83
0,35	58,07	59,01	59,70	60,21	60,61	60,91	61,85
0,40	58,02	59,02	59,79	60,38	60,87	61,25	62,20
0,45	57,74	58,78	59,60	60,26	60,82	61,27	62,70
0,50	57,30	58,31	59,16	59,88	60,47	61,00	62,90

$i=30^\circ$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,30	36,20	38,40	39,57	40,28	40,77	41,90
0,10	43,30	46,06	47,25	47,90	48,30	48,59	49,24
0,15	50,07	51,46	52,18	52,63	52,94	53,14	53,68
0,20	53,66	54,69	55,27	55,67	55,96	56,16	56,72
0,25	55,80	56,72	57,30	57,72	58,01	58,23	58,89
0,30	57,13	58,01	58,62	59,06	59,40	59,69	60,48
0,35	57,93	58,80	59,43	59,94	60,33	60,66	61,64
0,40	58,33	59,20	59,89	60,42	60,87	61,23	62,39
0,45	58,47	59,33	60,03	60,61	61,08	61,48	62,87
0,50	58,38	59,22	59,93	60,53	61,03	61,47	63,00

$i=37^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,10	34,3	36,28	37,59	38,48	39,16	40,82
0,10	40,98	43,59	45,09	46,01	46,67	47,14	48,35
0,15	47,71	49,40	50,43	51,12	51,61	51,96	52,93
0,20	52,01	53,23	54,01	54,54	54,94	55,24	56,10
0,25	54,87	55,80	56,45	56,94	57,29	57,59	58,41
0,30	56,77	57,58	58,16	58,62	58,98	59,26	60,16
0,35	58,04	58,78	59,34	59,81	60,17	60,47	61,45
0,40	58,89	59,58	60,13	60,60	60,97	61,30	62,40
0,45	59,38	60,06	60,62	61,07	61,47	61,83	63,00
0,50	59,69	60,29	60,84	61,26	61,72	62,07	63,30

$i=45^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,05	31,3	33,68	35,46	36,36	37,22	38,00	39,90
0,10	40,60	42,40	43,70	44,64	45,35	45,92	47,45
0,15	46,77	48,20	49,18	49,93	50,47	50,92	52,15
0,20	51,23	52,27	53,05	53,64	54,07	54,42	55,47
0,25	54,42	55,22	55,84	56,31	56,70	57,01	57,97
0,30	56,72	57,38	57,90	58,30	58,65	58,94	59,85
0,35	58,35	58,94	59,40	59,79	60,11	60,38	61,30
0,40	59,56	60,09	60,52	60,89	61,19	61,46	62,40
0,45	60,40	60,89	61,29	61,67	61,97	62,24	63,20
0,50	60,99	61,43	61,80	62,20	62,50	62,80	63,80

Für den Fall des Gleitens.<sup>1)</sup>

$i=6^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	31°43'	30°18'	29°8'	28°23'	27°51'	27°29'	26°30'
0,30	31,33	30,3	29,2	28,20	27,51	27,30	26,33
0,35	31,15	29,51	28,56	28,19	27,52	27,30	26,35
0,40	30,55	29,41	28,52	28,17	27,52	27,32	26,37
0,45	30,38	29,34	28,49	28,17	27,52	27,33	26,39
0,50	30,26	29,27	28,46	28,15	27,52	27,34	26,42

1) Der Bruchwinkel ist in Graden und Minuten angegeben.

$i=7^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	30°41'	28°51'	27°54'	27°20'	26°57'	26°41'	26°2'
0,30	30,9	28,40	27,51	27,20	26,58	26,43	26,4
0,35	29,46	28,32	27,48	27,20	27,0	26,45	26,6
0,40	29,30	28,26	27,46	27,20	27,1	26,47	26,8
0,45	29,17	28,21	27,45	27,20	27,2	26,48	26,10
0,50	29,6	28,17	27,44	27,20	27,3	26,49	26,12

$i=15^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	27°36'	26°42'	26°17'	26,3'	25°53'	25°45'	25°30'
0,30	27,26	26,42	26,19	26,5	25,56	25,49	25,32
0,35	27,19	26,41	26,20	26,7	25,58	25,51	25,34
0,40	27,13	26,41	26,22	26,9	26,0	25,53	25,36
0,45	27,10	26,41	26,23	26,10	26,2	25,55	25,37
0,50	27,7	26,41	26,24	26,12	26,3	25,57	25,39

$i=22^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	23°55'	24°19'	24°31'	24,38'	24°44'	24°48'	24,57'
0,30	24,13	24,30	24,39	24,44	24,48	24,51	24,58
0,35	24,27	24,38	24,44	24,48	24,51	24,54	24,59
0,40	24,37	24,44	24,50	24,52	24,54	24,54	25,1
0,45	24,44	24,50	24,53	24,55	24,57	24,59	25,2
0,50	24,50	24,54	24,57	24,58	25,0	25,1	25,3

$i=30^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	21°26'	22°24'	22°59'	23°22'	23°38'	23°50'	24°21'
0,30	21,53	22,40	23,9	23,31	23,43	23,54	24,22
0,35	22,14	22,52	23,17	23,34	23,47	23,57	24,24
0,40	22,31	23,2	23,24	23,40	23,50	24,0	24,25
0,45	22,44	23,11	23,30	23,44	23,54	24,2	24,26
0,50	22,54	23,18	23,35	23,47	23,57	24,4	24,27



$i=37^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	21°26'	22°24'	22°59'	23°22	23°38	23°50'	24°21
0,30	21,53	22,40	23,9	23,31	23,43	23,54	24,22
0,35	22,14	22,52	23,17	23,34	23,47	23,57	24,24
0,40	22,31	23,2	23,24	23,40	23,50	24,0	24,25
0,45	22,44	23,11	23,30	23,44	23,54	24,2	24,26
0,50	22,54	23,18	23,35	23,47	23,57	24,4	24,27

$i=45^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	19°46'	20°30'	21°7'	21°35'	21°57'	22°15'	23°12'
0,30	20,4	20,45	21,16	21,42	22,0	22,19	23,12
0,35	20,19	20,55	21,24	21,47	22,6	22,22	23,13
0,40	20,32	21,4	21,31	21,51	22,10	22,25	23,13
0,45	20,42	21,12	21,36	21,56	22,13	22,27	23,14
0,50	20,51	21,19	21,41	22,0	22,16	22,29	23,14

## II. Tabelle für die Horizontalschübe der Kreisgewölbe.

Für den Fall der Drehung.

$i=0^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,08174	0,14797	0,21762	0,28877	0,36060	0,43277	0,79541
0,10	0,10279	0,16370	0,22588	0,28862	0,35164	0,41481	0,73161
0,15	0,11894	0,17480	0,23111	0,28764	0,34429	0,40100	0,68504
0,20	0,13073	0,18191	0,23322	0,28460	0,33603	0,38747	0,64488
0,25	0,13871	0,18553	0,23237	0,27922	0,32607	0,37293	0,60727
0,30	0,14333	0,18604	0,22874	0,27145	0,31416	0,35687	0,57041
0,35	0,14504	0,18379	0,22258	0,26140	0,30023	0,33907	0,53335
0,40	0,14422	0,17913	0,21415	0,24924	0,28437	0,31953	0,49560
0,45	0,14124	0,17240	0,20374	0,23520	0,26674	0,29835	0,45693
0,50	0,13649	0,16396	0,19168	0,21957	0,24760	0,27573	0,41728

$i = 7^{\circ}30'.$

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,06180	0,12867	0,19937	0,27125	0,34356	0,41606	0,77944
0,10	0,08514	0,14666	0,20930	0,27237	0,33561	0,39895	0,71618
0,15	0,10380	0,16001	0,21657	0,27326	0,33003	0,38683	0,67110
0,20	0,11813	0,16948	0,22089	0,27237	0,32384	0,37533	0,63286
0,25	0,28170	0,17557	0,22244	0,26932	0,31619	0,36306	0,59743
0,30	0,13598	0,17866	0,22134	0,26403	0,30673	0,34943	0,56295
0,35	0,14040	0,17909	0,21783	0,25661	0,29542	0,33424	0,52846
0,40	0,14234	0,17718	0,21215	0,24720	0,28230	0,31744	0,49344
0,45	0,14211	0,17323	0,20454	0,23598	0,26751	0,29910	0,45763
0,50	0,14003	0,16753	0,19528	0,22319	0,25124	0,27938	0,42096

$i = 15^{\circ}.$

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,05310	0,12265	0,19488	0,26748	0,34018	0,41293	0,77681
0,10	0,07903	0,14170	0,20493	0,26832	0,33176	0,39524	0,71277
0,15	0,09990	0,15658	0,21336	0,27022	0,32708	0,38395	0,66840
0,20	0,11631	0,16781	0,21931	0,27083	0,32234	0,37386	0,63145
0,25	0,12894	0,17582	0,22268	0,26955	0,31643	0,36330	0,59767
0,30	0,13835	0,18096	0,23361	0,26627	0,30895	0,35163	0,56510
0,35	0,14494	0,18355	0,22224	0,26098	0,29976	0,33855	0,53271
0,40	0,14905	0,18384	0,21878	0,25380	0,28888	0,32399	0,49995
0,45	0,15097	0,18212	0,21344	0,24488	0,27641	0,30800	0,46652
0,50	0,15099	0,17860	0,20642	0,23439	0,26247	0,29065	0,43232

$i=22^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,06102	0,13346	0,20621	0,27899	0,35178	0,42458	0,78857
0,10	0,08700	0,15053	0,21407	0,27760	0,34113	0,40466	0,72233
0,15	0,10877	0,16567	0,22257	0,27947	0,33638	0,39328	0,67778
0,20	0,12635	0,17785	0,22936	0,28087	0,33239	0,38391	0,64150
0,25	0,14037	0,18716	0,23399	0,28082	0,32767	0,37453	0,60886
0,30	0,15129	0,19381	0,23640	0,27902	0,32166	0,36432	0,57773
0,35	0,15948	0,19804	0,23669	0,27540	0,31415	0,35292	0,54700
0,40	0,16525	0,20005	0,23497	0,26999	0,30506	0,34017	0,51608
0,45	0,16883	0,20005	0,23141	0,26289	0,29444	0,32604	0,48460
0,50	0,17047	0,19824	0,22617	0,25423	0,28238	0,31060	0,45241

$i=30^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,09355	0,16408	0,23605	0,30845	0,38101	0,45365	0,81731
0,10	0,11297	0,17592	0,23922	0,30263	0,36609	0,42957	0,74711
0,15	0,13295	0,18962	0,24640	0,30323	0,36009	0,41696	0,70138
0,20	0,15038	0,20172	0,25314	0,30459	0,35606	0,40755	0,66506
0,25	0,16493	0,21160	0,25834	0,30513	0,35193	0,39876	0,63299
0,30	0,17673	0,21917	0,26170	0,30427	0,34688	0,38951	0,60282
0,35	0,18599	0,22452	0,26314	0,30182	0,34055	0,37930	0,57332
0,40	0,19293	0,22777	0,26271	0,29773	0,33280	0,36791	0,54380
0,45	0,19774	0,22906	0,26050	0,29202	0,32361	0,35524	0,51385
0,50	0,20060	0,22854	0,25661	0,28476	0,31299	0,34128	0,48327

$i=37^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,14749	0,21733	0,28854	0,36038	0,43255	0,50490	0,86784
0,10	0,15949	0,22174	0,28457	0,34768	0,41093	0,47426	0,79141
0,15	0,17605	0,23233	0,28886	0,34553	0,40226	0,45904	0,74322
0,20	0,19209	0,24321	0,29448	0,34583	0,39722	0,44865	0,70598
0,25	0,20627	0,25282	0,29948	0,34619	0,39294	0,43972	0,67382
0,30	0,21827	0,26066	0,30314	0,34568	0,38825	0,43085	0,64406
0,35	0,22805	0,26659	0,30521	0,34388	0,38259	0,42133	0,61529
0,40	0,23570	0,27060	0,30558	0,34062	0,37571	0,41083	0,58673
0,45	0,24130	0,27275	0,30427	0,33586	0,36749	0,39916	0,55787
0,50	0,24499	0,27312	0,30132	0,32958	0,35789	0,38625	0,52845

$i=45^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,1$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,2$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,3$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,4$ $\frac{P}{r^2}$	$c=0,5$ $\frac{P}{r^2}$	$c=1,0$ $\frac{P}{r^2}$
0,05	0,23105	0,30081	0,37162	0,44305	0,51485	0,58688	0,94881
0,10	0,23318	0,29507	0,35754	0,42034	0,48333	0,54646	0,86300
0,15	0,24478	0,30079	0,35708	0,41355	0,47013	0,52678	0,81059
0,20	0,25819	0,30915	0,36028	0,41151	0,46281	0,51415	0,77124
0,25	0,27104	0,31752	0,36410	0,41074	0,45744	0,50417	0,73809
0,30	0,28248	0,32486	0,36731	0,40981	0,45235	0,49493	0,70803
0,35	0,29216	0,33073	0,36935	0,40803	0,44674	0,48547	0,67939
0,40	0,29997	0,33494	0,36998	0,40506	0,44016	0,47530	0,65123
0,45	0,30589	0,33745	0,36907	0,40072	0,43240	0,46412	0,62294
0,50	0,30996	0,33824	0,36657	0,39494	0,42334	0,45177	0,59419

Für den Fall des Gleitens.

$$i=0^{\circ}.$$

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,10510	0,14071	0,17688	0,21339	0,25003	0,28674	0,47107
0,30	0,12606	0,16301	0,20070	0,23866	0,27674	0,31495	0,50661
0,35	0,14737	0,18612	0,22535	0,26478	0,30435	0,34406	0,54305
0,40	0,16981	0,21009	0,25078	0,29173	0,33271	0,37391	0,58029
0,45	0,19307	0,23486	0,27700	0,31941	0,36197	0,40457	0,61827
0,50	0,21714	0,26047	0,30413	0,34803	0,39203	0,43609	0,65713

$$i=7^{\circ}30'.$$

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,09369	0,12987	0,16650	0,20232	0,24008	0,27689	0,46166
0,30	0,11362	0,15136	0,18949	0,22770	0,26601	0,30432	0,49637
0,35	0,13436	0,17363	0,21327	0,25296	0,29272	0,33254	0,53199
0,40	0,15591	0,19672	0,23782	0,27900	0,32021	0,36154	0,56827
0,45	0,17834	0,22063	0,26316	0,30577	0,34855	0,39130	0,60543
0,50	0,20158	0,24532	0,28934	0,33341	0,37765	0,42192	0,64346

$$i=15^{\circ}.$$

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,09068	0,12752	0,16446	0,20139	0,23840	0,27530	0,46023
0,30	0,11054	0,14884	0,18725	0,22568	0,26416	0,30257	0,49486
0,35	0,13120	0,17098	0,21085	0,25077	0,29069	0,33067	0,53030
0,40	0,15268	0,19396	0,23533	0,27666	0,31805	0,35941	0,56653
0,45	0,17486	0,21766	0,26048	0,30326	0,34620	0,38904	0,60353
0,50	0,19786	0,24214	0,28642	0,33074	0,37512	0,41944	0,64128

$i=22^{\circ}30'$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,09777	0,13472	0,17036	0,20732	0,34437	0,28130	0,46629
0,30	0,11824	0,15668	0,19508	0,23360	0,27205	0,31051	0,50283
0,35	0,13941	0,17934	0,21933	0,25929	0,29924	0,33914	0,53889
0,40	0,16142	0,20290	0,24435	0,28571	0,32720	0,36854	0,57571
0,45	0,18427	0,22718	0,27012	0,31303	0,35592	0,39885	0,61333
0,50	0,20794	0,25231	0,29666	0,34107	0,38544	0,42990	0,65185

$i=30^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,11659	0,15321	0,18996	0,22679	0,26359	0,30050	0,48527
0,30	0,13843	0,17651	0,21477	0,25303	0,29138	0,32980	0,52201
0,35	0,16097	0,20065	0,24043	0,28026	0,32009	0,35995	0,55951
0,40	0,18449	0,22569	0,26693	0,30823	0,34957	0,39097	0,59793
0,45	0,20889	0,25162	0,29467	0,33713	0,37992	0,42278	0,63715
0,50	0,23410	0,27831	0,32260	0,36684	0,41115	0,45548	0,66722

$i=37^{\circ}30'$ .

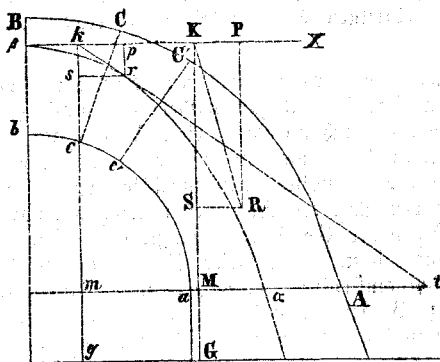
$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,14923	0,18548	0,22190	0,25846	0,29521	0,33194	0,51628
0,30	0,17346	0,21125	0,24917	0,28730	0,32545	0,36369	0,55546
0,35	0,19870	0,23797	0,27743	0,31699	0,35668	0,39642	0,59561
0,40	0,22466	0,26562	0,30664	0,34778	0,38898	0,43012	0,63668
0,45	0,25205	0,29437	0,33684	0,38037	0,42209	0,46480	0,67877
0,50	0,28022	0,32405	0,36804	0,41207	0,45621	0,50047	0,72177

$i=45^{\circ}$ .

$\alpha$	$c=0$	$c=0,1$	$c=0,2$	$c=0,3$	$c=0,4$	$c=0,5$	$c=1,0$
0,25	0,20030	0,23624	0,27246	0,30882	0,34539	0,38200	0,56582
0,30	0,22859	0,26606	0,30381	0,34167	0,37975	0,41782	0,60900
0,35	0,25800	0,29710	0,33627	0,37568	0,41515	0,45470	0,65339
0,40	0,28859	0,32915	0,36991	0,41079	0,45176	0,49292	0,69881
0,45	0,32036	0,36237	0,40465	0,44699	0,48954	0,53207	0,74530
0,50	0,35321	0,39680	0,44048	0,48441	0,52835	0,57227	0,79297

# Von der Mittellinie des Druckes bei einem Gewölbe.

§. 32. In dem Halbgewölbe, welches in der nebenstehenden Figur dargestellt ist, sei  $\beta X$  die Richtung des Horizontalschubes, welchen man sich vorläufig als in  $\beta$  angreifend denken mag. Um nun das Gleichgewicht in Bezug auf eine beliebige Fuge  $Cc$  zu untersuchen, sehe man für einen Augenblick den ganzen, rechts von  $Cc$  liegenden Theil als fest an, alsdann wird offenbar Gleichgewicht gegen Drehung vorhanden sein, wenn die Resultante  $kr$  aus dem Horizontalschube des Ge-



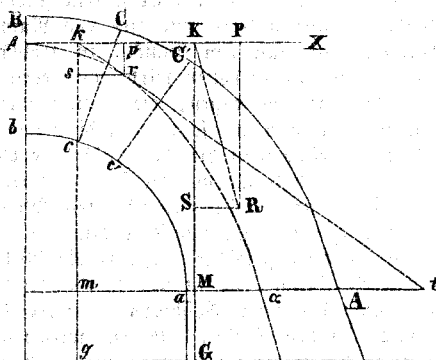
wölbes und allen Kräften, welche auf den links von  $Cc$  liegenden Theil wirken, zwischen den Punkten  $C$  und  $c$  liegt, wie dies von Navier oben angegeben ist. Markirt man nun den Punkt, in welchem die Fuge  $Cc$  von der Resultanten  $kr$  getroffen wird, und eben so die analogen Punkte für alle folgenden Fugen, die man sich einander immer unendlich nahe zu denken hat, so werden diese Punkte eine fortlaufende Curve bilden, welche man die Mittellinie des Druckes nennt, und aus deren Gestalt sich auf die Stabilität eines vorgelegten Gewölbes schließen läßt. Tritt nämlich diese Mittellinie des Druckes irgendwo aus der Gewölbmasse heraus, so ist offenbar das Gewölbe nicht im Gleichgewichte; berührt die Mittellinie die innere oder äußere Wölblinie, so ist nur mathematisches Gleichgewicht vorhanden, und bei einer Erschütterung wird der Bruch des Gewölbes zunächst in den Stellen erfolgen, welche den Punkten gegenüber liegen, in denen die innere oder äußere Wölblinie von der Mittellinie berührt wird; die Stabilität eines Gewölbes wird endlich desto größer sein, je näher die Mittellinie des Druckes bei der mittleren Wölblinie liegt.

Das Gleichgewicht gegen Gleiten läßt sich, wie folgt, beurtheilen. Geht die Mittellinie des Druckes durch den Schwerpunkt eines Gewölbssteines, so wird in diesem Punkte die Mittellinie von der Richtung der letzten in Frage kommenden Resultanten tangirt; in andern Fällen ist die Tangente der Mittellinie zwar nicht die Richtung der Resultanten, allein man begeht nur einen sehr geringen Fehler, wenn man dies dennoch annimmt <sup>1)</sup>. Es wird da-

1) Dieser Satz wird weiter unten bewiesen.

her Gleichgewicht gegen Gleiten in Bezug auf eine bestimmte Fuge vorhanden sein, wenn der Winkel, unter welchem die Mittellinie die Fuge schneidet, größer ist als der Reibungswinkel für das Material der Gewölbsteine, und die Stabilität eines Gewölbes wird desto größer sein, je mehr sich der Winkel, unter welchem die Mittellinie des Druckes die einzelnen Fugen trifft, einem rechten Winkel nähert.

S. 33. Construction der Mittellinie des Druckes. Besitzt das Gewölbe eine größere Dicke, als zum mathematischen Gleichgewicht nothwendig ist, so lassen sich unendlich viele Mittellinien des Druckes zwischen die beiden Wöblinien einzeichnen, ohne daß man vorher wüßte, welche von diesen Mittellinien zur Wirksamkeit kommen würde, wenn man den Bau des Gewölbes wirklich ausführte, indem dies von dem Sezen des Gewölbes abhängt, dessen Einfluß sich nicht genau berechnen läßt. Jede dieser Mittellinien ist bestimmt und läßt sich leicht construiren, wenn zwei ihrer Punkte gegeben sind. Es seien z. B. bei der Hälfte eines freien, unbelasteten Gewölbes, welche in der nebenstehenden Figur dargestellt ist, Fig. 182.  $\alpha$  in der Horizontal-



punkte die Verticalen  $GK$  und  $gk$ , endlich die Linie  $Ka$ . Die Resultante für den Punkt  $a$ , deren Richtung  $Ka$  ist, wird gebildet durch den Horizontalschub in der Richtung  $KX$ , und das Gewicht von  $bBAa$ , welches vertical in der Richtung  $KG$  wirkt. Nimmt man daher  $KS$  dem Gewichte von  $bBAa$  proportional an und vervollständigt das Parallelogramm durch Ziehen von  $SR \parallel KX$  und  $RP \parallel KG$ , so ist  $KP$  proportional dem Horizontalschube.

Macht man nun  $kp$  gleich  $KP$ , und  $ks$  proportional dem Gewichte von  $bBCe$ , so ist die Diagonale  $kr$  die Richtung der Resultanten für die Fuge  $Ce$ , und der Punkt, in welchem die Diagonale  $kr$  die Linie  $Cc$  schneidet, und welcher mit  $\gamma$  bezeichnet werden



mag, ist der gesuchte Punkt der Mittellinie des Druckes. Verlängert man  $kr$  bis  $t$  und beachtet, daß  $mk = Mk$  und  $sr = SR$  ist, so verhält sich:

$$\begin{aligned} \text{tang } mtk : \text{tang } MaK &= \frac{mk}{mt} : \frac{MK}{Ma} = \frac{1}{mt} : \frac{1}{Ma} \\ &= \text{tang } srk : \text{tang } SRK = \frac{ks}{sr} : \frac{KS}{SR} = ks : KS = bBc : bBAa \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{1}{mt} : \frac{1}{Ma} = bBc : bBAa.$$

Wollte man nun einmal nicht den Punkt  $\beta$ , sondern den Punkt  $\gamma$  als gegeben ansehen, so müßte man einen Punkt  $t$  so bestimmen, daß der vorstehenden Proportion Genüge geschieht. Die Linie  $ty$  wird dann die Verticale  $sg$  in einem Punkte  $k$  schneiden, durch den eine Horizontale gelegt wird, in welcher der gesuchte Punkt  $\beta$  liegt.

Sind die beiden zur Bestimmung der Curve dienenden Punkte schlecht gewählt, so wird sich dies bald aus dem Erfolg der Zeichnung ergeben. Es ist aber sehr leicht, einen solchen Fehler zu verbessern und eine neue Construction zu machen, da man die Bestimmung des Gewichtes und des Schwerpunktes der einzelnen Gewölbstücke nur einmal vorzunehmen nöthig hat.

Ist endlich das Gewölbe hintermauert oder sonst belastet, so bestimmt man das Gewicht und den Schwerpunkt jedes einzelnen Gewölbstückes, indem man annimmt, daß jedes Gewölbstück denjenigen Theil der Belastung zu tragen habe, welcher sich vertical darüber befindet.

§. 34. Was die Wahl der Punkte  $\alpha, \beta$  anlangt, so beachte man, daß jeder Theil  $aa, \alpha A$  der Fuge  $aA$  wenigstens die Hälfte von dem Normaldrucke muß tragen können, der sich für diese Fuge aus dem Horizontalstuhbe und dem Gewichte von  $bBAa$  ergibt. Es darf also  $\alpha$  weder in der innern noch in der äußern Wölblinie angenommen werden, weil dies ein Material von unendlich großer Festigkeit voraussetzen würde. Man wird vielmehr aus dem Normaldrucke  $T$  und dem Widerstande  $R$ , welchen das Material für jede Flächeneinheit mit Sicherheit zu leisten vermag, nach der Formel  $\frac{1}{2} \frac{T}{R}$ , den geringsten Abstand  $aa' = A'A$  (Fig. 182) berechnen, in welchem sich  $\alpha$  von der innern oder äußern Wölblinie befinden kann. Führt man dies für alle Fugen durch, so erhält man zwei Linien  $a'd'b'$  und  $A'D'B'$ , zwischen welche sich eine Mittel-



$x_1$  die Abscisse eines Punktes der mittlern Wölblinie, oder den Abstand des Schwerpunktes eines unendlich dünnen Gewölbsteines  $Cc$  von der Ordinatenaxe.

Die Gleichung der Fuge  $Cc$  ist

$$1) \quad x = \tan \alpha \cdot y + d,$$

wo  $d$  eine Function von  $\alpha$  bezeichnet. Die Resultante  $oy$ , welche den Punkt  $y$  der Mittellinie des Druckes bestimmt, muß der Proportion genügen

$$P : s = oP : os = x - \frac{m}{s} : B - y,$$

woraus

$$2) \quad sx - m + Py = BP$$

als die Gleichung der Geraden  $oy$  folgt, während  $s$  und  $m$  Functionen von  $\alpha$  sind. Die Elimination von  $\alpha$  aus den beiden Gleichungen giebt diejenige, welche der Mittellinie des Druckes zugehört. Die Rechnung ist in der Regel aber sehr verwickelt, weshalb wir den folgenden Weg einschlagen.

§. 36. Differentiirt man die zweite Gleichung, so kommt

$$sdx + xds - dm + l dy = 0.$$

Es ist aber  $dm$  nichts anders, als das Element  $ds$  multiplirt mit dem Abstände  $x_1$  seines Schwerpunktes von der Ordinatenaxe, also  $dm = x_1 ds$ ; man hat folglich

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{s}{P} - \frac{x_1 - x}{P} \cdot \frac{ds}{dx}$$

als die trigonometrische Tangente des Winkels, den ein Element der Linie  $\alpha\beta$  mit der Arc der  $x$  einschließt. Da für die Gerade  $oy$  derselbe Werth nur  $\frac{s}{P}$  ist, so sieht man, daß die Gerade  $oy$ , welche die Richtung der Resultanten für den Punkt  $y$  angiebt, nur dann eine Tangente für die Mittellinie des Druckes ist, wenn  $x_1 - x = 0$  ist, und die Curve  $\alpha\beta$  durch den Schwerpunkt der Fuge  $Cc$  geht. Die Tangente dieser Curve bildet einen kleinern Winkel als  $oy$  mit der Abscissenaxe bei allen Punkten, für welche  $x_1 - x$  positiv ist, und die also unterhalb der mittlern Wölblinie  $GG$  liegen; das Entgegengesetzte findet statt bei allen Punkten der Mittellinie des Druckes, welche oberhalb der Linie  $GG$  liegen.

Der Werth  $x_1 - x$  wird immer sehr klein sein, und wenn man auch nicht  $x_1 - x = 0$  oder  $x_1 = x$  setzen will, so wird man doch nur einen sehr unbedeutenden Fehler machen, wenn man  $dx_1 = dx$  setzt. Man hat dann

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{s}{P} - \frac{x_1 - x}{P} \cdot \frac{ds}{dx}.$$

Der Quotient  $\frac{ds}{dx_1}$  wird sehr nahezu denselben Werth behalten, wenn man sehr kleine endliche Werthe  $\Delta s, \Delta x_1$  für  $ds, dx_1$  setzt; man nehme  $\Delta x_1 = x_1 - x$ , so ist

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{s}{P} - \frac{\Delta s}{P} = \frac{s - \Delta s}{P} = \frac{s'}{P},$$

indem das zu  $\Delta x_1 = x_1 - x$  gehörende  $\Delta s$  das Gewicht des kleinen Gewölbsstückes  $Ccc'C'$ , und  $s - \Delta s$  folglich  $s'$  oder das Gewicht von  $BC'c'b$  ist. Durch Integration folgt aus der letzten Gleichung

$$s'x - m' + Py = BP,$$

indem  $x ds' = dm'$  ist. Diese Gleichung führt zu der Proportion

$$x - \frac{m'}{s'} : B - y = P : s.$$

Man hat also ein Mittel, eine Curve, welche der Mittellinie des Druckes sehr nahe liegt, auf die folgende Weise zu construiren.

Man nehme  $\beta o' = \frac{m'}{s'}, \frac{o'P}{o's'} = \frac{P}{s'}$  und ziehe die Diagonale  $o'\gamma$ .

Der Durchschnitt  $\gamma$  dieser Diagonale mit der Verticalen  $Pg'$ , welcher durch den Schwerpunkt  $g'$  der Fuge  $c'C'$  geht, ist der Punkt der Mittellinie des Druckes in der Fuge  $Cc$ , wobei zugleich  $o'\gamma$  die Tangente dieser Curve für den Punkt  $\gamma$  ist.

§. 37. Die Gleichung  $\frac{dy}{dx} = -\frac{s'}{P}$  ist genau richtig, wenn die Mittellinie des Druckes mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt. Sind außerdem alle Gewölbssteine gleich hoch, und wird von der Belastung des Gewölbes abgesehen, so ist  $s'$  dem Bogen  $Gg'$  oder  $\beta\gamma$  proportional und die Gleichung der Mittellinie sowohl des Druckes als des Gewölbes ist die einer gemeinen Kettenlinie.

# IV. Vergleichung der Maße und Gewichte verschiedener Länder

Vergleichung von Längenmaßen.

Mei.	Pariser Fuß.	England. Fuß	Preußen. Rheinl. u. Dänemarf. Fuß.	Baiern. Fuß.	Hannover Fuß.	Sachsen. Fuß.	Braunschweig. Fuß.	Kurhessen. Kaffeler Fuß.	Württemberg. Fuß.	Baden. Schwab. Fuß.	Oesterreich. Wiener Fuß.
1	3,078444	3,280699	3,186199	3,426310	3,423547	3,531197	3,504316	3,475854	3,490519	3,333333	3,163446
0,3248394	1	1,065765	1,035003	1,113000	1,112103	1,147072	1,138340	1,129094	1,133858	1,082798	1,027612
0,3047945	0,9382928	1	0,9711361	1,044320	1,043478	1,076290	1,068096	1,059421	1,063891	1,015982	0,9642010
0,3138535	0,9661806	1,029722	1	1,075359	1,074492	1,108279	1,099842	1,090909	1,095512	1,046178	0,9928588
0,2918592	0,8984722	0,9575606	0,9299217	1	0,9991937	1,030612	1,022767	1,014460	1,018740	0,9728640	0,9232809
0,2920947	0,8991973	0,9583333	0,9306721	1,000807	1	1,031444	1,023592	1,015279	1,019562	0,9736491	0,9240260
0,2831901	0,8717847	0,9291180	0,9023000	0,9702968	0,9695144	1	0,9923874	0,9843273	0,9884803	0,9439668	0,8958565
0,2853624	0,8784722	0,9362453	0,9092216	0,9777400	0,9769516	1,007671	1	0,9918781	0,9960630	0,9512081	0,9027287
0,2876991	0,8856655	0,9439417	0,9166667	0,9857461	0,9849513	1,015922	1,008188	1	1,004249	0,9589969	0,9101206
0,2864903	0,8819444	0,9399459	0,9128154	0,9816046	0,9808131	1,011654	1,003953	0,9957986	1	0,9549678	0,9062968
0,3000000	0,9235332	0,9842697	0,9558598	1,027893	1,027064	1,059359	1,051295	1,042756	1,047156	1	0,9490339
0,3161109	0,9731299	1,037128	1,007193	1,083094	1,082221	1,116250	1,107753	1,098756	1,103391	1,053703	1

# Vergleichung von Gewichten.

Stogramm.	Altes franz. zöl. Pfund.	England. PfundAdp.	Preußen. Sannover. Braunsch. Kurb. Pfd.	Baiern. Pfund.	Sachsen. Zollpfund.	Württemberg. berg. Pfd.	Norwegen. Dänemarf. Pfund.	Schweden. Pfund.	Alte köln. mische Mark.	Oesterreich. Pfund.	Rußland. Pfund.
1	2,042877	2,204597	2,138072	1,785714	2,000000	2,137995	2,002768	2,351063	4,276935	1,785675	2,441863
0,4895058	1	1,079163	1,046599	0,8741176	0,9790117	1,046561	0,9803666	1,150858	2,093585	0,8740985	1,195316
0,4535976	0,9266439	1	0,9698245	0,8099957	0,9071952	0,9697893	0,9084507	1,066437	1,940007	0,8099781	1,107632
0,4677110	0,9554758	1,031114	1	0,8351982	0,9354220	0,9999637	0,9367166	1,099618	2,000370	0,8351800	1,142096
0,5600000	1,144011	1,234574	1,197321	1	1,120000	1,197277	1,121550	1,316595	2,395084	0,9999782	1,367455
0,5000000	1,021438	1,102299	1,069036	0,8928571	1	1,068997	1,001384	1,175332	2,138467	0,8928377	1,220942
0,4677280	0,9555105	1,031152	1,000036	0,8352286	0,9354560	1	0,9367506	1,099658	2,000442	0,8352104	1,142137
0,4993090	1,020027	1,100775	1,067559	0,8916232	0,9986180	1,067520	1	1,173907	2,135512	0,8916038	1,219254
0,4253395	0,8689171	0,9377023	0,9094066	0,7595348	0,8506790	0,9093736	0,8518563	1	1,819149	0,7595183	1,038629
0,2338123	0,4776497	0,5154619	0,4999076	0,4175220	0,4676246	0,4998895	0,4682718	0,5497075	1	0,4175129	0,5709423
0,5600122	1,144036	1,234601	1,197347	1,000022	1,120024	1,197303	1,121574	1,316624	2,395136	1	1,367484
0,4093200	0,8365988	0,9028266	0,8755834	0,7312857	0,8190400	0,8755516	0,8201735	0,9628074	1,751490	0,7312698	1